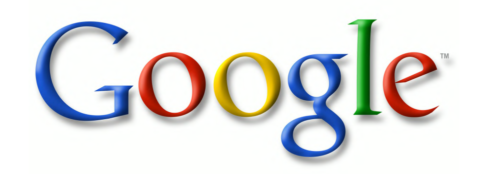
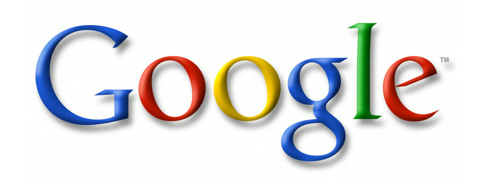
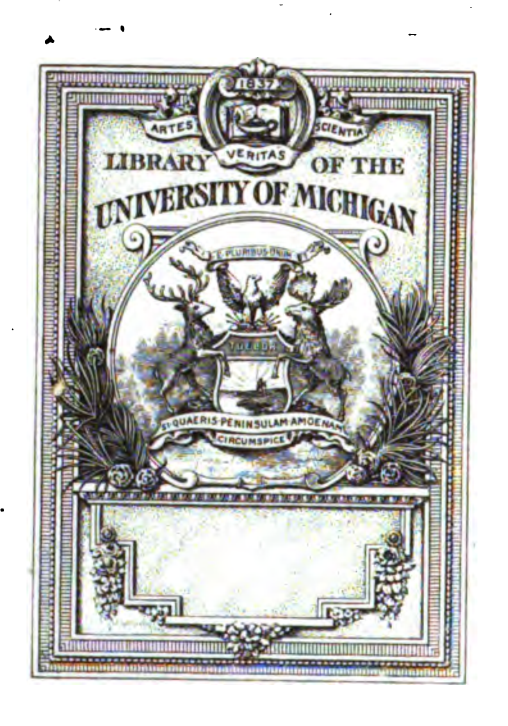









1837
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
TUEBOR
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES.

TROISIÈME SÉRIE.

1891.


ΑΕΙ Ο ΘΕΟΣ ΓΕΩΜΕΤΡΕΙ

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES SPÉCIALES, A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION,

RÉDIGÉ PAR

M. CH. BRISSE,

PROFESSEUR A L'ÉCOLE CENTRALE ET AU LYCÉE CONDORCET,
RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

ET

M. E. ROUCHÉ,

EXAMINATEUR DE SORTIE A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
PROFESSEUR AU CONSERVATOIRE DES ARTS ET MÉTIERS.

Publication fondée en 1842 par MM. Gerono et Terquem, et continuée par MM. Gerono, Prouhet, Bourget et Brisse.

TROISIÈME SÉRIE.

TOME DIXIÈME.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1891

NOUVELLES ANNALES
DE
MATHÉMATIQUES.

SUR LES MOUVEMENTS PLANS;

Par M. L. LECORNU,
Ingénieur des Mines, Docteur ès Sciences.

Lorsqu'on veut étudier analytiquement le mouvement d'une figure plane invariable qui se déplace sur un plan fixe, on considère à la fois deux axes rectangulaires liés à cette figure et deux axes rectangulaires immobiles dans le plan. En appelant alors ξ et η les coordonnées d'un point quelconque de la figure par rapport aux axes entraînés avec elle, x et y les coordonnées du même point par rapport aux axes fixes, λ et μ celles de l'origine mobile, θ l'angle de l'axe des ξ avec celui des x, on a les formules

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= \lambda + \xi\cos\theta - \eta\sin\theta,\\ y &= \mu + \xi\sin\theta + \eta\cos\theta; \end{aligned}\right.$$

ξ et η sont des quantités indépendantes du temps, et λ, μ, θ sont des fonctions du temps. Il suffit de se donner ces dernières pour que le mouvement soit complètement déterminé.

Ajoutons l'une à l'autre les deux équations précédentes, après avoir multiplié la seconde par la quantité

imaginaire i, et posons en outre

$$x + iy = z,$$
$$\xi + i\eta = \zeta,$$
$$\lambda + i\mu = a,$$
$$\cos\theta + i\sin\theta = b;$$

il vient

$$(2) \qquad z = a + b\zeta,$$

et cette équation unique peut, comme l'on sait, remplacer les deux premières. On a ainsi une relation entre les affixes z et ζ d'un même point rapporté successivement aux axes fixes et aux axes mobiles. a et b sont des fonctions du temps; en outre, le module de b est constant et égal à l'unité, de sorte qu'on peut écrire $b = e^{i\theta}$.

Je me propose ici d'appliquer l'équation (2) à l'examen de quelques questions concernant les mouvements plans. D'abord, la vitesse du point z est la grandeur géométrique représentée par la dérivée z', et l'on a

$$(3) \qquad z' = a' + b'\zeta.$$

Cette vitesse est nulle pour le point C dont l'affixe ζ_c a pour valeur

$$(4) \qquad \zeta_c = -\frac{a'}{b'}.$$

La valeur correspondante de z est

$$(5) \qquad z_c = a + b\zeta_c = \frac{ab' - ba'}{b'};$$

le point C est le centre instantané de rotation, ou *centre de vitesse*. Pour un autre point quelconque de la figure, on peut écrire

$$(6) \qquad z' = b'(\zeta - \zeta_c) = \frac{b'}{b}(z - z_c) = i\theta'(z - z_c).$$

On voit ainsi qu'à un instant donné la vitesse de

chaque point z est perpendiculaire à la ligne joignant ce point au centre instantané, et proportionnelle à la longueur de cette ligne. Autrement dit, il y a rotation élémentaire autour du centre, et la vitesse de rotation est égale à θ'.

Mais, dans le mouvement continu de la figure, le centre instantané se meut à la surface du plan fixe. Sa position au temps t étant déterminée par la valeur de z_c, la vitesse de son déplacement est donnée par z'_c. On tire de l'équation (5), en tenant compte de (4),

$$(7) \qquad z'_c = b\zeta'_c = \frac{b(a'b'' - a''b')}{(b')^2};$$

ζ'_c représente la vitesse du centre par rapport aux axes mobiles, comme z'_c représente la vitesse par rapport aux axes fixes. Le module de b étant égal à l'unité, ces deux vitesses sont égales; l'argument de b étant égal à θ, les deux vitesses ont même direction. Ces résultats se traduisent géométriquement en disant que la courbe, lieu du centre instantané par rapport aux axes mobiles, roule sans glisser sur la courbe, lieu du centre instantané par rapport aux axes fixes. Ces deux courbes sont appelées respectivement la *roulette* ou courbe roulante et la *base du roulement*.

Une courbe quelconque faisant partie de la figure mobile a une équation de la forme

$$(8) \qquad \zeta = f(u),$$

où u désigne un paramètre réel. La même courbe a pour équation, relativement aux axes fixes,

$$(9) \qquad z = a + bf(u).$$

L'élément dz de cette courbe est exprimé par

$$(10) \qquad dz = bf'(u)\,du.$$

Pour avoir l'enveloppe, il suffit de différentier l'équation (9) par rapport au temps t, en considérant u comme fonction de t, ce qui donne

$$(11) \qquad a' + b'f(u) + bf'(u)u' = 0.$$

Entre les équations (9) et (11), éliminons $f(u)$. Il vient

$$z = \frac{ab' - a'b}{b'} - \frac{b^2}{b'}f'(u)u',$$

ou bien

$$z - z_c = -\frac{b^2}{b'}f'(u)u',$$

ou encore, en vertu de l'équation (10),

$$\frac{dz}{z - z_c} = -\frac{b'}{b}dt = -i\theta' dt.$$

Le second membre étant purement imaginaire, on voit qu'en chaque point de contact de la courbe avec son enveloppe, la tangente, qui a même direction que dz, est perpendiculaire à la droite $z - z_c$, propriété qui permet de construire ce point de contact.

L'accélération z'' d'un point quelconque est déterminée par l'équation

$$(12) \qquad z'' = a'' + b''\zeta.$$

Elle s'annule pour le point J dont l'affixe ζ_j vérifie l'équation

$$(13) \qquad a'' + b''\zeta_j = 0.$$

La valeur correspondante z_j de z est

$$(14) \qquad z_j = a + b\zeta_j = \frac{ab'' - ba''}{b''};$$

J est le *centre d'accélération*. Pour un autre point quel-

conque, on a

$$(15)\qquad z'' = b''(\zeta - \zeta_j) = \frac{b''}{b}(z - z_j) = [i\theta'' - (\theta')^2](z - z_j).$$

Il résulte de là que, pour un instant donné, l'accélération d'un point quelconque est proportionnelle à la distance r de ce point au centre d'accélération, et fait avec la ligne joignant les deux points un angle ayant pour tangente $\frac{\theta''}{(\theta')^2}$. La grandeur de l'accélération est

$$r\sqrt{(\theta'')^2 + (\theta')^4}.$$

L'accélération peut aussi s'exprimer en fonction de la vitesse. On a

$$(16)\qquad z'' = \frac{b''}{b'}(z' - z'_j) = \frac{\theta'' + i(\theta')^3}{\theta'}(z' - z'_j).$$

L'accélération est donc proportionnelle à la vitesse relative du point considéré par rapport au centre d'accélération, et fait avec elle un angle constant.

La combinaison des équations (5), (7) et (14) conduit à la suivante

$$(17)\qquad z'_c = \frac{b''}{b'}(z_j - z_c),$$

d'après laquelle la vitesse de déplacement du centre instantané forme, avec la ligne joignant ce point au centre d'accélération, un angle égal à l'argument de $\frac{b''}{b'}$.

Le lieu des points pour lesquels l'accélération est tangentielle s'obtient en écrivant que l'accélération a même direction que la vitesse, ou, ce qui revient au même, en égalant à zéro l'argument de $\frac{z''}{z'}$. On trouve ainsi

$$\arg.\frac{z - z_j}{z - z_c} + \arg.\frac{b''}{b'} = 0.$$

Cette expression exprime que le segment $z_j z_c$ est vu du point z sous un angle constant; le lieu est donc une circonférence passant par les points z_j et z_c : c'est la *circonférence des inflexions*. Si l'on suppose que z tende vers z_c, l'argument de $z - z_c$ a pour limite

$$\text{arg.}(z_c - z_j) + \text{arg.}\,\frac{b''}{b'},$$

ou bien

$$\pi + \text{arg.}(z_j - z_c) + \text{arg.}\,\frac{b''}{b'},$$

c'est-à-dire, en vertu de l'équation (11),

$$\pi + \text{arg.}\,z'_c.$$

La circonférence des inflexions a donc pour tangente, au point z_c, la direction de z'_c.

Le lieu des points pour lesquels l'accélération est normale s'obtient de même en égalant à $\frac{\pi}{2}$ l'argument de $\frac{z''}{z'}$. On trouve encore une circonférence passant par les points z_c, z_j, et l'on constate que les deux circonférences se coupent orthogonalement.

La théorie des accélérations d'ordre quelconque s'établit avec la même facilité. Bornons-nous à dire que le centre des accélérations d'ordre n a pour affixe z_n la quantité $\frac{ab^{(n)} - ba^{(n)}}{b^{(n)}}$, et que l'accélération d'ordre n d'un point z quelconque est égale à $\frac{b^{(n)}}{b}(z - z_n)$.

Les résultats qui précédent subsistent en grande partie quand la figure considérée se déplace en changeant de dimensions, mais en restant semblable à elle-même. Un pareil mouvement peut toujours être représenté par l'équation $z = a + b\zeta$, avec cette seule modification que le module de b devient différent de l'unité.

En effet, on voit d'abord que, si z et ζ sont les affixes

de deux points différents d'un même plan, le lieu du point z est semblable à celui du point ζ, car la multiplication de ζ par b revient à faire varier dans un rapport donné le rayon vecteur issu de l'origine et à faire tourner ce rayon d'un angle donné, puis l'addition de a imprime à la figure un simple mouvement de translation. On voit en outre que toute figure semblable à la figure (ζ) peut être représentée par l'équation précédente, car on peut choisir a et b de telle façon qu'à deux points ζ_1 et ζ_2 de la figure initiale correspondent deux points arbitrairement choisis z_1 et z_2 de la seconde figure. L'équation $z = a + b\zeta$ est donc apte à représenter dans le plan toutes les figures semblables à une figure donnée, et il suffit de faire varier a et b en fonction du temps, en laissant ζ indépendant du temps, pour représenter tous les mouvements possibles d'une figure assujettie à rester semblable à elle-même.

Cela posé, il y a encore un centre de vitesse, défini par l'équation $z_c = \frac{ab' - ba'}{b'}$, et la vitesse d'un point quelconque z, proportionnelle à sa distance au centre, fait avec le rayon vecteur issu du centre un angle égal à l'argument de $\frac{b'}{b}$. Il y a également un centre d'accélération, une circonférence des inflexions, une circonférence des accélérations normales, etc.

Voici maintenant quelques exemples de problèmes faciles à traiter par l'emploi des variables imaginaires. Nous nous bornerons, pour simplifier, au cas d'une figure de grandeur invariable.

1. *Trouver les déplacements dans lesquels le mouvement de* J *est semblable à celui de* C.

En plaçant convenablement l'origine et appelant m

une constante, réelle ou imaginaire, on doit avoir

$$z_j = m z_c,$$

d'où

$$\frac{ab'' - ba''}{ab' - ba'} = m \frac{b''}{b'}.$$

En intégrant et appelant K une nouvelle constante, il vient

$$ab' - ba' = \mathrm{K}(b')^m,$$

ou bien

$$z_c = \mathrm{K}(b')^{m-1}.$$

En faisant au besoin tourner l'axe des x et choisissant convenablement l'unité de temps, on peut rendre la constante K égale à l'unité. L'équation $z_c = (b')^{m-1}$ fait alors connaître la base du roulement. La courbe roulante est donnée par les deux équations

$$a + b\zeta_c = (b')^{m-1},$$
$$a' + b'\zeta_c = 0;$$

d'où, en éliminant a,

$$b\zeta'_c = (m-1)(b')^{m-2} b'',$$

et par suite

$$\zeta_c = (m-1)\int \frac{(b')^{m-2} b''}{b} dt = \frac{(b')^{m-1}}{b} + \int \frac{(b')^m dt}{b^2}.$$

L'argument de b reste arbitraire. Si l'on appelle ω la vitesse de rotation, cet argument est égal à ωt. Le module de b' est égal à ω, et comme on a les relations

$$z_j - z_c = (m-1) z_c = (m-1)(b')^{m-1},$$

on arrive à cette conséquence :

La vitesse de rotation est proportionnelle à la racine $(m-1)^{\text{ième}}$ *de la distance des deux centres* J *et* C.

Dans le cas où la vitesse de rotation est constante, la valeur de ζ_c peut être intégrée complètement, et l'on

trouve

$$\zeta_c = \frac{m-1}{m-2}(i\omega)^{m-1} e^{(m-2)i\omega t};$$

on a d'ailleurs

$$z_c = (i\omega)^{m-1} e^{(m-1)i\omega t}.$$

Partant de là, soient p la partie réelle et iq la partie imaginaire de m, et soient A, B deux constantes qui dépendent de p, q, ω. Un calcul sans difficulté conduit, pour la courbe roulante et pour la base du roulement, rapportées, chacune dans le plan qui lui est lié, à des coordonnées polaires, aux deux équations

$$\rho = \text{A} e^{\frac{q}{2-p}\theta},$$

$$\rho = \text{B} e^{\frac{q}{1-p}\theta}.$$

Le mouvement est donc produit par le roulement d'une spirale logarithmique sur une autre. Les deux courbes ne peuvent devenir égales que si q est nul, mais alors elles se réduisent à deux circonférences.

Le cas où les deux centres coïncident rentre dans le précédent, en faisant $m = 1$. On voit immédiatement que z_c est alors constant, ainsi que ζ_c; le mouvement consiste dans une simple rotation autour d'un point fixe.

Si l'on veut simplement que le centre d'accélération reste fixe, on peut le prendre pour origine, ce qui revient à faire $m = 0$, et l'on trouve

$$z_c = \frac{1}{b'}.$$

Dans ce cas, la vitesse de rotation est inversement proportionnelle à la distance des deux centres. En outre, si θ désigne l'argument de b et φ celui de z_c, la somme $\theta + \varphi$ est constante, et la valeur de $\theta' + \varphi'$ est nulle.

Par suite, le rayon vecteur JC tourne en sens inverse du système mobile, avec une vitesse angulaire égale en valeur absolue. Quand cette vitesse angulaire ω est constante, le point C décrit autour du point J un cercle ayant pour rayon $\frac{1}{\omega}$. D'autre part, on a pour ζ_c l'expression

$$\zeta_c = \frac{1}{2i\omega} e^{-2i\omega t},$$

ce qui représente une circonférence ayant pour rayon $\frac{1}{2\omega}$. Le mouvement est donc celui d'une circonférence roulant sur une circonférence de rayon double. Il est clair qu'il s'agit ici d'un roulement intérieur.

2. *Trouver les déplacements tels que la ligne* JC *conservé une grandeur et une direction constantes.*

On doit alors poser $z_j - z_c = \mathrm{K}$, ou bien, en tenant compte de l'équation (17), $\frac{b'}{b''} z'_c = \mathrm{K}$. En intégrant, il vient

$$z_c = \mathrm{K} \log b' + \mathrm{K}_1.$$

La constante d'intégration K_1 peut être annulée par un changement d'origine. La constante K peut, comme précédemment, être rendue égale à l'unité. Nous écrirons donc $z_c = \mathrm{K} \log b'$: c'est l'équation de la base du roulement.

Remplaçant z_c par sa valeur (5), nous avons

$$\frac{ab' - ba'}{b'} = \log b',$$

d'où, par une nouvelle intégration,

$$a = -b \int \frac{b' \log b'}{b^2} dt,$$

et, par suite,

$$a' = -b'\int \frac{b''}{bb'}\,dt.$$

On déduit de là la valeur de ζ_c

$$\zeta_c = -\frac{a'}{b'} = \int \frac{b''}{bb'}\,dt,$$

équation qui détermine la courbe roulante.

Quand on suppose la rotation uniforme, on a

$$z_c = \log(i\omega) + i\omega t$$

et

$$\zeta_c = \int \frac{-\omega^2 e^{i\omega t}}{i\omega e^{2i\omega t}}\,dt = -e^{-i\omega t}.$$

La base est alors une ligne droite, et la courbe roulante devient une circonférence.

3. *Trouver les déplacements tels que le centre d'accélération se meuve suivant une loi donnée.*

z_j est ici une fonction connue du temps. Pour déterminer z_c, on se servira de la formule (17), qui donne, par une intégration facile,

$$z_c = \frac{1}{b'}\int b'' z_j\,dt.$$

On a ensuite

$$ab' - ba' = b' z_c,$$

d'où

$$\frac{a}{b} = -\int \frac{b' z_c}{b^2}\,dt = -\int \frac{dt}{b^2}\int b'' z_j\,dt;$$

puis

$$a' = -b'\int \frac{dt}{b^2}\int b'' z_j\,dt - \frac{1}{b}\int b'' z_j\,dt,$$

$$\zeta_c = -\frac{a'}{b'} = \int \frac{dt}{b^2}\int b'' z_j\,dt + \frac{1}{bb'}\int b'' z_j\,dt;$$

l'argument de b reste arbitraire.

Supposons, par exemple, que z_j soit un polynôme en

t, $F(t)$, auquel cas J décrit une courbe unicursale, et que de plus la vitesse angulaire ω de rotation soit constante. Nous pouvons écrire

$$\int b'' z_j \, dt = -\omega^2 \int e^{i\omega t} F(t) \, dt = -\omega^2 e^{i\omega t} \varphi(t),$$

$\varphi(t)$ désignant un autre polynôme.

Alors

$$z_c = i\omega \varphi(t)$$

et

$$\zeta_c = -\omega^2 \int e^{-i\omega t} \varphi(t) \, dt + i\omega e^{-i\omega t} \varphi(t) = e^{-i\omega t} \psi(t)$$
$$= e^{-i\omega t}[\psi_1(t) + i\psi_2(t)],$$

$\psi(t)$ étant un troisième polynôme dont ψ_1 et ψ_2 sont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire.

Dans le plan fixe, le point C décrit, comme le point J, une courbe unicursale. La courbe mobile est représentée, en coordonnées cartésiennes dans le plan mobile, par les équations

$$\xi = \psi_1(t) \cos \omega t + \psi_2(t) \sin \omega t,$$
$$\eta = -\psi_1(t) \sin \omega t + \psi_2(t) \cos \omega t.$$

En particulier, si l'on prend

$$F(t) = \frac{\omega^2 t^2}{2} - i\omega t,$$

le point J décrit une parabole. Le polynôme $\varphi(t)$ est lié à $F(t)$ par la relation générale

$$\varphi'(t) + i\omega \varphi(t) = F(t)$$

qui devient ici

$$\varphi'(t) + i\omega \varphi(t) = -i\omega t + \frac{\omega^2 t^2}{2},$$

et l'on aperçoit immédiatement la solution

$$\varphi(t) = -\frac{i\omega t^2}{2}.$$

De même, le polynôme $\psi(t)$ est lié à $\varphi(t)$ par la relation générale

$$\psi'(t) - i\omega\,\psi(t) = i\omega\,\varphi'(t),$$

qui se réduit à

$$\psi'(t) - i\omega\,\psi(t) = \omega^2 t,$$

d'où la solution

$$\psi(t) = 1 + i\omega t.$$

Dans ces conditions, la base du roulement a pour équation

$$z_c = \frac{\omega^2 t^2}{2}:$$

c'est l'axe de la parabole parcouru par le point C avec un mouvement uniformément accéléré.

La courbe roulante est déterminée par les deux équations

$$\xi = \cos\omega t + \omega t \sin\omega t,$$
$$\eta = -\sin\omega t + \omega t \cos\omega t:$$

c'est une développante de cercle. Le rayon de celui-ci est égal à l'unité, c'est-à-dire au paramètre de la parabole. On parvient ainsi à la proposition suivante, dont la vérification directe est bien facile :

Étant donnée une parabole, si l'on fait rouler sur son axe avec une vitesse angulaire constante la développante d'un cercle ayant un rayon égal au paramètre de la parabole, le point de contact, parti du sommet avec une vitesse nulle, parcourt l'axe d'un mouvement uniformément accéléré, et le centre d'accélération, toujours situé sur l'ordonnée du point de contact, décrit la parabole.

NOTE SUR LES SURFACES DE RÉVOLUTION APPLICABLES SUR UNE SURFACE DE RÉVOLUTION DONNÉE, ET PLUS GÉNÉRALEMENT SUR LES SURFACES DONT LES LIGNES DE COURBURE D'UNE FAMILLE SONT SITUÉES DANS DES PLANS PARALLÈLES ET QUI SONT APPLICABLES SUR UNE SURFACE DE MÊME NATURE;

PAR M. A. ADAM,
Ingénieur, ancien élève de l'École des Ponts et Chaussées,
Docteur ès Sciences.

On sait trouver les surfaces de révolution applicables sur une surface de révolution donnée, mais nous ne croyons pas qu'on ait fait sur ces surfaces la remarque suivante :

Quand on déforme une surface de révolution en lui conservant son caractère, la forme que prend le méridien est indépendante de sa distance à l'axe de révolution.

Cette remarque ressort très simplement des équations des surfaces de révolution applicables sur une surface de révolution donnée.

En effet, les équations de toute surface de révolution peuvent s'écrire, en employant les coordonnées curvilignes u et v de Gauss,

$$x = \mathrm{U}\cos v,$$
$$y = \mathrm{U}\sin v,$$
$$z = \int \sqrt{1 - \mathrm{U}'^2}\, du,$$

U étant une certaine fonction de u.

L'axe des z est alors l'axe de révolution de la surface et les lignes $u =$ const. et $v =$ const. représentent respectivement les parallèles et les méridiens.

Les équations des surfaces de révolution applicables sur la proposée sont, d'autre part,

$$x = a\,\mathrm{U} \cos \frac{v}{a},$$

$$y = a\,\mathrm{U} \sin \frac{v}{a},$$

$$z = \int \sqrt{1 - a^2 \mathrm{U}'^2}\, du,$$

a étant une constante arbitraire.

Les équations

$$r = \mathrm{U},$$

$$z = \int \sqrt{1 - \mathrm{U}'^2}\, du$$

de la méridienne primitive deviennent donc

$$(1) \qquad \begin{cases} r = a\,\mathrm{U}, \\ z = \int \sqrt{1 - a^2 \mathrm{U}'^2}\, du, \end{cases}$$

pour la méridienne déformée.

Changeons d'une quantité b la distance de la méridienne primitive à l'axe de révolution, c'est-à-dire remplaçons dans les équations ci-dessus U par $\mathrm{U} + b$; les équations (1) de la méridienne déformée deviendront

$$(2) \qquad \begin{cases} r = a\,\mathrm{U} + ab, \\ z = \int \sqrt{1 - a^2 \mathrm{U}'^2}\, du, \end{cases}$$

et l'on voit que cette méridienne (2) n'est autre chose que la méridienne (1) dont la distance à l'axe de révolution aurait varié de la quantité ab.

Comme exemple, considérons une sphère de rayon r

et un tore dont le méridien soit un cercle de rayon égal aussi à r :

Si l'on déforme le tore et la sphère de manière que ces surfaces demeurent de révolution, les méridiens successifs de la première surface sont les méridiens successifs de la seconde.

La remarque que nous venons de faire est susceptible de généralisation en considérant les surfaces dont toutes les lignes de courbure d'une famille sont dans des plans parallèles.

Monge, qui a découvert ces surfaces, les définit de la manière suivante dans son *Application de l'Analyse à la Géométrie :*

Si, sur un cylindre à base quelonque, on pousse une moulure d'un profil quelconque, mais constant, perpendiculairement à la génératrice, la surface de cette moulure sera la surface demandée.

On peut aussi les regarder comme engendrées par une courbe plane quelconque dont le plan roule sur un cylindre quelconque.

Avec les variables u et v de Gauss, les équations de ces surfaces peuvent s'écrire

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= \mathrm{U} \cos v + \mathrm{V}, \\ y &= \mathrm{U} \sin v + \mathrm{V}_1, \\ z &= \int \sqrt{1 - \mathrm{U}'^2}\, du, \end{aligned} \right.$$

U désignant une fonction de u, et V, V_1 deux fonctions de v assujetties à la condition

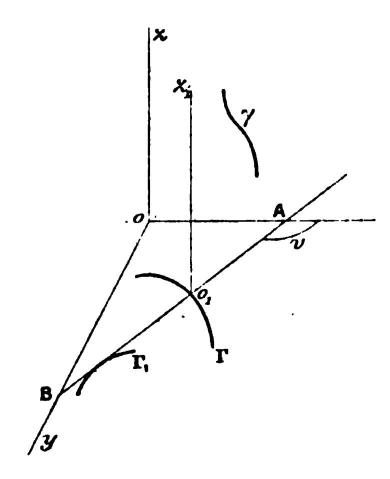
$$(4) \qquad \mathrm{V}' + \mathrm{V}'_1 \operatorname{tang} v = 0.$$

En effet, toute courbe $v =$ const. de la surface (3) est

située dans un plan

$$\frac{x - V}{\cos \nu} = \frac{y - V_1}{\sin \nu},$$

parallèle à oz, dont la trace AB sur le plan xoy fait avec ox l'angle ν et passe par le point o_1 ayant pour coordonnées $x = V$, $y = V_1$. Ce point o_1 décrit dans le plan xoy



une courbe Γ quelconque, à laquelle, en vertu de la relation (4), la droite AB demeure normale; par suite, AB roule sur une courbe Γ_1, quand o_1 décrit la courbe Γ.

On reconnaît d'ailleurs sans peine que la courbe $\nu =$ const. a pour équations, dans son plan $x_1 o_1 z_1$,

$$(5) \qquad \begin{cases} x_1 = U, \\ z_1 = z = \int \sqrt{1 - U'^2}\, du; \end{cases}$$

cette courbe γ est donc invariable et fixe par rapport aux axes $o_1 x_1$, $o_1 z_1$.

Il résulte bien de tout cela :

1° Que le plan de γ roule sur un cylindre C_1 paral-

lèle à oz et de base quelconque Γ_1 pendant la génération de la surface;

2° Que la surface est aussi une moulure de profil constant γ poussée sur un cylindre C parallèle à oz et de base quelconque Γ.

Cela posé, admettons qu'on puisse déformer la surface considérée de façon qu'en lui conservant son caractère, les courbes $v =$ const. continuent d'être les génératrices.

Pour avoir les équations de la nouvelle surface, il faudra, dans (3) et (4), remplacer $U(u)$, $V(v)$, $V_1(v)$ par certaines fonctions $U_1(u_1)$, $T(v_1)$, $T_1(v_1)$; u_1 et v_1, qui doivent rester constants respectivement avec u et v, étant certaines fonctions $u_1 = f(u)$, $v_1 = \varphi(v)$.

Le ds^2 de la surface (3), qui avait pour expression, en vertu de la condition (4),

$$ds^2 = du^2 + \left(U - \frac{V'}{\sin v}\right)^2 dv^2,$$

deviendra donc

$$ds^2 = f'^2(u)\,du^2 + \left(U_1 - \frac{T'}{\sin v_1}\right) \varphi'^2(v)\,dv^2.$$

Identifiant ces deux ds^2, il vient

$$f'(u) = 1 \qquad \text{d'où} \qquad u_1 = u,$$

et

$$(6) \qquad U - \frac{V'}{\sin v} = \left(U_1 - \frac{T'}{\sin v_1}\right)\varphi'(v).$$

Cette dernière équation, différentiée par rapport à u, donne

$$U' = U'_1\,\varphi'(v),$$

d'où

$$\frac{U'_1}{U'} = \frac{1}{\varphi'(v)} = \text{une const. } a,$$

$$\varphi(v) = v_1 = \frac{v}{a} \qquad \text{et} \qquad U_1 = aU + b.$$

Les équations (4) et (6) donnent enfin pour T et T_1

les expressions

$$T = \int \frac{V' \sin \frac{v}{a}}{\sin v} dv - b \cos \frac{v}{a},$$

$$T_1 = \int \frac{V'_1 \cos \frac{v}{a}}{\cos v} dv - b \sin \frac{v}{a}.$$

Les équations de la surface déformée sont donc

$$x = a U \cos \frac{v}{a} + \int \frac{V' \sin \frac{v}{a}}{\sin v} dv,$$

$$y = a U \sin \frac{v}{a} + \int \frac{V'_1 \cos \frac{v}{a}}{\cos v} dv,$$

$$z = \int \sqrt{1 - a^2 U'^2}\, du.$$

Par suite, les équations (5) de la génératrice primitive γ deviennent, après la déformation,

$$x_1 = a U,$$

$$z_1 = \int \sqrt{1 - a^2 U'^2}\, du;$$

ce qui signifie que :

La génératrice primitive s'est déformée de la même façon que si elle eût été le méridien d'une surface de révolution d'axe parallèle à oz, et cela quelle que soit la directrice Γ.

Par exemple :

Si l'on prend une surface canal de rayon r, dont l'axe soit une courbe plane quelconque, et si on la déforme comme il est dit plus haut, ses génératrices successives seront des courbes égales aux méridiens des surfaces de révolution applicables sur une sphère de rayon r.

FORMULE DES DIFFÉRENCES ET FORMULE DE TAYLOR;

PAR M. E. CARVALLO,
Examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

I. *Formule des différences.* — Je considère la fonction $u = f(x)$, et je donne à la variable x les valeurs équidistantes x, $x + \Delta x$, $x + 2\Delta x$, ..., $x + n\Delta x$. On a, pour les valeurs de la fonction et ses différences successives, le tableau

$$\begin{array}{cccccc} u_0 & \Delta u_0 & \Delta^2 u_0 & \dots & \Delta^p u_0 & \dots \\ u_1 & \Delta u_1 & \Delta^2 u_1 & \dots & \Delta_p u_1 & \\ u_2 & \Delta u_2 & \Delta^2 u_2 & \dots & \dots & \\ .. & \dots & \dots & & & \\ u_{n-1} & \Delta u_{n-1} & & & & \\ u_n & & & & & \end{array}$$

La formule que je veux signaler donne u_n en fonction des nombres de la première ligne, jusqu'à la colonne des Δ^p et des nombres de cette colonne des Δ^p. C'est

$$u_n = u_0 + C_n^1 \Delta u_0 + C_n^2 \Delta^2 u_0 + \ldots + C_n^{p-1} \Delta^{p-1} u_0 + Q_p,$$

avec

$$Q_p = C_{n-1}^{p-1} \Delta^p u_0 + C_{n-2}^{p-1} \Delta^p u_1 + \ldots + C_{p-1}^{p-1} \Delta^p u_{n-p}.$$

Pour $p = 1$, on doit la remplacer par la formule évidente

$$(1) \quad u_n = u_0 + \Delta u_0 + \Delta u_1 + \Delta u_2 + \ldots + \Delta u_{n-1} = u_0 + Q_1.$$

Pour passer de $p = 1$ à $p = 2$, je multiplie les deux membres de l'égalité (1) par Δ, ce qui revient à avancer d'une colonne vers la droite dans le tableau des différences; dans la formule obtenue, je remplace n successivement par les nombres 0, 1, 2, ..., $n - 1$ et j'ajoute;

j'obtiens

$$Q_1 = C_n^1 \Delta u_0 + C_{n-1}^1 \Delta^2 u_0 + C_{n-2}^1 \Delta^2 u_1 + \ldots + C_1^1 \Delta^2 u_{n-2},$$

et, en portant cette valeur de Q_1 dans l'égalité (1),

$$(2) \quad \begin{cases} u_n = u_0 + C_n^1 \Delta u_0 + Q_2, \\ \text{avec} \\ Q_2 = C_{n-1}^1 \Delta^2 u_0 + C_{n-2}^1 \Delta^2 u_1 + \ldots + C_1^1 \Delta^2 u_{n-2}. \end{cases}$$

De même pour évaluer Q_2 au moyen de $\Delta^2 u_0$ et des différences troisièmes, je multiplie les deux membres de la formule (1) par Δ^2 et je remplace successivement n par $0, 1, 2, \ldots, n-2$. Pour avoir Q_2, il suffit de multiplier les deux membres des égalités obtenues respectivement par C_{n-1}^1, C_{n-2}^1, ..., C_1^1 et d'ajouter. On trouve ainsi

$$Q_2 = C_n^2 \Delta^2 u_0 + C_{n-1}^2 \Delta^3 u_0 + C_{n-2}^2 \Delta^3 u_1 + \ldots + C_2^2 \Delta^3 u_{n-3},$$

et, en portant cette valeur de Q_2 dans l'égalité (2),

$$(3) \quad \begin{cases} u_n = u_0 + C_n^1 \Delta u_0 + C_n^2 \Delta^2 u_0 + Q_3, \\ \text{avec} \\ Q_3 = C_{n-1}^2 \Delta^3 u_0 + C_{n-2}^2 \Delta^3 u_1 + \ldots + C_2^2 \Delta^3 u_{n-3}. \end{cases}$$

Par la même méthode, on passe d'une valeur de p à la suivante. On a donc bien la formule annoncée.

II. *Formule de Taylor.* — Je pose

$$n \Delta x = h, \qquad u_n = f(x+h), \qquad u_0 = f(x),$$

et, pour simplifier l'écriture, je considère la formule (3) qui correspond à $p = 3$. Elle peut s'écrire

$$(3') \quad \begin{cases} f(x+h) = f(x) + \dfrac{n}{1} \Delta x \dfrac{\Delta u_0}{\Delta x} + \dfrac{n(n-1)}{1.2} \Delta x^2 \dfrac{\Delta^2 u_0}{\Delta x^2} + Q_3, \\ \text{avec} \\ Q_3 = \Delta x^3 \left(C_{n-1}^2 \dfrac{\Delta^3 u_0}{\Delta x^3} + C_{n-2}^2 \dfrac{\Delta^3 u_1}{\Delta x^3} + \ldots + C_2^2 \dfrac{\Delta^3 u_{n-3}}{\Delta x^3} \right). \end{cases}$$

Je fais maintenant tendre Δx vers o, en laissant fixe le produit $n\,\Delta x = h$, et je suppose que les rapports $\frac{\Delta u_0}{\Delta x}$, $\frac{\Delta^2 u_0}{\Delta x^2}$ ont des limites que je désigne par $\frac{du_0}{dx} = f'(x)$, $\frac{d^2 u_0}{dx^2} = f''(x)$ [1]. De la formule (3′) elle-même, résulte que Q_3 a aussi une limite et que l'on a, en désignant cette limite par R_3,

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + R_3:$$

c'est la formule de Taylor.

L'expression de Q_3 dans la formule (3′) fournit intuitivement les diverses formes qu'on peut donner au reste.

a. On peut regarder les diverses valeurs de $\frac{\Delta^3 u}{\Delta x^3}$ comme affectées des poids $C_{n-1}^2, C_{n-2}^2, \ldots, C_2^2$ dont la somme est C_n^3. On peut alors écrire

$$Q_3 = C_n^3 \Delta x^3 \frac{C_{n-1}^2 \frac{\Delta^3 u_0}{\Delta x^3} + C_{n-2}^2 \frac{\Delta^3 u_1}{\Delta x^3} + \ldots + C_2^2 \frac{\Delta^3 u_{n-3}}{\Delta x^3}}{C_n^3}$$
$$= \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \Delta x^3 . \operatorname{moy} \frac{\Delta^3 u}{\Delta x^3}.$$

Si l'on fait tendre Δx vers o, on sait que Q_3 a une limite R_3, cette formule montre alors que moy $\frac{\Delta^3 u}{\Delta x^3}$ a une limite, et cela sans faire aucune hypothèse sur l'existence même de la dérivée troisième. En désignant cette limite par $\left(\frac{d^3 u}{dx^3}\right)_m$, on a

$$(a) \qquad R_3 = \frac{h^3}{1.2.3}\left(\frac{d^3 u}{dx^3}\right)_m.$$

---

[1] Ces limites pourraient servir de définition aux dérivées des divers ordres; la notation différentielle n'en serait que plus intuitive. Il en résulterait avec évidence la formule $\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{d}{dx}\frac{d}{dx} u$.

Cette formule peut remplacer la formule de Lagrange

$$R_3 = \frac{h^3}{1.2.3} f'''(x+\theta h),$$

qui est équivalente à la précédente dans les conditions bien connues où on a l'habitude d'établir la formule de Taylor par la méthode de M. Rouché; dans ces conditions, il serait sans doute malaisé de transformer directement la première formule dans la deuxième. La transformation devient facile si l'on suppose qu'à chaque nombre ε on peut faire correspondre un nombre η tel que l'on ait

$$\left|\frac{\Delta^3 u}{\Delta x^3} - \frac{d^3 u}{dx^3}\right| < \varepsilon, \quad \text{toutes les fois que} \quad |\Delta x| < \eta,$$

et pour toutes les valeurs de x et de $x + \Delta x$ comprises entre x et $x + h$. Je ne m'arrêterai pas sur ces difficultés dont l'étude est très loin du but que je me propose ici.

b. Je considère un terme quelconque de Q_3 dans la formule (3'), savoir

$$K = C^2_{n-k-1}.\Delta x^3 \frac{\Delta^3 u_k}{\Delta x^3} = \frac{(n-k-1)(n-k-2)}{1.2} \Delta x^3 \frac{\Delta^3 u_k}{\Delta x^3}.$$

Je remplace n par sa valeur $\frac{h}{\Delta x}$; K prend la forme

$$K = \frac{1}{1.2}[h-(k+1)\Delta x][h-(k+2)\Delta x].\Delta x \frac{\Delta^3 u_k}{\Delta x^3}.$$

Enfin je pose

$$x + k\Delta x = z, \qquad u_k = f(z), \qquad \Delta x = \Delta z;$$

j'obtiens

$$K = \frac{1}{1.2}(x+h-z-\Delta x)(x+h-z-2\Delta x)\frac{\Delta^3 f(z)}{\Delta z^3}\Delta z,$$

et par suite, en faisant tendre $\Delta z = \Delta x$ vers o,

$$(b) \qquad R_3 = \frac{1}{1.2}\int_x^{x+h} (x+h-z)^2 f'''(z)\,dz.$$

c. Si l'on imagine le tableau des différences prolongé vers la gauche, en mettant des zéros sur toute la première ligne, on aura, en multipliant par Δ^{-2} les deux membres de la formule (3),

$$\Delta^{-3} u_n = C_{n-1}^2 u_0 + C_{n-2}^2 u_1 + \ldots + C_2^2 u_{n-3}.$$

On a de même

$$\Delta^{-1} u_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1},$$

d'où l'on tire

$$\frac{\Delta^{-1} u_n}{\Delta x^{-1}} = u_0 \Delta x + u_1 \Delta x + \ldots + u_{n-1} \Delta x.$$

Je fais tendre Δx vers o et je suppose que le second membre ait une limite que je désigne par

$$\frac{d^{-1} u_n}{dx^{-1}} = \int_x^{x+h} f(z)\, dz,$$

on aura

$$\lim \frac{\Delta^{-1} u_n}{\Delta x^{-1}} = \frac{d^{-1} u_n}{dx^{-1}} = \int_x^{x+h} f(z)\, dz.$$

Comme on a, d'autre part,

$$\Delta^{-3} = \Delta^{-1}.\Delta^{-1}.\Delta^{-1}, \qquad \frac{\Delta^{-3}}{\Delta x^3} = \frac{\Delta^{-1}}{\Delta x} \frac{\Delta^{-1}}{\Delta x} \frac{\Delta^{-1}}{\Delta x},$$

on en conclut, en supposant que chaque opération $\frac{\Delta^{-1}}{\Delta x}$ conduise à une limite,

$$\frac{d^{-3}}{dx^3} = \frac{d^{-1}}{dx} \frac{d^{-1}}{dx} \frac{d^{-1}}{dx}.$$

D'après cela, l'expression de Q_3 prend la forme

$$Q_3 = \frac{\Delta^{-3}}{\Delta x^{-3}} \left(\frac{\Delta^3 u_{n-3}}{\Delta x^3} \right) = \frac{\Delta^{-1}}{\Delta x} \frac{\Delta^{-1}}{\Delta x} \frac{\Delta^{-1}}{\Delta x} \frac{\Delta^3 u_{n-3}}{\Delta x^3},$$

et conduit à la valeur limite

$$(c) \qquad R_3 = \int_x^{x+h} dz \int_x^z dz \int_x^z f'''(z)\, dz.$$

III. *Remarques.* — En combinant les deux dernières méthodes de toutes les façons possibles, on obtiendra p expressions du reste R_p, le nombre des intégrations étant respectivement $1, 2, \ldots, p$. La première fournit facilement l'expression de Lagrange et la dernière celle de Cauchy. Enfin on retrouve la formule de Taylor en partant des expressions mêmes du reste, pour la première (b) en intégrant par parties, pour la dernière (c) en effectuant les intégrations successives.

Je pense avoir suffisamment montré quels avantages l'enseignement pourrait tirer d'une méthode d'exposition où les principes du Calcul différentiel et intégral seraient basés sur le calcul des différences. Celui-ci, s'occupant des quantités finies, est pratique et appartient à l'Algèbre élémentaire; celui-là, s'occupant des limites, rentre dans l'Analyse. Mais le lien est bien évident, le Calcul différentiel et intégral est en quelque sorte la limite du calcul des différences. Il serait peut-être bon de mettre ce fait en évidence, au moins dans une première exposition. On a vu combien les définitions arrivent intuitivement. La démonstration que j'ai exposée de la formule de Taylor met bien en évidence son caractère de simple *identité*.

INTERSECTION D'UNE DROITE AVEC UN HYPERBOLOIDE DE RÉVOLUTION;

Par M. S. RAVIER,
Élève du lycée Condorcet.

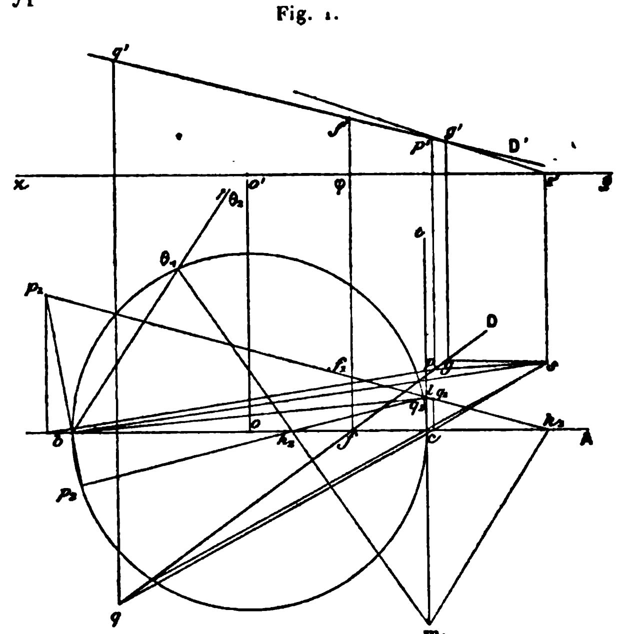
Premier cas. — *La projection de la droite sur le plan du cercle de gorge rencontre ce cercle.*

Soit (o, o') (*fig.* 1) le centre du cercle de gorge, et

(D, D′) la droite. Menons, par la verticale *o*, un plan arbitraire *o*A (dans la figure il est de front, mais cela n'est pas nécessaire).

Ce plan *o*A coupe l'hyperboloïde suivant une hyperbole ayant pour sommets *b* et *c*, et dont l'angle des asymptotes est l'angle au sommet du cône asymptote de l'hyperboloïde.

Fig. 1.



Cette hyperbole, et l'hyperbole de section de l'hyperboloïde par le plan vertical D, déterminent deux cônes. On a construit le sommet (s, s') de l'un d'eux.

Nous sommes amenés à trouver l'intersection de la droite (D, D′) avec le cône correspondant.

Projetons, de (s, s'), la droite (D, D′) sur le plan vertical *o*A, puis rabattons ce plan autour de l'horizontale *o*A sur le plan du cercle de gorge [sur la figure, les deux

points de D pour lesquels on a effectué ce rabattement sont : 1° le point de rencontre (f, f') de (D, D') avec le plan vertical oA ; il se rabat en f_1 tel que $ff_1 = \varphi f'$; 2° le point à l'infini de (D, D') qui donne la direction $s'g'$ du rabattement $f_1 k_1$].

Nous sommes amenés à chercher les points de rencontre d'une droite $f_1 k_1$ et d'une hyperbole dont on connaît les sommets b, c et l'angle des asymptotes.

Pour cela, on remarque que le cercle de gorge et l'hyperbole sont homologiques, b étant le centre d'homologie, et la tangente en c l'axe. D'ailleurs, pour avoir deux points homologues, il suffit de mener par b une parallèle à l'une des asymptotes (dans la figure, elle est parallèle à l'une des génératrices de contour apparent du cône asymptote; quelle que soit, du reste, la disposition de l'épure, elle fait avec bc un angle connu). Le second point de rencontre θ_1 de cette droite avec le cercle de gorge, et le point à l'infini sur elle, θ_2, sont homologues. Alors on applique une construction connue pour obtenir l'homologue lk_2 de la droite $f_1 lk_1$. On prend les points de rencontre p_2, q_2 de lk_2 avec le cercle de gorge. On construit leurs homologues p_1, q_1 sur $f_1 lk_1$, on relève ces homologues sur (D, D'); (p, p') et (q, q') sont les points de rencontre cherchés.

Remarquons qu'aucune des constructions que nous avons effectuées n'était nécessaire, et qu'on pourra toujours les modifier de manière à les amener dans les limites de l'épure. Remarquons aussi que nous n'avons eu besoin de tracer aucun cercle autre que le cercle de gorge.

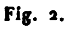
Second cas. — *La projection de la droite sur le plan du cercle de gorge ne rencontre pas ce cercle.*

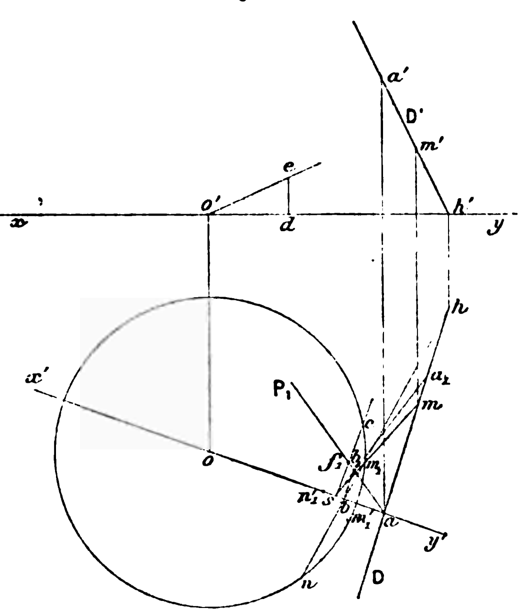
Coupons l'hyperboloïde par le plan vertical D (*fig.* 2). La section est une hyperbole le long de laquelle est cir-

conscrit à la surface un cône K ayant pour sommet s le pôle de D par rapport au cercle de gorge.

Ce cône coupe le cylindre vertical ayant pour base le cercle de gorge suivant deux courbes planes.

Pour obtenir le plan de l'une de ces courbes planes,


Fig. 2.



considérons le plan vertical sc perpendiculaire à os. Il coupe le cône suivant deux droites dont l'angle avec le plan du cercle de gorge est le même que celui des génératrices de l'hyperboloïde avec ce même plan, c'est-à-dire $eo'd$.

On en déduit que, si l'on construit le triangle rectangle ayant pour angle aigu $eo'd$ et pour côté de l'angle droit $o'd = sc$, ed est la hauteur du point de rencontre du cône K avec la verticale c au-dessus du plan du cercle de gorge.

Portons de en sf_1 sur sc, DaP_1 sera, dans le système $x'y'$, le plan de l'une des courbes planes communes au cône et au cylindre.

On peut alors regarder le cône K comme défini par une conique située dans le plan DaP_1 et ayant comme projection sur le plan horizontal le cercle de gorge. On cherchera les points d'intersection de la droite (D, D') avec le cône ainsi défini.

Les constructions se continuent sans difficulté par la méthode habituelle.

Remarque. — Les deux méthodes exposées s'appliquent, avec des modifications de détail qu'il est facile de voir, à un hyperboloïde non de révolution.

SOLUTION DE L'ÉPURE DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE DONNÉE A L'ÉCOLE CENTRALE EN 1890 (1re SESSION) (1);

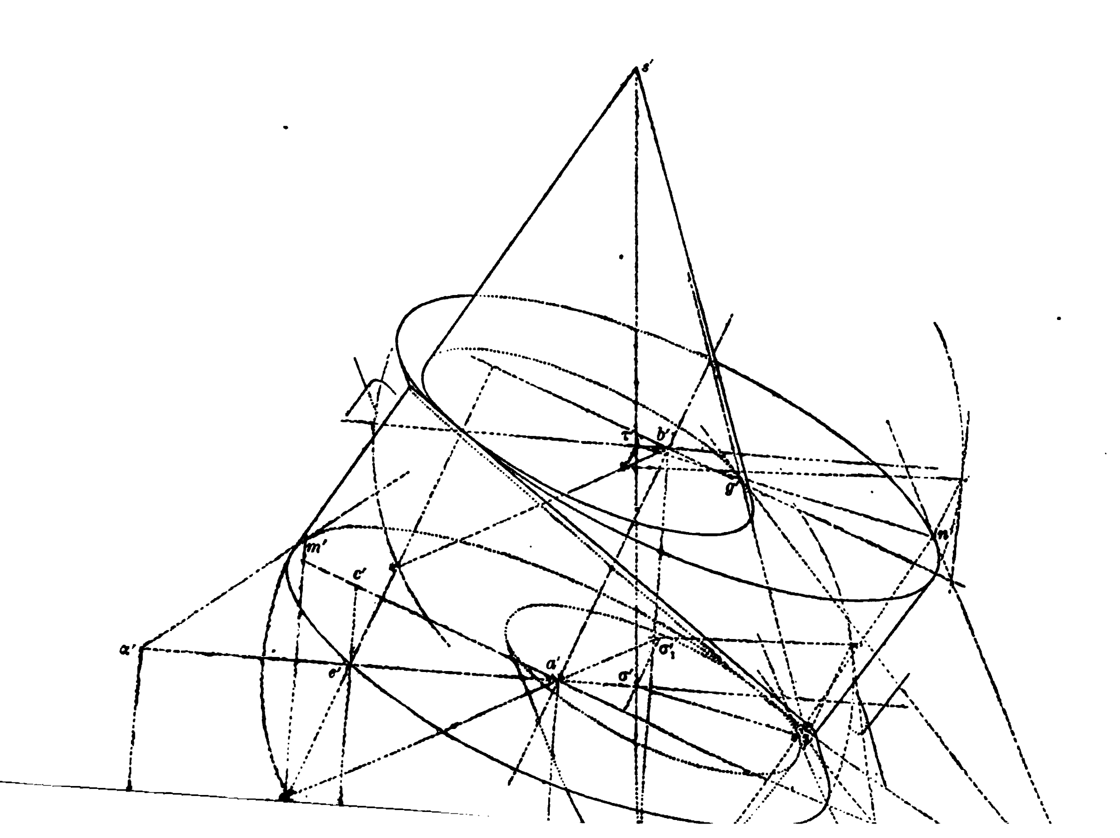
PAR F. J. M.

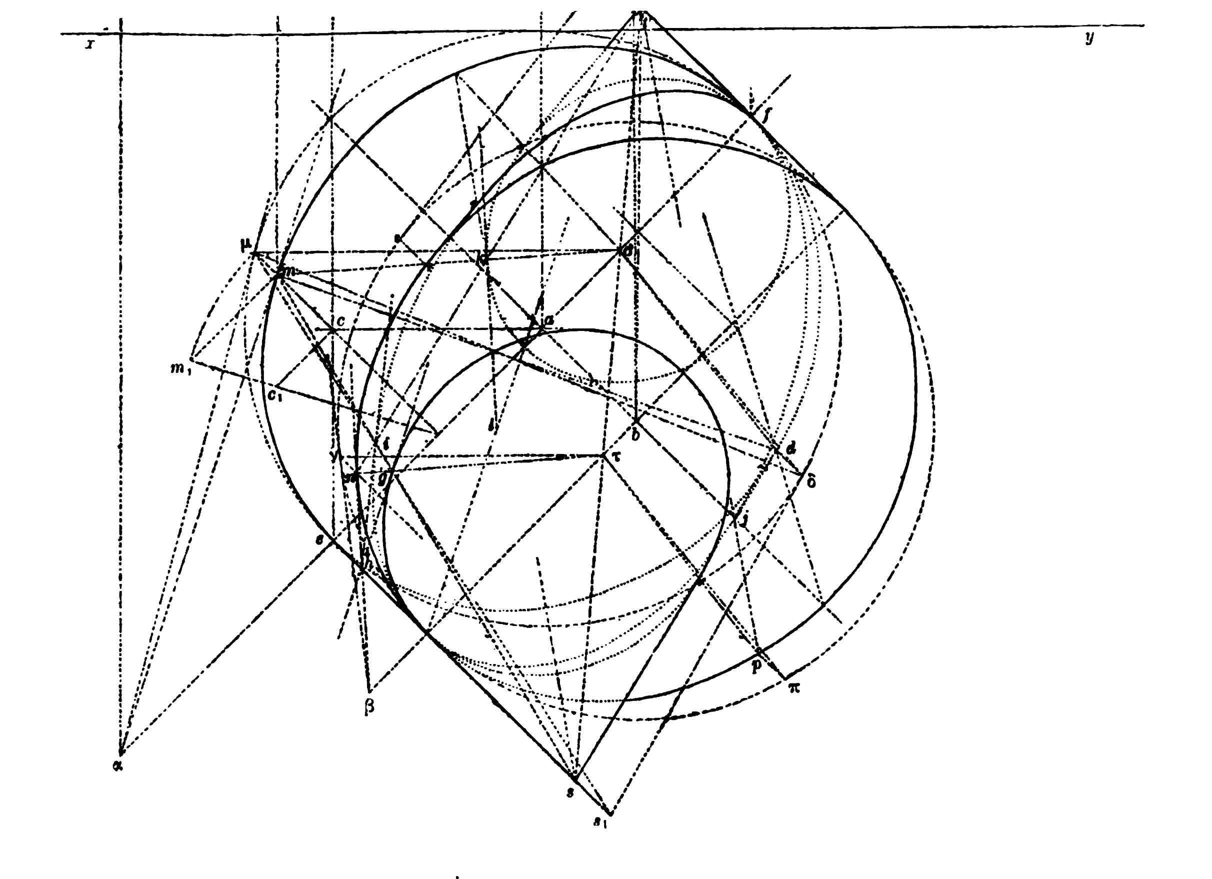
Intersection de deux cônes. Les bases sont des cercles dont les plans sont perpendiculaires à la droite (ab, $a'b'$) qui joint les centres. On donne la position des centres par leur cote et leur éloignement.

On prend les diamètres horizontaux des cercles de base, on joint les extrémités de ces diamètres voisines du côté gauche du cadre et l'on prend sur cette droite un point de cote donnée : ce sera le sommet du cône de base (a, a'). De même à droite pour le sommet de l'autre cône.

---

(1) Voir l'énoncé complet, t. IX (1890), p. 540.


s'
b'
g'
n'
m'
c'
α'
e'
a'
σ'


x
y
μ
m
c
a
m₁
c₁
b
τ
d
δ
j
e
β
p
π
α
s
s₁
f

Représenter l'ensemble des deux cônes, limités chacun à son sommet et à sa base.

Les données se placent facilement, puisqu'on sait que le diamètre horizontal AE a sa projection horizontale *ae* perpendiculaire à *ab*.

Le point C de la frontale AC du plan du cercle A permet de trouver, par un rabattement, un point quelconque M de la base du cône S et la tangente en ce point. Pour trouver tout ce qui est demandé dans le restant de l'énoncé, nous allons, suivant la méthode générale, couper les deux cônes par des plans passant par la droite des sommets.

Remarquons d'abord que les droites TF et SE étant parallèles, les points σ, σ' et τ, τ' sont ceux où ST rencontre les plans des bases des cônes. Considérons donc le plan auxiliaire dont la trace sur le plan de base du cône S est la droite σm. Les plans des bases des deux cônes étant parallèles, menons les droites $\tau\nu$, τn, νn respectivement parallèles aux droites $\sigma\mu$, σm, μm.

Nous obtenons en *n* un point quelconque de la base du second cône et la tangente βn en ce point.

Les points *g* et *k* des génératrices *sm* et *tn* sont ceux où ces droites rencontrent le plan de base de l'autre cône; et les droites *gh* et *kl* respectivement parallèles aux droites αm et βn sont les tangentes en ces points.

Le point *i* de rencontre des deux génératrices est un point de l'intersection; et, en le joignant à *h*, point commun aux droites βn et *gh*, traces des plans tangents aux deux cônes, on a la tangente en ce point.

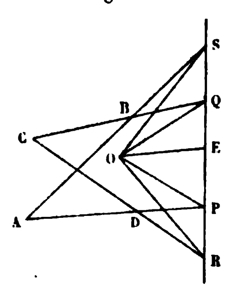
D'autre part, *s* considéré comme appartenant au plan de base du premier cône, se rabat en s_1; de sorte qu'en menant la tangente $s_1\delta$ on obtient suivant *sd* la génératrice de contour apparent horizontal, et *j* est le point où elle rencontre l'intersection.

ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE DES PROPRIÉTÉS DES CONIQUES D'APRÈS LEUR DÉFINITION (1);

PAR M. L. MALEYX.

Soient encore les quatre points A, B, C, D (*fig.* 50), et supposons d'abord la tangente PQ située à distance finie; si E est l'un des points de contact de la courbe, il sera l'un des points doubles de l'involution déterminée par les couples de points P et Q, R et S. Unissant un point quelconque, O, du plan aux cinq points P, Q, R, S, E, le faisceau ainsi formé sera en involution et OE en sera un rayon double. Si PQ passe à l'infini, les quatre premiers rayons deviendront parallèles aux côtés du quadrilatère qu'ils rencontrent en P, Q, R, S, respective-

Fig. 50.



ment, et OE sera toujours l'un des rayons doubles du faisceau déterminé par ces parallèles; mais, comme OE rencontre la courbe en un second point à l'infini, il est parallèle à un des diamètres de la courbe et détermine cette direction; on est alors ramené au cas où l'on donne

(1) Voir t. IX (1890), p. 596.

cinq points dont l'un est à l'infini dans une direction donnée. Comme le faisceau OPQRS a deux rayons doubles, il y a deux solutions.

La tangente peut passer à l'infini en même temps que l'un des points y passe dans une direction donnée.

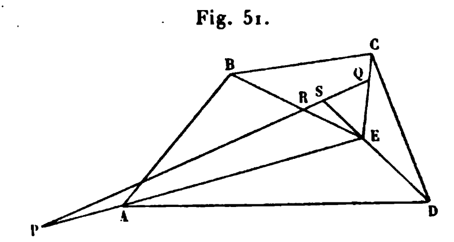
L'une des tangentes passant à l'infini, la courbe ne peut être qu'une parabole ; on peut alors supposer que le point et le point de contact ont passé à l'infini dans la direction donnée, et l'on est ramené au cas où l'on donne cinq points dont deux ont passé à l'infini dans la même direction donnée.

Il n'y a pas de modification sensible à la construction générale, si *deux des quatre points passent à l'infini dans des directions données, la tangente restant à distance finie.*

3° *Construire une conique dont on donne quatre tangentes et un point.*

Théorème corrélatif de celui de Desargues. — Soient AB, BC, CD, DA les quatre tangentes données, E le point donné (*fig.* 51); unissons par des lignes droites

Fig. 51.



le point E aux quatre sommets du quadrilatère circonscrit. Si nous coupons la figure par une transversale quelconque PS, les couples de points de rencontre de cette droite avec les rayons EA et EC, EB et ED déterminent une involution dont font partie les points de

rencontre de la même droite avec les deux tangentes issues du point E; mais, comme le point E appartient à la courbe, les deux tangentes qui en sont issues se confondent, et leurs points communs avec PS se réduisent à un qui est le point double de l'involution déterminée par P et Q, R et S. On déterminera donc un de ces points doubles, en l'unissant au point E par une droite; on aura une cinquième tangente et l'on sera ramené à un cas précédent. Comme l'involution a deux points doubles, il y a deux solutions.

La même construction s'applique encore *si le point* E *se transporte à l'infini dans une direction donnée.* Les quatre rayons EA, EB, EC, ED, devenant parallèles, la courbe correspondante peut être une hyperbole ou une parabole: dans le premier cas, la cinquième tangente sera une asymptote; dans le deuxième, cette cinquième tangente passe à l'infini; la courbe sera une parabole dont on connaît quatre tangentes; sa construction rentre dans un cas précédent.

Si *une des tangentes* AD *passe à l'infini, le point* E *restant à distance finie,* la courbe ne peut être qu'une parabole, la construction continue à s'appliquer, deux des sommets A, D du quadrilatère circonscrit passant à l'infini dans les directions BA, CD.

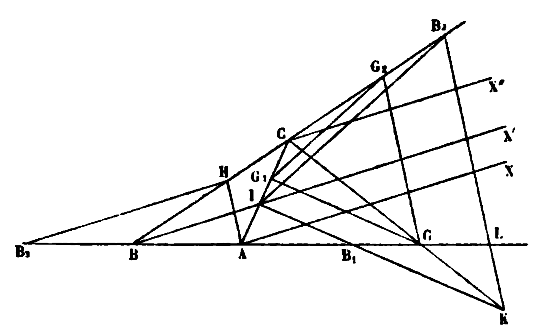
Enfin, si *une des tangentes*, AD *par exemple*, *passe à l'infini, et que le point* E *passe également à l'infini dans une direction donnée,* la courbe ne peut être qu'une parabole; mais la construction ne s'applique plus, la cinquième tangente qu'elle détermine passant elle-même à l'infini. On peut alors traiter directement la question qui se réduit à *construire une parabole dont on donne trois tangentes et la direction des diamètres.*

Soient AB, BC, AC les trois tangentes (*fig.* 52), AX, BX′, CX″ les parallèles aux diamètres menées par

les points A, B, C; prenons pour inconnues les points de contact.

La droite qui unit deux d'entre eux, ceux qui se trouvent sur les tangentes BA, AC par exemple, est divisée par AX en deux parties égales; dès lors sa direction est déterminée : il suffira pour l'obtenir de prendre sur BA

Fig. 52.



la longueur $AB_1 = AB$ et de joindre B_1I, I étant le point de rencontre de BX' avec AC; B_1I est parallèle aux cordes divisées par AX en deux parties égales.

On déterminera d'une manière analogue les directions des deux autres cordes de contact respectivement parallèles à IB_2, AH ou B_2L. La question se ramène alors à construire un triangle dont les côtés soient parallèles à IB_1, IB_2, B_2L, et dont les sommets reposent sur AB, BC, AC; les sommets de ce triangle seront les points de contact cherchés. Pour construire ce triangle, il suffit de prolonger IB_1, B_2L, jusqu'à leur rencontre en K, d'unir le point K au point C par une ligne droite coupant AB en G, puis de mener par ce point G les droites GG_1, GG_2, respectivement parallèles à IB_1, B_2L. Le triangle GG_1G_2 remplit les conditions de l'énoncé : le problème n'a qu'une solution.

4° *Construire une conique dont on donne trois points et deux tangentes.*

Desargues. — Soient AB, AC les deux tangentes données, E, F, G les trois points donnés (*fig.* 53) : considérons la droite MN qui unit les points de contact des deux tangentes AB, AC, comme formant avec elles, en la prenant doublement, un quadrilatère inscrit dans la conique. Les points G et F, qui appartiennent à la

Fig. 53.

courbe, et les points P et Q où la droite GF rencontre les côtés opposés AB, AC du quadrilatère inscrit déterminent une involution dont le point ω, où GF rencontre MN, est un des points doubles. En construisant les points doubles de cette involution déterminée, on aura deux points, tels que ω, ω_1, dont l'un se trouvera sur MN. Répétant le même raisonnement relativement à la transversale GE, on aura deux nouveaux points ω', ω'_1, dont l'un appartiendra à la droite MN. Cette droite peut donc avoir quatre positions déterminées, en associant deux à deux les points ω, ω_1 avec les points ω', ω'_1 ; à chaque position de la droite correspond une conique dont la construction se ramène à un cas précédent : la question a donc quatre solutions.

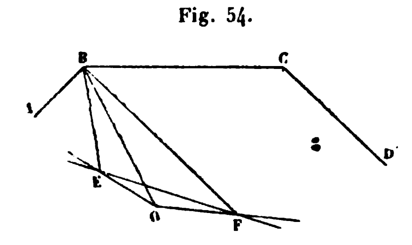
Dans les cas où quelques-uns des éléments donnés se transporteraient à l'infini, on raisonnerait comme dans les cas prédents.

5° *Construire une conique dont on donne trois tangentes et deux points.*

Théorème corrélatif de celui de Desargues. — Soient AB, BC, CD les trois tangentes données, E, F les deux points donnés (*fig.* 54); considérons les deux tangentes réduites à une en E, et les deux tangentes réduites à une en F, comme formant un quadrilatère circonscrit à la conique, ayant deux sommets opposés en E et F, et les deux autres sommets opposés confondus au point O où elles se coupent.

Les tangentes BA, BC, les deux rayons BE, BF déterminent un faisceau en involution dont BO est un rayon double; donc, en construisant les rayons doubles de cette

Fig. 54.



involution, déterminée par les quatre rayons connus, on aura deux droites BO, BO_1, dont l'une doit passer par le point de concours des tangentes en E et F.

En répétant le même raisonnement sur le faisceau déterminé par CB et CD, CE et CF, on obtiendra deux nouvelles droites issues de C' et dont l'une passera par le point O. En associant chacune des deux droites issues de B, et telles que BO, avec chacune de celles qui sont issues de C, dans les mêmes conditions, on obtiendra

quatre points qui peuvent appartenir chacun à deux tangentes en E et F.

On pourra ainsi construire quatre systèmes de deux tangentes qui, associés chacun aux trois tangentes données, détermineront quatre coniques remplissant les conditions de l'énoncé.

Si un ou deux des éléments donnés passaient à l'infini, on raisonnerait comme dans les cas précédents.

XV. *Étant données deux coniques, chacune par cinq points,* A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 *pour la première,* B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 *pour la deuxième, et admettant que ces deux coniques ont quatre points communs inconnus, on propose de construire une troisième conique passant par ces quatre points, et par un cinquième point donné* C.

Par le point C menons une transversale quelconque; d'après le théorème du n° VI, Chap. II, on pourra construire les deux points M et M_1, où elle rencontre la première conique, et les points N et N_1 où elle coupe la seconde; le point conjugué de C dans l'involution déterminée par les couples de points M et M_1, N et N_1, appartient à la troisième conique, d'après la généralisation du théorème de Desargues, n° VIII, Chap. II, et peut être construit.

On pourra déterminer ainsi autant de points qu'on voudra de la troisième conique, et la question est résolue.

XVI. *Deux coniques ont deux points communs* A_1, A_2 *donnés; en outre on donne trois autres points de chacune d'elles* A_3, A_4, A_5 *pour la première,* A'_1, A'_2, A'_3 *pour la deuxième : on demande de construire leurs deux autres points communs.*

Coupant la figure par une transversale, d'après le théorème du n° VI, Chap. II, on pourra construire les points M et M_1, N et N_1, où elle rencontre les deux coniques qui sont chacune définies par cinq points. Si P est le point où la même droite rencontre la droite $A_1 A_2$, le point conjugué Q dans l'involution déterminée par les couples de points M et M_1, N et N_1 appartient à la droite qui unit les deux points inconnus (*Gén. du th. de Desargues,* n° VIII, Chap. II).

On pourra construire ce point Q, et de la même manière déterminer un second point Q_1 de la droite unissant les points inconnus. Il ne restera plus qu'à trouver les points communs de la droite QQ_1 avec l'une des coniques données, ce qui se fera par l'application du théorème établi au n° VI, Chap. II.

XVII. *Une section plane d'un cône ayant pour directrice une conique est aussi une section conique.*

En effet, si l'on prend le sommet du cône comme point de vue, la section peut être considérée comme une perspective de la directrice.

Comme les théorèmes de Desargues et de Pascal sont projectifs et s'appliquent à la directrice, on pourra construire tous les points de cette ligne par leur application et au moyen de cinq d'entre eux; mais on pourra aussi construire tous les points de la section par l'application des mêmes théorèmes aux points correspondants de cette section. Il en résulte que tous les points de la section appartiennent à la conique qui passe par les cinq premiers et qui est déterminée, et qu'en conséquence cette section est une conique.

CHAPITRE III.

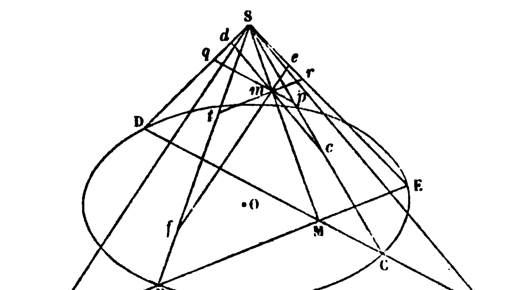
THÉORÈMES DIVERS ET APPLICATIONS.

Théorème de Newton et conséquences.

I. Théorème de Newton. — *Si par un point du plan d'une section conique on mène deux sécantes parallèles à deux directions données, parallèles à ce plan, le rapport du produit des deux segments déterminés par la courbe sur l'une des sécantes au produit des segments déterminés sur l'autre est un nombre constant indépendant de la position du point.*

Soient O le cercle directeur, S le sommet du cône (*fig.* 55); menons par le sommet du cône les deux

Fig. 55.



droites SA, SB, respectivement parallèles aux deux directions données, et limitées en A et B au plan de la

base circulaire, le plan ASB sera parallèle au plan sécant.

Par le point m, pris arbitrairement dans le plan sécant, menons dc, ef respectivement parallèles à SA, SB, puis faisons passer un plan par SA et dc, et un autre par SB et ef; le premier de ces plans coupera le cône suivant les génératrices SC, SD, le deuxième suivant SE, SF; ils se couperont entre eux suivant la droite SM.

Traçons ensuite pmq parallèle à DC et rmt parallèle à EF. De la similitude des triangles mdq, DSA, on déduit

$$\frac{md}{mq}=\frac{\mathrm{SA}}{\mathrm{AD}},$$

et de celle des triangles $\mathrm{S}mq$, SMD

$$\frac{mq}{\mathrm{MD}}=\frac{\mathrm{S}m}{\mathrm{SM}};$$

d'où, multipliant membre à membre,

$$\frac{md}{\mathrm{MD}}=\frac{\mathrm{AS}}{\mathrm{AD}}\times\frac{\mathrm{S}m}{\mathrm{SM}}.$$

On trouve de même, par la considération des couples de triangles semblables, mpc, CSA, $\mathrm{S}mp$, CSM,

$$\frac{mc}{\mathrm{MC}}=\frac{\mathrm{AS}}{\mathrm{AC}}\times\frac{\mathrm{S}m}{\mathrm{SM}}.$$

En multipliant membre à membre les deux dernières

$$\frac{mc\times md}{\mathrm{MC}\times\mathrm{MD}}=\frac{\overline{\mathrm{SA}}^2}{\mathrm{AC}\times\mathrm{AD}}\times\left(\frac{\mathrm{S}m}{\mathrm{SM}}\right)^2.$$

Répétant des calculs analogues sur les triangles semblables : $\mathrm{S}mt$, SMF, et mtf, SBF; puis sur les deux autres couples de triangles semblables : $\mathrm{S}mr$, SME, et

mer, BSE, on en déduit

$$\frac{me \times mf}{\text{ME} \times \text{MF}} = \frac{\overline{\text{SB}}^2}{\text{BE} \times \text{BF}} \times \left(\frac{\text{S}m}{\text{SM}}\right)^2.$$

Divisant membre à membre les deux dernières égalités, en remarquant que, d'après les propriétés des sécantes au cercle, MC × MD = ME × MF, on trouve

$$\frac{mc \times md}{me \times mf} = \left(\frac{\text{SA}}{\text{SB}}\right)^2 : \frac{\text{AC} \times \text{AD}}{\text{BE} \times \text{BF}}.$$

Le second membre est constant et le théorème est démontré.

La *fig.* 55 suppose les points A et B en dehors du cercle directeur, ce qui arrive toujours quand la conique est une ellipse ou une parabole, exceptant dans ce dernier cas celui où l'une des directions données serait parallèle aux diamètres, et que nous examinerons à part à la fin du présent numéro.

Dans le cas de l'hyperbole, l'un ou les deux points A ou B peuvent être intérieurs au cercle directeur, si les directions SA, SB correspondent à des cordes rencontrant les deux branches; la démonstration se fait de la même manière et conduit au même résultat.

Conservons dans la *fig.* 56 les notations de la *fig.* 55, et aussi les mêmes hypothèses, sauf que SA est une direction intérieure au lieu d'être extérieure comme dans la figure précédente.

Des deux triangles *mdq*, DSA, sont toujours semblables et donnent

$$\frac{md}{mq} = \frac{\text{SA}}{\text{AD}};$$

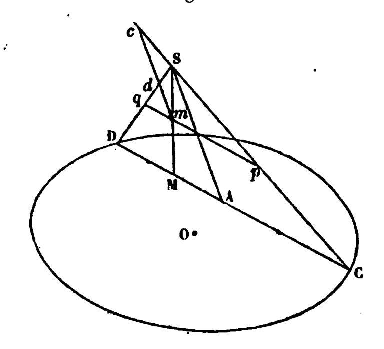
il en est de même des triangles S*mq*, SDM, d'où l'on déduit

$$\frac{mq}{\text{MD}} = \frac{\text{S}m}{\text{SM}}.$$

Multipliant membre à membre,

$$\frac{md}{\mathrm{MD}} = \frac{\mathrm{AS}}{\mathrm{AD}} \times \frac{\mathrm{S}m}{\mathrm{SM}}.$$

Fig. 56.



Considérons encore les deux couples de triangles semblables, *mpc*, ASC, et S*mp*, SMC, on en tire

$$\frac{mc}{\mathrm{MC}} = \frac{\mathrm{AS}}{\mathrm{AC}} \times \frac{\mathrm{S}m}{\mathrm{SM}}.$$

Multipliant membre à membre les deux dernières égalités, on a

$$\frac{md \times mc}{\mathrm{MD} \times \mathrm{MC}} = \frac{\overline{\mathrm{SA}}^2}{\mathrm{AD} \times \mathrm{AC}} \times \left(\frac{\mathrm{S}m}{\mathrm{SM}}\right)^2.$$

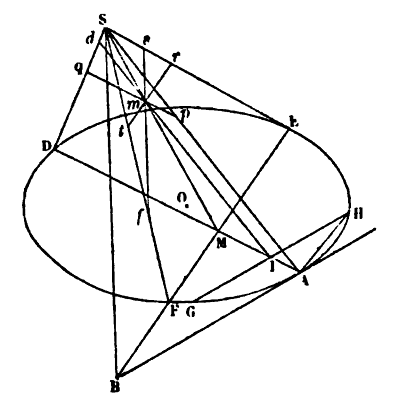
La démonstration s'achève comme dans le cas précédent, que la direction SB soit intérieure ou extérieure.

Il nous reste à examiner ce qui advient dans le cas de la parabole, et si l'une des directions, soit SA, est parallèle aux diamètres; dans ce cas SA est située sur la surface du cône, et SB est contenue dans le plan tangent suivant SA (*fig.* 57).

Le plan de la parabole est parallèle au plan tangent BSA, et coupe le plan de la directrice suivant GH paral-

lèle à AB. Par un point m du plan de la section menons les droites dmI, emf, respectivement parallèles à SA, SB; puis encore rmt, pmq, respectivement parallèles

Fig. 57.



aux traces BFE, DA des plans SBm, SAm sur le plan de la directrice.

Ces deux plans SBm, SAm coupent le cône suivant les couples de génératrices SE, SF, et SA, SD; de plus ils se coupent entre eux suivant SmM.

La trace I de la droite dmI, intersection du plan de la courbe et du plan SAm, sur le plan de la directrice, se déplace sur la trace GH du plan de la section sur le plan du cercle de base.

De la similitude des triangles dmq, SAD, on déduit

$$\frac{md}{mq} = \frac{\text{SA}}{\text{AD}};$$

de celle des triangles Sqm, SDM, on tire

$$\frac{mq}{\text{DM}} = \frac{\text{S}m}{\text{SM}};$$

multipliant membre à membre, on a

$$\frac{md}{\mathrm{MD}} = \frac{\mathrm{SA}}{\mathrm{AD}} \times \frac{\mathrm{S}m}{\mathrm{SM}}.$$

De la considération des triangles semblables S*mp*, SMA, et observant que $mp = \mathrm{AI}$, comme côtés opposés d'un parallélogramme, on déduit

$$\frac{mp}{\mathrm{MA}} = \frac{\mathrm{AI}}{\mathrm{MA}} = \frac{\mathrm{S}m}{\mathrm{SM}};$$

multipliant membre à membre,

$$\frac{md \times \mathrm{AI}}{\mathrm{MD} \times \mathrm{MA}} = \frac{\mathrm{SA}}{\mathrm{AD}} \times \left(\frac{\mathrm{S}m}{\mathrm{SM}}\right)^2.$$

On trouve, comme dans les cas précédents et par la considération des mêmes triangles,

$$\frac{me \times mf}{\mathrm{ME} \times \mathrm{MF}} = \frac{\overline{\mathrm{SB}}^2}{\mathrm{BF} \times \mathrm{BE}} \times \left(\frac{\mathrm{S}m}{\mathrm{SM}}\right)^2.$$

Divisant membre à membre et observant que

$$\mathrm{MD} \times \mathrm{MA} = \mathrm{ME} \times \mathrm{MF},$$

on a

$$\frac{me \times mf}{md \times \mathrm{AI}} = \frac{\overline{\mathrm{SB}}^2}{\mathrm{BE} \times \mathrm{BF}} \times \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{SA}}.$$

ou

$$\frac{me \times mf}{md} = \frac{\overline{\mathrm{SB}}^2}{\mathrm{BE} \times \mathrm{BF}} \times \frac{\mathrm{AD} \times \mathrm{AI}}{\mathrm{SA}}.$$

Or le produit $\mathrm{AD} \times \mathrm{AI}$ est constant et égal à $\overline{\mathrm{AH}}^2$; le second membre est donc constant, et l'on a

$$\frac{me \times mf}{md} = \frac{\overline{\mathrm{SB}}^2}{\mathrm{BE} \times \mathrm{BF}} \times \frac{\overline{\mathrm{AH}}^2}{\mathrm{SA}},$$

c'est-à-dire que, *dans la parabole, le point commun*

d'une corde de direction fixe avec un diamètre partage cette corde en deux segments dont le produit est au segment du diamètre compris entre le même point et la courbe dans un rapport constant.

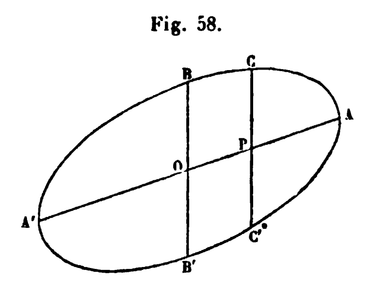
II. — Propriétés métriques des demi-cordes parallèles, ou ordonnées d'une section conique, par rapport aux segments qu'elles déterminent sur le diamètre qui les divise en parties égales. Équations des coniques à centre rapportées à deux diamètres conjugués. Équation de la parabole rapportée à un diamètre et à la tangente à l'extrémité de ce diamètre.

Les propriétés que nous avons l'intention d'établir dans le présent numéro sont des conséquences immédiates du théorème de Newton que nous venons de démontrer.

Considérons séparément les trois courbes.

Ellipse. — Soit l'ellipse O (*fig.* 58); AA', BB' deux diamètres conjugués dont nous supposerons les demi-

Fig. 58.



longueurs respectivement représentées par a' et b'; CC' une corde parallèle à BB', et divisée en deux parties égales par son point de rencontre P avec AA'.

D'après le théorème de Newton, le rapport $\frac{PC \times PC'}{PA \times PA'}$

conserve une même valeur constante quand le point P se déplace sur AA′; en conséquence, on a, pour tous les points de la courbe,

$$\frac{PC \times PC'}{PA \times PA'} = \frac{OB \times OB'}{OA \times OA'},$$

ou

$$\frac{\overline{PC}^2}{PA \times PA'} = \frac{b'^2}{a'^2}.$$

Donc : *le carré d'une demi-corde, ou ordonnée, qui se déplace en conservant sa direction, est au produit des segments qu'elle détermine sur le diamètre conjugué dans un rapport constant.*

Si l'on désigne, d'une façon générale, cette ordonnée par y, et par x le nombre positif ou négatif représentant OP, l'équation précédente peut s'écrire

$$\frac{y^2}{(a'-x)(a'+x)} = \frac{b'^2}{a'^2}$$

ou

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1;$$

c'est l'équation cartésienne de la courbe rapportée aux deux diamètres conjugués AA′, BB′.

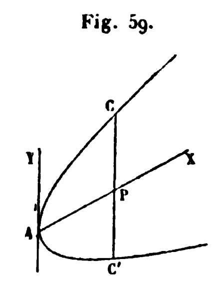
Parabole. — Soit une parabole dont le diamètre AX divise en parties égales les cordes telles que CC′, parallèles à la tangente AY (*fig.* 59); d'après la fin du numéro précédent, on sait que, lorsque la corde CC′ se déplace parallèlement à elle-même, le rapport $\frac{PC \times PC'}{AP}$ est constant; et, comme le point P où CC′ rencontre le diamètre conjugué de sa direction en est le point milieu, cette égalité peut se mettre sous la forme $\frac{\overline{CP}^2}{AP} = 2p'$, p' étant un nombre représentant une longueur fixe.

Désignant, d'une façon générale, CP par y et AP par x, l'équation précédente, qui a lieu pour tous les points de la courbe, peut s'écrire

$$y^2 = 2p'x,$$

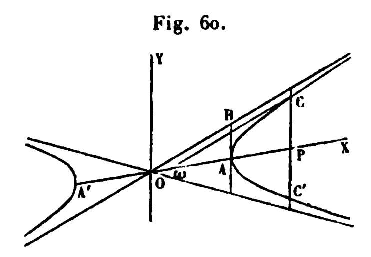
équation cartésienne de la parabole rapportée à un diamètre et à la tangente à son extrémité.

Fig. 59.



Hyperbole. — Soient enfin l'hyperbole O (*fig.* 60), CC' une corde variable parallèle à OY, OX le diamètre

Fig. 60.



conjugué de sa direction; d'après le théorème de Newton et pour tous les points de la courbe, le rapport $\frac{PC \times PC'}{PA \times PA'}$ a une valeur constante, et il en est de même de $\frac{\overline{PC}^2}{PA \times PA'}$, puisque $PC = PC'$.

Cherchons à déterminer la valeur de ce rapport : dans

ce but menons, par le point C, Cω parallèle à l'asymptote OB; nous avons immédiatement

$$\frac{\overline{PC}^2}{PA \times PA'} = \frac{\overline{PC}^2}{(P\omega - \omega A)(P\omega + \omega A')}$$

$$= \frac{\left(\frac{PC}{P\omega}\right)^2}{\left(1 - \frac{\omega A}{P\omega}\right)\left(1 + \frac{\omega A'}{P\omega}\right)}.$$

Si le point C s'écarte indéfiniment de l'origine, la droite Cω se rapproche indéfiniment de l'asymptote, et le point ω du point O; il en résulte que ωA et $\omega A'$ restent finis, et que leurs rapports à Pω ont pour limite zéro; de plus, si nous représentons les longueurs OA, AB, par a', b' respectivement, on déduit de la similitude des triangles ωPC, OAB l'égalité

$$\frac{PC}{P\omega} = \frac{b'}{a'};$$

d'où

$$\frac{\overline{PC}^2}{PA \times PA'} = \lim \frac{\left(\frac{PC}{P\omega}\right)^2}{\left(1 - \frac{\omega A}{P\omega}\right)\left(1 + \frac{\omega A'}{P\omega}\right)} = \frac{b'^2}{a'^2}.$$

Donc *le carré d'une demi-corde, ou ordonnée, qui se déplace en conservant sa direction, est au produit des segments qu'elle détermine sur le diamètre conjugué, que la figure suppose rencontrer réellement la courbe, dans un rapport constant.*

Si l'on représente, d'une manière générale, cette ordonnée par y et par x le nombre positif ou négatif représentant le segment OP, l'équation précédente peut s'écrire

$$\frac{y^2}{(x - a')(x + a')} = \frac{b'^2}{a'^2}$$

ou

$$\frac{x^2}{a'^2} - \frac{y^2}{b'^2} = 1.$$

C'est l'équation cartésienne de la courbe rapportée aux deux diamètres conjugués OX, OY.

Cette équation peut s'écrire

$$\frac{x^2}{y^2 + b'^2} = \frac{a'^2}{b'^2}$$

ou

$$\frac{x^2}{(y + b'\sqrt{-1})(y - b'\sqrt{-1})} = \frac{a'^2}{b'^2};$$

d'où l'on peut conclure que *le carré d'une demi-corde qui se déplace parallèlement à une direction fixe, et dont le diamètre conjugué ne rencontre pas réellement la courbe, est au produit des segments qu'elle détermine sur ce diamètre dans un rapport constant,* A CONDITION DE CONSIDÉRER LES EXTRÉMITÉS DE CE DIAMÈTRE COMME DISTANTES DU CENTRE DES LONGUEURS IMAGINAIRES REPRÉSENTÉES PAR $\pm b'\sqrt{-1}$.

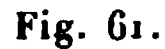
III. *Construire une conique dont on donne un point réel et quatre points réels ou imaginaires définis par les couples de points où deux droites données rencontrent une ou deux coniques.*

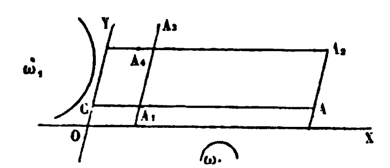
Remarquons d'abord que, d'après le théorème établi au n° VI, Chap. II, on peut remplacer les points communs réels ou imaginaires d'une conique définie et d'une droite donnée par ceux de la même droite et d'un cercle qu'on peut construire; d'après cela, on peut considérer les quatre derniers points donnés comme situés par couples sur les deux droites données et deux cercles donnés.

Soit donc à construire la conique passant par le point réel donné, A, et par les couples de points de rencontre des droites données OX, OY, avec les cercles donnés ω, ω_1 respectivement (*fig.* 61).

Menons par le point A la parallèle à OX rencontrant OY en C, et soit A_1 son second point de rencontre avec

la courbe; d'après le théorème de Newton, le rapport


Fig. 61.



du produit $CA \times CA_1$ à celui des segments interceptés sur OY entre le point C et les points où cette droite rencontre le cercle ω_1, ce dernier produit étant égal à la puissance, π, du point C par rapport au cercle ω_1, est égal au rapport des puissances P et P_1 du point O par rapport aux cercles ω et ω_1 respectivement.

On aura donc l'égalité

$$\frac{CA_1 \times CA}{\pi} = \frac{P}{P_1},$$

d'où l'on pourra déduire une construction du point A_1.

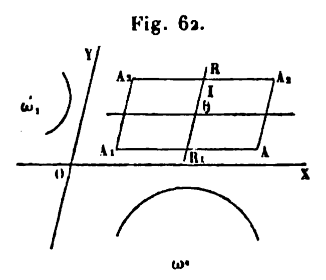
On pourra déterminer par une construction analogue le point A_2 où la parallèle à OY menée par A rencontre de nouveau la courbe; puis encore les seconds points de rencontre avec la courbe des parallèles menées à OY et OX par les points A_1 et A_2, soient ces points A_3 et A_4; connaissant cinq points réels de la courbe, elle est définie et peut être construite.

Remarque. — La construction précédente ne pourrait se terminer de la même manière s'il arrivait que les points A_3 et A_4 se confondissent; dans ce cas OX et OY seraient parallèles à deux diamètres conjugués de la courbe, diamètres qu'on pourrait construire en menant des parallèles à OY, OX par les points milieux des cordes AA_1, AA_2; on connaîtrait alors le centre et l'on pourrait con-

struire la longueur de ces diamètres d'après le théorème de Newton, ainsi qu'il suit.

Conservons dans la *fig.* 62 les notations de la *fig.* 61, supposant A_3 et A_4 confondus en A_3, et soient R et R_1

Fig. 62.



les extrémités du diamètre parallèle à OY. On a, d'après le théorème de Newton,

$$\frac{IR \times IR_1}{IA_2 \times IA_3} = \frac{\overline{\theta R}^2 - \overline{\theta I}^2}{\overline{IA}_2^2} = \frac{P_1}{P},$$

P_1 et P étant toujours les puissances du point O par rapport aux cercles ω_1 et ω; la dernière égalité permet de construire θR et, en conséquence, les points R et R_1.

Examinons enfin *le cas où les droites données sont parallèles.*

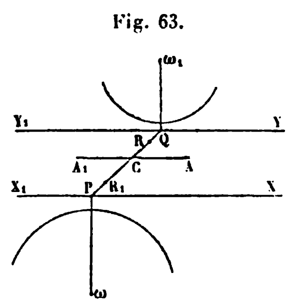
Proposons-nous de faire passer une conique par le point réel A, et par les points imaginaires où les cercles ω, ω_1 rencontrent les droites parallèles X_1X, Y_1Y respectivement (*fig.* 63).

Les points milieux des cordes interceptées dans la courbe cherchée sur les droites X_1X, Y_1Y sont placés aux pieds P et Q des perpendiculaires abaissées des centres ω, ω_1 des cercles donnés sur les deux droites données.

PQ est donc le diamètre de la courbe divisant en parties égales les cordes parallèles à X_1X; en menant par

A la parallèle à X_1X et en la prolongeant au delà de son point de rencontre C avec PQ d'une longueur $CA_1 = CA$, le point A_1 sera un nouveau point de la courbe. Désignons par R et R_1 les extrémités du diamètre PQ et par

Fig. 63.



P et P_1 les puissances des points P et Q par rapport aux cercles ω, ω_1 respectivement : nous aurons, par application du théorème de Newton,

$$\frac{CR \times CR_1}{\overline{CA}^2} = \frac{PR \times PR_1}{P} = \frac{QR \times QR_1}{P_1}$$

ou

$$\frac{CR \times CR_1}{\overline{CA}^2} = \frac{(PC + CR)(PC - CR_1)}{P} = \frac{(QC - CR)(QC + CR_1)}{P_1}$$

ou encore

$$\frac{CR \times CR_1}{\overline{CA}^2} = \frac{\overline{PC}^2 + PC(CR - CR_1)}{P + \overline{CA}^2} = \frac{\overline{QC}^2 - QC(CR - CR_1)}{P_1 + \overline{CA}^2}.$$

Au moyen de la dernière égalité, on peut construire $CR - CR_1$, puis au moyen de la première un carré équivalent à $CR \times CR_1$; et, d'après un problème dont la solution est connue, on pourra construire CR et CR_1. Connaissant le diamètre RR_1 de grandeur et de position,

on aura le centre : on pourra alors construire le diamètre conjugué qui est parallèle à X_1X, et l'on aura sa longueur désignée par b' d'après l'égalité

$$\frac{4b'^2}{\overline{RR_1}^2} = \frac{\overline{AC}^2}{CR \times CR_1},$$

qui se déduit du théorème de Newton.

(*A suivre.*)

ÉCOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES (CONCOURS DE 1890).

COURS PRÉPARATOIRES.

Géométrie analytique. (*Durée de l'épreuve* : 4 *heures.*)

Étant donné un cercle fixe C dont le centre est en un point de l'axe des y, et une série de circonférences tangentes à l'axe des x à l'origine, on mène des tangentes communes à ces circonférences et au cercle fixe, et on demande le lieu des points de contact M.

On examinera en particulier le cas où le cercle fixe se réduit à un point et celui où le centre de ce cercle coïncide avec l'origine.

Algèbre. (*Durée* : 3 *heures.*)

On désigne par x et y les distances AM, BM de deux points A et B à un point M pris arbitrairement sur une droite D.

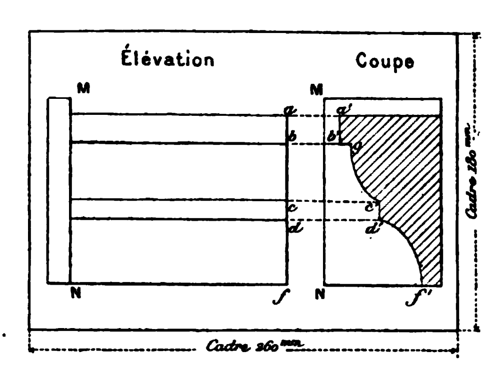
On demande de déterminer le maximum et le minimum du rapport $\frac{y}{x}$.

Lavis. (Feuille $\frac{1}{8}$ grand-aigle.) (*Durée* : 3 *heures.*)

Moulures. — Laver à l'encre de Chine, à teintes plates ou à teintes fondues, à volonté, les moulures dont le croquis est donné ci-contre.

MN, M'N' est l'arête verticale d'un pilastre, portant ombre

à 45° sur les moulures horizontales situées en arrière et dans la position relative qu'indique la coupe.

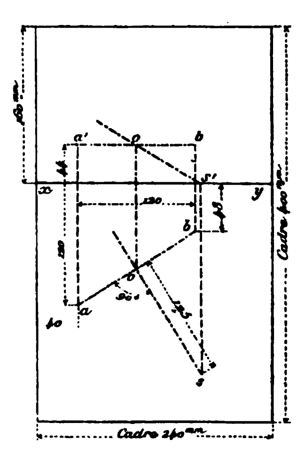


Les profils $g'c'$ et $d'f'$ pourront être formés par des quarts d'ellipse.

On ne lavera que l'élévation, ombres propres et ombres portées.

Épure. (Feuille ½ grand-aigle.) (*Durée : 4 heures.*)

Cône et cylindre de révolution. — Un cylindre de révolution a pour axe la droite horizontale (ab, $a'b'$); il est tangent



au plan horizontal et il est limité par deux plans de section droite passant par les extrémités (a, a') et (b, b') de l'axe.

Un cône, également de révolution, a pour sommet le point (s, s') situé sur le plan horizontal; son axe passe par le point (o, o') milieu de l'axe du cylindre et il est, lui aussi, tangent au plan horizontal. En projection horizontale, les axes des deux surfaces sont perpendiculaires l'un sur l'autre.

On demande de chercher l'intersection des deux surfaces et de représenter le cylindre seul en supposant le cône enlevé après avoir fait son entaille dans le cylindre.

L'épure devra indiquer la marche suivie pour trouver un point courant de l'intersection et la tangente en ce point. Elle comportera également les constructions faites pour trouver les points les plus remarquables de l'intersection.

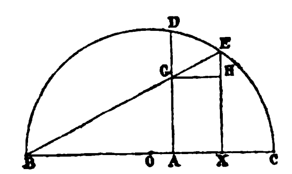
CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NAVALE EN 1889.

Compositions écrites.

Arithmétique et Algèbre. (*4 heures.*)

I. Calculer, à un centième près, le cosinus de l'angle B d'un triangle ABC rectangle en A, dont les côtés b et c ont pour longueurs $b = 115^{m},6543$, $c = 17^{m}4326$.

II. On donne une demi-circonférence BDC et une droite AD perpendiculaire en A, au diamètre BC, et, par un point X situé



sur ce diamètre, on mène XE parallèle à AD; on joint BE et on projette sur XE, orthogonalement en H, le point G où BE rencontre AD. Désignant OA, OX, OC respectivement par a, x, R, on demande :

1° D'étudier les variations de $HE = (x - a)\sqrt{\dfrac{R - x}{R + x}}$ quand

le point X se déplace sur le diamètre BC, en considérant successivement les cas où ce point est situé entre B et C, au delà de C ou au delà de B;

2° D'étudier le même problème en prenant pour variable l'angle $XOE = \varphi$.

Géométrie descriptive. (1 *heure et demie.*)

xy étant la ligne de terre, on donne sur le plan horizontal un triangle ABC dont l'un des côtés AB est situé sur la ligne de terre. Les côtés ont pour valeur

$$AB = 100^{mm},$$
$$BC = 68^{mm},$$
$$CA = 100^{mm}.$$

1° Construire au-dessus du plan horizontal un tétraèdre ayant pour base le triangle ABC et tel que les dièdres AB, BC, CA aient respectivement pour valeurs

$$\text{dièdre } \widehat{AB} = 80^\circ,$$
$$\text{dièdre } \widehat{BC} = 60^\circ,$$
$$\text{dièdre } \widehat{CA} = 80^\circ.$$

2° Construire les projections des sphères circonscrite et inscrite à ce tétraèdre.

Calcul trigonométrique. (1 *heure.*)

Calculer les valeurs de x comprises entre 0° et 90°, qui satisfont à la relation

$$\sin^3(4x + 21^\circ) = \frac{\text{tang}\, 199^\circ 18' 26'' \times (\cos 121^\circ 19' 12'')^3}{2,98761 \times (\sin 348^\circ 14' 57'')^2}.$$

Géométrie et Géométrie analytique. (3 *heures.*)

I. *Géométrie.* — Connaissant les trois côtés d'un triangle, calculer les médianes, les hauteurs, les bissectrices, les rayons du cercle circonscrit, des cercles inscrit et exinscrits.

II. *Géométrie analytique.* — Étant donnés deux axes rectangulaires ox, oy et un point M de coordonnées a et b, on demande de mener par le point M deux droites MA, MA', faisant entre elles un angle donné V, et telles que les quatre points A, B, A', B' de rencontre avec les axes soient sur une même circonférence.

1° Le problème admet pour chaque valeur de V deux solutions. Équations des deux circonférences correspondant à chacune de ces deux solutions. Les distinguer.

2° Le point M étant fixe, on suppose que l'angle V varie d'une manière continue. Démontrer que le lieu des centres de toutes ces circonférences est une ligne droite et qu'elles ont un même axe radical. Étudier comment varie la longueur du rayon; trouver ses valeurs minima.

3° L'angle V étant constant, on suppose que le point M décrit une circonférence autour du point O comme centre; trouver le lieu des centres de chacune de ces circonférences.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NAVALE EN 1890.

Compositions écrites.

Arithmétique et Algèbre. (*4 heures.*)

I. Calculer, à plus ou moins $\frac{1}{1000}$ près, la valeur de tang 15° donnée par la formule

$$\sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{1+\cos 30^\circ}}.$$

II. On donne un triangle ABC, rectangle en A et isoscèle, tel que $AB = AC = b$. D'un point X situé sur AB comme centre, avec XA comme rayon, on décrit une circonférence; on joint le point X aux deux points M et N où cette circonférence coupe l'hypoténuse.

Étudier les variations de la surface du triangle XMN quand le point X se déplace sur AB et sur ses prolongements.

III. Représenter par une courbe rapportée à des axes rectangulaires les variations de la fonction

$$y = \text{log. népérien de } \frac{\cos x + \sqrt{\cos^2 x - \cos^2 a}}{\cos a},$$

a étant compris entre o et $\frac{\pi}{2}$.

Examiner le cas particulier où $a = 0$ et $a = \frac{\pi}{2}$.

Géométrie cotée. (1 *heure et demie.*)

Étant donnés deux points A et B dont les cotes au-dessus du plan de comparaison sont respectivement

$$A = 0^m,38, \qquad B = 0^m 56,$$

et dont la distance horizontale est de $0^m,42$, construire à l'échelle de $\frac{1}{10}$ la projection cotée d'un prisme droit à base carrée, satisfaisant aux conditions suivantes :

Le côté de la base est AB, la pente du plan de cette base est de $\frac{1}{2}$, la hauteur du prisme est de $0^m,60$.

Indiquer les intersections de la figure avec une série de plans horizontaux équidistants entre eux de $0^m,20$.

Calcul trigonométrique. (1 *heure.*)

Calculer les valeurs de x comprises entre 0° et 360°, qui satisfont à l'équation

$$\sin^2(2x + 29^\circ) = \frac{\sin^3(226^\circ 15' 18'',6) \times \text{tang}^2(338^\circ 42' 13'')}{(0,56417)^3 \times \cos 245^\circ 19' 56'',3}.$$

Géométrie et Géométrie analytique. (3 *heures et demie.*)

I. *Géométrie.* — Énoncer et démontrer succinctement les principaux théorèmes qui servent à établir que le rapport des volumes de deux pyramides quelconques est égal au produit du rapport des bases par le rapport des hauteurs.

II. *Géométrie analytique.* — Oxy étant deux axes rectangulaires, BL une droite fixe parallèle à l'axe des $x (y = b)$, et A un point mobile sur cette droite ($BA = \alpha$), à chaque position du point A correspond une hyperbole équilatère passant par les trois points A, B, O et tangente en O à l'axe des x.

1° Trouver le lieu des centres de toutes ces hyperboles et construire pour une position donnée de A le centre et les asymptotes de l'hyperbole équilatère correspondant à ce point.

2° On joint le point variable A à un point fixe Q pris sur l'axe des y, la droite QA rencontre l'hyperbole correspondante à ce point en un second point M dont on demande le lieu; discuter la nature de ce lieu suivant la position de Q sur l'axe des y.



INTERSECTION DE DEUX QUADRIQUES;

PAR M. LUCIEN LÉVY.

Dans le numéro des *Nouvelles Annales* de décembre 1890, M. Carvallo a publié un intéressant article où il a l'occasion d'appliquer une méthode de M. Darboux à la recherche des conditions de contact de deux quadriques. La méthode indiquée me paraît plus puissante qu'il ne semble résulter de l'article cité et je voudrais montrer qu'elle permet une discussion complète de l'équation en λ relative à deux quadriques, au moins si l'on fait abstraction du réel et de l'imaginaire. Je retrouverai ainsi tous les résultats obtenus par Painvin (voir *Nouvelles Annales*, 1868 et 1869).

Pour abréger, je conserverai les notations de M. Carvallo et je renverrai, au besoin, à sa Note.

Soient

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} S &= \varphi(x. y, z, t)\\ &= \alpha x^2 + \alpha' y^2 + \alpha'' z^2 + 2\beta yz + 2\beta' zx\\ &\quad + 2\beta'' xy + 2\gamma x + 2\gamma' y + 2\gamma'' z + \delta = 0.\end{aligned}\right.$$

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} S' &= f(x, y, z, t)\\ &= Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx\\ &\quad + 2B''xy + 2(x + 2C'y + 2C''z + D) = 0\end{aligned}\right.$$

les équations de deux surfaces de second ordre (S) et (S');

$$(3)\qquad f(x, y, z, t) + \lambda\varphi(x, y, z, t) = 0$$

l'équation générale des quadriques qui passent par leurs intersections;

$$(4)\qquad \Delta(\lambda) = 0$$

l'équation du quatrième degré en λ qui exprime que l'équation (3) représente un cône.

Si le déterminant $\Delta(\lambda)$ est nul sans que tous ses mineurs du premier ordre le soient, l'équation (3) représentera un cône ou un cylindre non décomposables.

Si les premiers mineurs de $\Delta(\lambda)$ sont nuls sans que tous les mineurs du second ordre le soient, l'équation (3) représentera un système de deux plans distincts, parallèles ou non, réels ou imaginaires.

Si les mineurs du second ordre de $\Delta(\lambda)$ sont nuls sans que les éléments de $\Delta(\lambda)$ le soient tous, l'équation (3) représentera deux plans confondus.

Enfin si les éléments de $\Delta(\lambda)$ sont tous nuls pour la valeur de λ considérée, l'équation (3) est indéterminée.

Nous considérerons successivement ces diverses hypothèses. Cela posé, la méthode de M. Darboux repose essentiellement sur le lemme suivant dont j'omettrai la démonstration :

Si l'on remplace les deux surfaces S *et* S' *d'un faisceau de quadriques par deux autres surfaces* Σ *et* Σ' *du même faisceau, l'équation en* μ (*qui exprime que le discriminant de* $\Sigma + \mu\Sigma'$ *est nul*) *a ses racines reliées par une relation homographique à celles de l'équation en* λ *provenant de la forme* $S + \lambda S'$.

Il en résulte que les équations en λ et en μ acquerront en même temps une ou deux racines doubles, une racine triple, une racine quadruple, et que l'on peut choisir les surfaces S et S' qui servent de bases au faisceau, sans que l'intersection ni la nature des racines de l'équation en λ en soient affectées.

I.

$\Delta(\lambda)$ EST NUL SANS QUE TOUS SES PREMIERS MINEURS LE SOIENT.

Les quatre cônes qui correspondent à chaque valeur de λ sont tous de véritables cônes ou des cylindres. Je supposerai que la surface (1) soit un de ces cônes : par suite, l'équation en λ aura une racine nulle. Si, conformément aux notations usuelles (Salmon, *Géométrie analytique à trois dimensions*, § 234), nous posons

$$\Delta(\lambda) = \Delta\lambda^4 - \Theta\lambda^3 + \Phi\lambda^2 - \Theta'\lambda + \Delta',$$

l'équation (4) s'écrira

$$(5) \qquad \Delta\lambda^4 - \Theta\lambda^3 + \Phi\lambda^2 - \Theta'\lambda = 0.$$

a. Théorème I. — *A toute racine simple de cette équation correspond un cône n'ayant pas son sommet sur une quadrique du faisceau.*

D'après le lemme cité plus haut, on peut supposer que cette racine simple soit la racine nulle. Le cône correspondant a pour équation

$$(1) \qquad f(x, y, z, t) = 0.$$

Les coordonnées x_1, y_1, z_1, t_1 de son sommet vérifient les égalités (*voir* l'article de M. Carvallo)

$$\frac{x_1^2}{\left(\frac{\partial\Delta'}{\partial A}\right)} = \frac{y_1^2}{\left(\frac{\partial\Delta'}{\partial A'}\right)} = \frac{z_1^2}{\left(\frac{\partial\Delta'}{\partial A''}\right)} = \frac{2x_1y_1}{\left(\frac{\partial\Delta'}{\partial B''}\right)} = \frac{2z_1x_1}{\left(\frac{\partial\Delta'}{\partial B'}\right)}$$
$$= \frac{2y_1z_1}{\left(\frac{\partial\Delta'}{\partial B}\right)} = \frac{2x_1t_1}{\left(\frac{\partial\Delta'}{\partial C}\right)} = \frac{2y_1t_1}{\left(\frac{\partial\Delta'}{\partial C'}\right)} = \frac{2z_1t_1}{\left(\frac{\partial\Delta'}{\partial C''}\right)} = \frac{t_1^2}{\left(\frac{\partial\Delta'}{\partial D}\right)},$$

et l'on a

$$\left[\frac{\partial\Delta(\lambda)}{\partial\lambda}\right]_{\lambda=0} = -\Theta' = \varphi(x_1, y_1, z_1, t_1).$$

Si la racine nulle est simple, Θ' n'est pas nul et le point $x_1 y_1 z_1 t_1$ n'est pas sur la surface (S). Mais la démonstration suppose que la surface (S') est un véritable cône [1] : il faut la modifier pour le cas où elle serait un cylindre. Dans ce cas, soit

$$\frac{x}{x_1} = \frac{y}{y_1} = \frac{z}{z_1},$$

une parallèle à l'axe de cylindre, on vérifie aisément les égalités

$$\frac{x_1^2}{\left(\frac{\partial\Delta}{\partial A}\right)} = \frac{y_1^2}{\left(\frac{\partial\Delta}{\partial A'}\right)} = \frac{z_1^2}{\left(\frac{\partial\Delta}{\partial A''}\right)} = \frac{2x_1y_1}{\left(\frac{\partial\Delta}{\partial B''}\right)} = \frac{2z_1x_1}{\left(\frac{\partial\Delta}{\partial B'}\right)} = \frac{2y_1z_1}{\left(\frac{\partial\Delta}{\partial B}\right)}.$$

Si nous appelons alors $\varphi'(x, y, z)$ l'ensemble des termes du second degré en x, y, z de la fonction $\varphi(x, y, z, t)$, nous aurons

$$-\theta' = \varphi'(x_1, y_1, z_1).$$

Cette expression n'est donc nulle que si la surface (S) a une génératrice (réelle ou imaginaire) parallèle à l'axe du cylindre (S'). Ce cas, par une extension de langage connue, rentre donc dans le précédent [2].

Donc, si toutes les racines de l'équation en λ sont

---

(1) On se contente, en général (*voir*, par exemple, le Mémoire de Painvin et la Note de M. Carvallo), de donner les théorèmes relatifs aux cônes ou aux plans se coupant. Il m'a paru intéressant de montrer que la méthode employée s'applique à tous les cas, sans faire appel aux méthodes de transformation.

(2) Pour être complet, il est utile de remarquer que la démonstration ci-dessus tombe elle-même en défaut si tous les mineurs, sauf un, par exemple $\frac{\partial\Delta}{\partial A}$, se réduisent à zéro. Mais, dans ce cas, θ' devient $-\alpha\frac{\partial\Delta}{\partial A}$, et $\alpha = 0$ exprime précisément que le cylindre a ses génératrices parallèles à une direction asymptotique de l'autre quadrique.

simples, l'intersection des deux quadriques présentera le même aspect que l'intersection (sans point double) de deux cônes ou cylindres n'ayant entre eux aucune relation de position particulière.

b. Théorème II. — *A toute racine double de l'équation en* λ *correspond un cône ayant son sommet sur toutes les quadriques du faisceau, ou un cylindre dont l'axe est une direction asymptotique commune à toutes les quadriques du faisceau.* (Nous supposons toujours, pour le moment, les cônes indécomposables.)

Ce théorème est démontré par ce qui précède.

Deux cas peuvent ici se présenter : 1° *Une seule racine est double.* L'intersection est une quartique à point double réel ou isolé : toutes les quadriques ont un même plan tangent en ce point. 2° *Il y a deux racines doubles.* Il leur correspond deux cônes ayant chacun son sommet sur toutes les surfaces du faisceau et en particulier sur l'autre cône. Les deux cônes et, par suite, toutes les quadriques ont une génératrice commune; le reste de l'intersection est une cubique gauche, coupant la génératrice commune en deux points distincts.

c. Théorème III. — A *toute racine triple de l'équation en* λ *correspond un cône ayant son sommet sur toutes les surfaces du faisceau et de plus le plan tangent à toutes ces surfaces en ce point est aussi tangent au cône.*

Il suffit, pour le voir, de mettre l'équation du cône sous la forme

$$A''z^2 - 2B''xy = 0,$$

ce qui est toujours possible. La quantité Φ de l'équa-

tion (5) devient alors

$$B''(B'\gamma''^2 - 2A'\gamma\gamma'),$$

et, comme B″ ne peut être nul (cône indécomposable), il faut, pour acquérir une racine triple, annuler le second facteur, ce qui exprime précisément la condition de l'énoncé.

Dans ce cas, toutes les quadriques du faisceau ont encore un même plan tangent en un point P; leur intersection est une courbe du quatrième ordre indécomposable et présentant au point P un rebroussement.

d. Il reste à examiner la singularité introduite par une racine quadruple.

D'après le cas précédent, on pourra écrire l'équation du cône S′

$$A''z^2 - 2B''xy = 0,$$

et prendre le plan des zy tangent à la surface S. L'équation de cette dernière devient alors

$$\varphi(x, y, z, t) = \alpha x^2 + \alpha' y^2 + \alpha'' z^2 + 2\beta yz + 2\beta' zx + 2\beta'' xy + 2\gamma x = 0,$$

et l'équation (5),

$$\Delta\lambda^4 - \alpha'\gamma^2 A''\lambda^3 = 0.$$

Pour qu'il y ait une racine quadruple, il faut et il suffit que

$$\alpha'\gamma^2 A'' = 0$$

et, comme $A'' \neq 0$, que $\gamma = 0$ ou $\alpha' = 0$.

Si $\gamma = 0$, les deux surfaces sont des cônes de même sommet, comme toutes les surfaces du faisceau : l'équation (5) est indéterminée ; ce n'est pas le cas actuel.

Si $\alpha' = 0$, la surface S contient l'axe des y : *les surfaces du faisceau ont toutes une génératrice commune,*

et le reste de l'intersection est une cubique gauche tangente à la génératrice commune. Le point de contact est le sommet du cône quadruple. Les quadriques ont en ce point un même plan tangent.

II.

$\Delta(\lambda)$ EST NUL, AINSI QUE TOUS SES MINEURS DU PREMIER ORDRE, MAIS UN MINEUR AU MOINS DU SECOND ORDRE EST DIFFÉRENT DE ZÉRO.

Le cône qui correspond à cette valeur de λ se réduit à un système de deux plans distincts. Nous supposerons, comme précédemment, que ce cône soit la surface S' et, par suite, que la racine λ, qui annule $\Delta(\lambda)$ et ses premiers mineurs, soit zéro. Δ' et Θ', qui est une fonction linéaire des premiers mineurs de Δ', sont nulles.

L'équation (5) devient alors

$$\Delta\lambda^4 - \Theta\lambda^3 + \Phi\lambda^2 = 0.$$

a. Ainsi *la racine nulle est double lorsque le cône correspondant est un système de deux plans distincts.*

Si l'on suppose les deux plans distincts se coupant, on peut les prendre pour plans des xy et des yz et Φ a pour valeur $\gamma'^2 - \alpha'\delta$; si les deux plans sont parallèles, on peut prendre pour leurs équations $z = 0$ et $z = h$, et la fonction Φ a pour valeur $h^2(\beta''^2 - \alpha\alpha')$. Par conséquent, l'intersection des deux plans qui constituent le cône dégénéré coupe la surface (S) et, par suite, toutes les surfaces du faisceau en deux points distincts.

Cela posé, nous avons trois cas à distinguer :

1° Les deux racines non nulles de l'équation en λ sont distinctes. Il leur correspond deux cônes n'ayant pas leurs sommets sur l'intersection : cette dernière se

compose donc de deux courbes planes non évanouissantes et ne se touchant pas. Les quadriques sont bitangentes.

2° Les deux racines non nulles sont égales entre elles, mais n'annulent pas les premiers mineurs de $\Delta(\lambda)$.

Le cône double qui leur correspond est un cône effectif ayant son sommet sur l'intersection : celle-ci doit donc être composée de deux courbes planes dont une passera au sommet du cône, c'est-à-dire sera un système de deux droites. Les quadriques se touchent en trois points.

3° Les deux racines non nulles sont égales entre elles et annulent les premiers mineurs de $\Delta(\lambda)$.

Il leur correspond un système de deux plans distincts. L'intersection, devant être dans quatre plans différents, ne peut se composer que de droites. C'est un quadrilatère gauche. Les quadriques se touchent en quatre points qui sont les quatre sommets du quadrilatère.

b. Supposons maintenant la fonction Φ nulle. La racine nulle de l'équation en λ devient triple. *L'intersection des deux plans distincts est tangente à la surface.*

La racine qui reste correspond nécessairement à un cône véritable qui n'a pas son sommet sur l'intersection. Il est coupé par les deux plans suivant deux coniques, tangentes entre elles, qui constituent l'intersection des deux quadriques. Ces deux surfaces ont un plan tangent commun au point de contact des deux coniques.

c. La racine qui annule $\Delta(\lambda)$ et ses premiers mineurs est quadruple, $\Theta = 0$.

Je prendrai pour plan de coordonnées les deux plans qui composent la surface (S′), pour axe des y leur intersection, pour origine le point où les deux coniques

se touchent (*voir* le paragraphe précédent), point où toutes les quadriques du faisceau ont un même plan tangent qui passe évidemment par Oy. Alors l'équation de (S′) devient

$$2B'zx = 0,$$

et, dans l'équation de la surface (S), $\delta = 0$; $\Phi = 0$ donne $\gamma' = 0$; Θ devient égal à $B'\alpha'\gamma\gamma''$.

D'où trois cas à considérer :

1° $\alpha' = 0$. — Le plan des y est sur les deux surfaces. Toutes les quadriques du faisceau se raccordent suivant Oy et ont de plus en commun deux génératrices de l'autre système. Le cône quadruple se compose de deux plans passant l'un par Oy et par une génératrice commune, l'autre par Oy et par l'autre génératrice commune.

2° $\gamma = 0$. — Le plan des xy, qui compose une partie du cône (S′), est tangent à la surface (S). L'intersection se compose alors d'une véritable conique et de deux droites qui se coupent sur cette conique : le plan de ces deux droites est tangent à la conique.

3° $\gamma'' = 0$. C'est le même cas que le précédent.

III.

TOUS LES MINEURS DU SECOND ORDRE DE $\Delta(\lambda)$ SONT NULS, MAIS UN ÉLÉMENT AU MOINS EST DIFFÉRENT DE ZÉRO.

L'équation (5) se réduit à

$$\Delta\lambda^4 - \Theta\lambda^3 = 0.$$

Donc la racine nulle est triple, lorsque le cône correspondant se compose de deux plans confondus.

a. Θ n'est pas nul. A la racine non nulle correspond un cône véritable n'ayant pas son sommet sur la

surface. Les quadriques sont inscrites dans un cône le long d'une même conique.

Si la conique est véritable, on ne peut pas avoir, dans le cas actuel, de racine quadruple : car, en prenant le plan de cette conique pour plan des xy, une tangente à la conique pour axe des y, un plan tangent à la surface (S) pour plan des zy, enfin l'axe des z conjugué de celui des y dans le plan tangent, l'équation (5) devient

$$\lambda \alpha' \alpha'' + \alpha' A'' = 0.$$

A n'est pas nul; α' ne peut l'être sans qu'il y ait une indétermination complète.

b. Supposons alors la conique, située dans le plan double, évanouissante. $\Theta = 0$ et l'équation se réduit à

$$\Delta \lambda^4 = 0.$$

Il y a toujours une racine quadruple : ce cas est donc séparé du précédent. Les deux quadriques se raccordent le long de deux droites concourantes.

IV.

TOUS LES ÉLÉMENTS DE $\Delta(\lambda)$ SONT NULS (POUR LA VALEUR DE λ CONSIDÉRÉE).

Les deux quadriques coïncident. La racine de l'équation en λ est quadruple.

V.

L'ÉQUATION EN λ EST UNE IDENTITÉ.

Toutes les quadriques du faisceau sont des cônes ou des systèmes de plans. Nous pouvons éliminer en bloc les cas de cônes ayant un sommet commun à distance finie ou infinie, ces cônes pouvant d'ailleurs dégénérer

en plans : car toutes les variétés possibles se rencontreront en joignant par des droites tous les points d'une des variétés de coniques à un point situé hors du plan de la conique.

Supposons donc le cône (S′) non décomposable : son sommet sera sur l'autre cône qui, réciproquement, aura son sommet sur le premier (s'il ne se décompose pas). Cela résulte du théorème I. Enfin le second théorème nous apprend que le premier cône aura un plan tangent commun avec le second. Les deux cônes se touchent donc le long d'une génératrice : le reste de l'intersection est une conique. Si l'on observe que le faisceau de cônes comprend le cône composé du plan tangent commun et du plan de la conique commune, plan qui, exceptionnellement, peut se confondre avec le plan tangent, si l'on admet aussi que le second cône peut dégénérer en deux plans, on aura toutes les variétés que comporte ce cas.

La discussion de ce cas se ferait suivant les mêmes principes que précédemment. Ainsi, Δ et Δ' étant nuls, les deux surfaces S et S′ seraient des cônes véritables, des cylindres, des systèmes de plans ou des plans confondus. Dans chacun de ces cas les coefficients Θ, Θ', Φ seraient nuls soit parce que les mineurs d'un certain ordre de Δ ou de Δ' seraient nuls, soit par suite des positions mutuelles des deux cônes. Ce qui a été dit dans les paragraphes précédents suffit pour guider dans la discussion actuelle, et nous nous bornerons à renvoyer le lecteur pour le résumé des cas qui peuvent se présenter au Mémoire de Painvin (*Nouvelles Annales*, p. 213 et 214; 1869). Il conviendra cependant d'ajouter à l'énumération détaillée de Painvin le cas de deux quadriques composées l'une d'un plan P et d'un plan Q, l'autre du même plan P et d'un autre plan Q′ : Painvin

ayant cru, avec raison d'ailleurs, devoir signaler à part les cônes de même sommet, les cylindres parallèles, etc., il m'a semblé utile de signaler un cas intéressant où toutes les quadriques du faisceau sont des systèmes de plans. Il y en a encore d'autres que les lecteurs des *Nouvelles Annales* découvriront, comme je l'ai indiqué plus haut, en annulant, non seulement Δ ou Δ', mais encore leurs mineurs.

a. Δ et Δ' sont nuls sans que leurs premiers mineurs soient nuls. Ce sont de véritables cônes (ou cylindres), et l'on peut appliquer les théorèmes de l'article premier : ils ont chacun leur sommet sur la surface de l'autre, et un plan tangent au premier cône en son sommet est aussi tangent à l'autre ($\Phi = 0$). Les deux cônes sont donc tangents tout le long d'une génératrice; le reste de l'intersection est une courbe plane. Il peut aussi arriver ici que les deux cônes aient même sommet.

b. Δ' est nul sans que ses premiers mineurs le soient; Δ est nul ainsi que ses mineurs du premier ordre. La surface (S') est un véritable cône; (S) est un système de deux plans distincts. Les théorèmes de l'article I s'appliquent toujours : le cône (S') a son sommet sur la surface (S) et un des deux plans qui composent la surface (S) touche le cône (S'). C'est au point de vue du faisceau de cônes le même cas que le précédent.

c. Δ' est nul sans que ses premiers mineurs le soient; Δ est nul ainsi que ses mineurs du premier et du second ordre. (S) est un plan double qui passe par le sommet du premier cône. C'est encore un cas particulier (cônes tangents entre eux le long de deux génératrices).

Il n'y a plus à associer que des couples de plans.

OBSERVATIONS SUR UN MÉMOIRE DE M. HENRI POINCARÉ, PUBLIÉ EN 1887, DANS LES « ACTA MATHEMATICA » DE STOCKHOLM, ET RELATIF AUX RÉSIDUS DES INTÉGRALES DOUBLES;

PAR M. MAXIMILIEN MARIE.

Je n'ai eu que par hasard connaissance de ce Mémoire, où cependant je suis pris à partie. Il m'a été communiqué, le 1er février 1890, par un professeur de Mathématiques spéciales, à l'occasion de mes conférences.

J'ai lu ce Mémoire avec d'autant plus d'intérêt que j'avais moi-même traité la question près de quinze ans auparavant (*Journal de l'École Polytechnique*, 1874, et *Théorie des fonctions de variables imaginaires*, 1875 et 1876).

Je me trouve en accord à peu près complet avec M. Poincaré relativement à une partie de son Mémoire et en désaccord absolu relativement à l'autre partie.

Les deux Parties dans lesquelles je divise le Mémoire de M. Poincaré traitent de questions différentes.

Dans la première Partie, M. Poincaré se propose de déterminer les résidus d'une intégrale double de la forme

$$\iint \frac{P(X, Y)}{Q(X, Y)\, R(X, Y)}\, \partial X\, \partial Y,$$

où P, Q et R désignent des fonctions entières, et il donne, *sans démonstration*, pour représenter ces ré-

sidus, les deux intégrales simples

$$J = 2\pi\sqrt{-1}\int \frac{P(x, y)}{R(x, y)\frac{\partial Q}{\partial y}}\,\partial x$$

et

$$J' = 2\pi\sqrt{-1}\int \frac{P(x, y)}{Q(x, y)\frac{\partial R}{\partial y}}\,\partial x,$$

où x et y doivent successivement satisfaire aux équations

$$Q(x, y) = 0 \quad \text{et} \quad R(x, y) = 0.$$

Je retrouve ces formules comme applications immédiates de la règle que j'avais donnée en 1874 pour former les résidus de la cubatrice $\int\int \partial X\, \partial Y$ d'une surface

$$F(X, Y, Z) = 0,$$

dans le parcours d'une courbe

$$f(X, Y) = 0$$

le long de laquelle Z serait infini. Mais ma démonstration ne suppose rien relativement aux fonctions P, Q, R, qui peuvent être irrationnelles, transcendantes, ou même définies implicitement. D'un autre côté, M. Poincaré ne dit pas entre quelles limites il faudrait prendre respectivement les intégrales J et J' pour obtenir les résidus de l'intégrale double.

M. Poincaré recherche ensuite les périodes des intégrales J et J'. Ces périodes se rapportent soit aux contours fermés que présenteraient les lieux $Q = 0$, $R = 0$; soit aux points doubles des courbes $Q = 0$, $R = 0$ et $QR = 0$.

Rien à dire des premières.

Quant aux autres, M. Poincaré les exprime de la manière suivante :

$$4\pi^2 \frac{P(a,b)}{R(a,b)\sqrt{\left(\frac{\partial^2 Q}{\partial a\, \partial b}\right)^2 - \frac{\partial^2 Q}{\partial a^2}\frac{\partial^2 Q}{\partial b^2}}}$$

et

$$4\pi^2 \frac{P(a',b')}{Q(a',b')\sqrt{\left(\frac{\partial^2 R}{\partial a'\, \partial b'}\right)^2 - \frac{\partial^2 R}{\partial a'^2}\frac{\partial^2 R}{\partial b'^2}}}$$

seraient respectivement les périodes de J et de J′, relatives aux points doubles (a, b) de $Q = 0$ et (a', b') de $R = 0$; et les valeurs de

$$4\pi^2 \frac{P(a'', b'')}{\frac{\partial Q}{\partial a''}\frac{\partial R}{\partial b''} - \frac{\partial Q}{\partial b''}\frac{\partial R}{\partial a''}}$$

seraient les périodes communes à J et à J′, relatives aux points de rencontre (a'', b'') des deux courbes $Q = 0$ et $R = 0$.

M. Poincaré ne donne non plus aucune démonstration de ces formules; mais je les retrouve immédiatement par application de la règle que j'avais donnée en 1874 pour le calcul des résidus relatifs aux points doubles.

Sauf quelques points de détail, l'accord entre M. Poincaré et moi est donc à peu près complet jusqu'ici. Je signalerai cependant ce fait que M. Poincaré a omis les résidus qui se rapporteraient aux points multiples d'ordres supérieurs.

Mais M. Poincaré croit établir, dans la seconde Partie de son Mémoire, cette proposition entièrement neuve et qui aurait une portée incalculable : que *les périodes de l'intégrale double* $\iint \frac{P}{Q.R}\,\partial X\,\partial Y$ *seraient exactement celles des deux intégrales* J *et* J′ *cumulées.*

Il est facile de démontrer, par un exemple, l'inexactitude de cette proposition.

Je prends l'intégrale double

$$\int\int \frac{f(X,Y)(M_1X+N_1Y)+f_1(X,Y)(MX+NY)}{(MX+NY)(M_1X+N_1Y)}\partial X\,\partial Y,$$

où $f(X,Y)$ et $f_1(X,Y)$ sont deux polynômes quelconques du second degré; cette intégrale double est la cubatrice de la surface

$$Z=\frac{f(X,Y)}{MX+NY}+\frac{f_1(X,Y)}{M_1X+N_1Y}$$

et elle est la somme des cubatrices des deux surfaces

$$Z=\frac{f(X,Y)}{MX+NY} \quad \text{et} \quad Z=\frac{f_1(X,Y)}{M_1X+N_1Y},$$

qui sont deux hyperboloïdes (sauf les cas particuliers).

Chacune des deux intégrales

$$\int\int\frac{f(X,Y)}{MX+NY}\partial X\,\partial Y \quad \text{et} \quad \int\int\frac{f_1(X,Y)}{M_1X+N_1Y}\partial X\,\partial Y$$

a donc une période et ces deux périodes appartiennent à leur somme.

Or les intégrales J et J' relatives aux lignes

$$MX+NY=0 \quad \text{et} \quad M_1X+N_1Y=0,$$

calculées par la formule de M. Poincaré, sont respectivement

$$J=2\pi\sqrt{-1}\int\frac{f\left(X,-\frac{M}{N}X\right)}{N}\partial X$$

et

$$J'=2\pi\sqrt{-1}\int\frac{f_1\left(X,-\frac{M_1}{N_1}X\right)}{N_1}\partial X$$

et elles n'admettent pas de périodes, puisqu'elles sont algébriques.

La fin du Mémoire de M. Poincaré passe mon entendement. J'y trouve, page 354 des *Acta* :

« Nous avons vu que l'intégrale double $\int\int \frac{P\,\partial\xi\,\partial\eta}{Q-\alpha}$ est égale à l'intégrale simple abélienne $J = 2i\pi \int \frac{P\,\partial\xi}{\frac{\partial Q}{\partial\eta}}$ relative à la courbe algébrique $Q = \alpha$. »

Je ne comprends pas comment une intégrale double, dont la valeur numérique dépend d'un contour, pourrait être égale à une intégrale simple, dont la valeur numérique dépend seulement des valeurs extrêmes d'une seule variable.

Je sais bien, par ce qui précède dans son Mémoire, que M. Poincaré croit, à tort du reste, que les deux intégrales, dont il s'agit ici, ont les mêmes périodes. Mais quand même il en serait ainsi !

Deux intégrales, même de même espèce, c'est-à-dire toutes les deux simples ou toutes les deux doubles, seraient-elles donc égales par cela seulement qu'elles auraient les mêmes périodes?

Est-ce que les quadratrices d'une même courbe placée successivement de différentes manières dans le plan de deux axes fixes sont égales? Est-ce que les cubatrices d'une même surface, placée successivement de différentes manières, dans l'espace, par rapport à trois axes fixes, sont égales? Et cependant la permanence des périodes, dans les deux cas, a été démontrée par moi, en 1853, ainsi que le constate le Rapport de MM. Cauchy et Sturm, présenté à l'Académie en 1854.

Au reste, un exemple simple suffira pour montrer que l'hypothèse de M. Poincaré est inexacte.

Je prends l'intégrale double

$$I = \iint \frac{Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F}{y - \alpha} \, \partial x \, \partial y$$

qui est la cubatrice, transcendante, d'un hyperboloïde; l'intégrale simple correspondante, J, est alors

$$J = 2i\pi \int (Ax^2 + B\alpha x + C\alpha^2 + 2Dx + 2E\alpha + F)\, \partial x;$$

elle est algébrique : est-ce que

$$I = J?$$

Quant aux conséquences où ces prémisses mènent M. Poincaré, je ne les discuterai pas, parce que je n'en saisis pas toujours les énoncés et qu'une telle discussion m'entraînerait dans des détails qui ne sauraient avoir place ici.

SUR UNE COURBE DÉFINIE PAR LA LOI DE SA RECTIFICATION;

PAR M. M. D'OCAGNE,

Ingénieur des Ponts et Chaussées.

---

1. Quand on observe le petit nombre des courbes classiques dont l'arc est exprimable au moyen des fonctions élémentaires, voire des fonctions elliptiques, ou même, en général, le peu de simplicité de cette expression quand elle est possible, on est tenté de rechercher quelles sont les courbes qui présentent les lois de rectification les plus simples.

Une idée qui se présente tout naturellement, pour préciser la question, consiste à faire correspondre à chaque point de la courbe un point d'une droite, sui-

vant une loi géométrique simple, et à déterminer la courbe par la condition que l'arc compris entre deux points de cette courbe soit égal au segment compris entre les points correspondants de la droite.

C'est cette idée qui a déjà donné naissance à nos recherches sur les courbes que nous avons appelées *isométriques de droites* ([1]).

La loi de correspondance la plus simple consiste à placer les points correspondants sur des droites concourantes. C'est à ce cas que sont consacrés le n° 5 de notre première Note ([2]) et la seconde tout entière.

2. Nous allous ici examiner un nouveau cas qui présente l'intérêt de pouvoir être traité géométriquement.

Établissons entre les points de la courbe cherchée et les points de la droite que nous nous donnons le mode de correspondance ainsi défini : *La distance entre les points correspondants est constante.*

Soient B un point pris sur la courbe cherchée, A le point correspondant de la droite d donnée ; AB étant de longueur constante, si la normale en B à la courbe c coupe au point N la perpendiculaire élevée en A à la droite d, N est le centre instantané de rotation de AB et on a le point P où AB touche son enveloppe en abaissant de N la perpendiculaire NP sur AB. Or, si $d(B)$ et $d(A)$ sont les différentielles des arcs décrits par les points B et A, on a

$$\frac{d(B)}{d(A)} = \frac{NB}{NA};$$

([1]) *Bulletin de la Société mathématique*, t. XIII, p. 71, et t. XVII, p. 171.

([2]) A l'endroit cité, pour les expressions (7), (8) et (9) de y, on doit, dans le second terme de la parenthèse, remplacer x par $\frac{x}{u}$.

et puisque, par hypothèse, ces arcs doivent être égaux, on a

$$NB = NA.$$

Le triangle NBA étant isoscèle, le point P est le milieu de AB et PA est constant. Il s'ensuit que l'enveloppe de AB ou le lieu de P est une *tractrice t* ayant la droite *d* pour asymptote. La courbe cherchée, qui est le lieu du point B, s'obtient donc ainsi : *Prendre, sur chaque tangente à une tractrice, le symétrique, par rapport au point de contact, du point où cette tangente coupe l'asymptote de la courbe.*

La courbe ainsi obtenue appartient à la catégorie de celles que M. Sylvester appelle *syntractrices* (¹).

Le problème se trouve ainsi résolu. Remarquons en passant que notre courbe est celle qu'on doit faire décrire à l'extrémité d'une bielle, dont l'autre extrémité est articulée à une tige animée d'un mouvement rectiligne, pour qu'à chaque instant les deux extrémités de la bielle aient même vitesse, en grandeur.

3. Cette courbe peut encore se déduire de la tractrice, en ne faisant intervenir que les points de celle-ci et non ses tangentes.

A cet effet, O étant un point fixe quelconque de la droite *d*, prenons le symétrique Q de O par rapport à P, puis le symétrique C de Q par rapport à B. Puisque $OQ = 2OP$, le lieu du point Q est homothétique à celui du point P par rapport au point O ; c'est donc une tractrice θ. D'ailleurs, le point P étant à la fois le milieu de AB et le milieu de OQ, QB est parallèle et égal à OA, et il en est de même de BC. Par suite, $OC = AB$ et le

---

(¹) Salmon, *Courbes planes*, traduction Chemin, p. 405.

lieu du point C est un cercle γ de centre O et de rayon égal à AB.

Ainsi, *la courbe cherchée c est le lieu du milieu d'un segment de droite parallèle à l'asymptote d'une tractrice* θ, *et dont les extrémités s'appuient d'une part sur cette tractrice, de l'autre sur un cercle* γ *ayant son centre sur l'asymptote et un rayon égal à la tangente constante de la tractrice.*

On doit associer les points du cercle γ et de la tractrice θ de façon qu'aux extrémités du segment de droite QC les convexités des deux courbes soient de même sens.

On peut dire plus simplement que *la courbe cherchée est la courbe moyenne* ([1]) *de la tractrice* θ *et du cercle* γ *relativement à la direction de l'asymptote de la tractrice.*

4. Ce mode de génération résulte immédiatement d'un théorème général obtenu dans notre première Note sur les isométriques de droite ([2]).

En effet, si du point A comme centre on décrit avec AB pour rayon un cercle qui coupe la droite d en B_1, l'arc BB' de la courbe étant, par hypothèse, égal au segment de droite AA', l'est aussi au segment $B_1 B'_1$. Par suite, la courbe cherchée est isométrique de la droite d par rapport au système formé par les cercles de rayon AB, c'est-à-dire par les positions successives du cercle ci-dessus désigné par γ lorsque son centre décrit la droite d.

Donc, en vertu du théorème général auquel nous venons de faire allusion, on aura la courbe cherchée en

---

([1]) *Bulletin de la Société mathématique*, t. XIII, p. 74.
([2]) *Ibid.*, p. 73 et 74.

prenant la courbe moyenne du cercle γ et d'une quelconque des trajectoires orthogonales du système qui vient d'être défini, c'est-à-dire de la tractrice θ.

On retrouve ainsi le résultat énoncé au numéro précédent.

5. Voici encore quelques propriétés géométriques de la courbe qui nous occupe.

La détermination de son centre de courbure résulte d'un théorème que nous avons fait connaître dernièrement ([1]) et que nous rappelons ici :

Si en chaque point P *d'une courbe quelconque on porte sur la tangente, de part et d'autre du point* P, *des longueurs égales et constantes* PA *et* PB, *les centres de courbure des lieux décrits par les points* A *et* B *sont en ligne droite avec le point* P.

L'application de ce théorème au cas qui nous occupe montre que *le centre de courbure* Ω *répondant au point* B *est le milieu de la distance du point* B *au centre de courbure correspondant* N *de la tractrice* θ.

6. Occupons-nous maintenant de l'aire de la courbe. Prenons, à cet effet, pour centre O du cercle γ le point où la tangente au point de rebroussement R de la tractrice θ rencontre l'asymptote d de cette courbe.

Puisque le milieu du segment QC parallèle à d se trouve sur la courbe c, le double de l'aire comprise entre la courbe c, la droite OR et la droite QC est égal à l'excès du demi-segment de cercle RKC sur l'aire comprise entre les mêmes droites et la tractrice θ. On a

([1]) *Association française pour l'avancement des Sciences*, 1889.

donc

$$2 \text{ aire RKB} = \text{aire RKC} - \text{aire RKQ}$$
$$= \text{aire RKC} - (\text{aire RO}q\text{Q} - \text{aire KO}q\text{Q}).$$

Mais nous avons fait voir (¹) que

$$\text{aire RO}q\text{Q} = \text{aire RKC}.$$

Il vient donc

$$2 \text{ aire RKC} = \text{aire KO}q\text{Q}.$$

Or, si M est le milieu de KC, on a

$$\text{BM} = \frac{\text{KC}}{2} - \text{KB} = \frac{\text{KC}}{2} - \frac{\text{KC} - \text{KQ}}{2} = \frac{\text{KQ}}{2}.$$

Par suite,

$$2 \text{ aire M}mb\text{B} = \text{aire KO}q\text{Q},$$

et

$$\text{aire RKB} = \text{aire M}mb\text{B}.$$

Lorsque le point K est au-dessous du point D de la courbe c, le rectangle MmbB représente la différence comprise entre la demi-boucle RD et le triangle mixtiligne formé par les droites OR et QC et la courbe c. Cette différence tend vers zéro lorsque QC tend vers l'asymptote. En d'autres termes, *l'aire comprise dans la boucle de la courbe c est égale à l'aire comprise entre cette courbe et son asymptote.*

7. Soient AB et A'B' deux positions infiniment voisines de AB, se rencontrant en P. Elles coupent la courbe c respectivement en M et en M'. Appelons σ l'aire comprise entre AB et la concavité de la courbe c, σ_1 l'aire comprise entre AB, la convexité de la courbe c

(¹) *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1884, p. 554, et brochure *Coordonnées parallèles et axiales*, p. 45.

et l'asymptote de cette courbe. Nous avons

$$d\sigma = \text{aire MPM}' - \text{aire PBB}',$$
$$d\sigma_1 = - \text{aire AMM}'\text{A}'.$$

Donc

$$d\sigma - d\sigma_1 = \text{aire MPM}' - \text{aire PBB}' + \text{aire AMM}'\text{A}'$$
$$= \text{aire PAA}' - \text{aire PBB}'.$$

Mais les triangles PAA' et PBB' sont équivalents, aux infiniment petits d'ordre supérieur près. Par suite,

$$d\sigma - d\sigma_1 = 0,$$

et la différence $\sigma - \sigma_1$ est constante. Or nous venons de démontrer que cette différence est nulle lorsque AB coïncide avec OR. Donc

$$\sigma - \sigma_1 = 0,$$

c'est-à-dire que *l'aire comprise entre une position quelconque de la droite* AB *et la concavité de la courbe c est égale à l'aire comprise entre la droite* AB, *la convexité de la courbe c et l'asymptote de cette courbe.*

8. Revenant au problème général défini au n° 1 de cette Note, nous ferons remarquer que la solution de ce problème se ramène toujours à une quadrature lorsque la position du point A de la droite d, correspondant au point B de la courbe, ne dépend que de la projection du point B sur la droite d.

En effet, en prenant la droite d pour axe des x, on voit que l'équation différentielle du problème s'écrit alors

$$dx^2 + dy^2 = [\varphi'(x)\,dx]^2;$$

et l'on a

$$y = \int \sqrt{\overline{\varphi'(x)}^2 - 1}\,dx.$$

9. Le problème se ramène encore à une quadrature lorsque la distance du point A au pied b de la perpendiculaire abaissée de B sur la droite d ne dépend que de la distance Bb du point B à cette droite. Mais, dans ce cas, la solution peut revêtir une forme géométrique remarquable.

Posons, en tenant compte du signe, $b\text{A} = u$, et supposons que cette longueur soit liée à l'ordonnée $b\text{B} = y$ par la relation

$$\varphi(u, y) = 0.$$

Prenons le point A comme origine des coordonnées, l'axe des X étant confondu avec la droite d parcourue dans le sens positif, l'axe des Y étant perpendiculaire au premier, et considérons la courbe dont l'équation est

$$\varphi(-\text{X}, \text{Y}) = 0.$$

Cette courbe s coupera la courbe cherchée c au point B et la droite d en un certain point M.

Lorsqu'on passera d'un point à un autre point B de la courbe c, la courbe s glissera parallèlement à d, sans changer de forme, en engendrant un système (s), et la distance MA restera constante. Mais les segments parcourus par A sont, par hypothèse, égaux aux arcs correspondants décrits par B; il en est de même des segments parcourus par M, et la courbe cherchée est *isométrique de la droite d par rapport au système* (s).

Donc, en vertu du théorème général rappelé plus haut, la courbe cherchée est moyenne par rapport à la direction de la droite d de la courbe s prise dans une quelconque de ses positions, et d'une quelconque des trajectoires orthogonales du système (s), lesquelles sont elles-mêmes les positions successives d'une même courbe t glissant parallèlement à d.

On a ainsi la généralisation de la solution donnée au n° 4.

On peut, pour simplifier le langage, dire que les courbes s et t sont *conjuguées orthogonales par rapport à la direction de la droite d.*

Le résultat précédent s'énoncera dès lors ainsi :

Si, en appelant b la projection de B *sur la droite d, et posant* $bB = y$, $bA = u$, *on définit le mode de correspondance entre les points* A *et* B *par la relation* $\varphi(u, y) = 0$, *on obtient la courbe cherchée en prenant la courbe moyenne, par rapport à la direction de la droite d de la courbe* $\varphi(-x, y) = 0$ *et de sa conjuguée orthogonale suivant cette direction.*

Si la relation φ a la forme $u^2 + y^2 = R^2$, on retombe sur le cas auquel a été consacrée la présente Note.

Si elle a la forme $y = \frac{A}{h} u^h$, A étant une constante, la courbe cherchée est

$$y = \frac{(-1)^h}{2}\left[\frac{A}{h} x^h + \frac{1}{A(h-2)x^{h-2}}\right].$$

On reconnaît là l'équation de la *courbe de poursuite* lorsque le point poursuivi décrit l'axe des x et que le rapport de sa vitesse à celle du point poursuivant est égal à $h - 1$. Lorsque $h = 2$, on retrouve le cas traité au n° 3 de notre première Note, pour lequel le second terme de la parenthèse devient égal à $-\frac{\log x}{A}$.

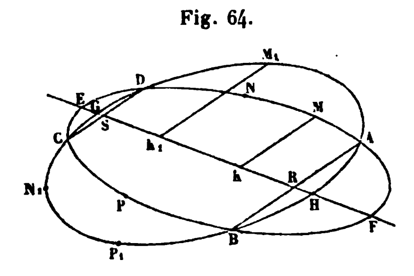
ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE DES PROPRIÉTÉS DES CONIQUES D'APRÈS LEUR DÉFINITION (1);

PAR M. L. MALEYX.

IV. *Construire les points communs de deux coniques situées dans un même plan, ayant un diamètre commun* CONNU, *divisant en parties égales des cordes de direction donnée.*

Supposons d'abord deux coniques à centre ayant le diamètre commun EF; divisant dans l'une et l'autre en

Fig. 64.



parties égales les cordes parallèles à AB, la position du diamètre étant connue, ainsi que la direction de la corde (*fig.* 64).

Nous pouvons supposer, en outre, la première conique définie par trois points M, N, P, qui, d'après la propriété du diamètre, en font connaître trois autres,

(1) Voir t. X (1891), p. 37.

et la deuxième par trois autres points M_1, N_1, P_1. D'après le théorème établi au n° VI, Chapitre II, nous pouvons construire un cercle O passant par les points réels ou imaginaires E, F, où la première conique rencontre le diamètre commun, et de même un cercle O_1 passant par les points G, H, où la seconde rencontre le même diamètre.

Si A, B, C, D sont ces points inconnus, la question se ramène à déterminer les cordes communes AB, CD, ou, ce qui revient au même, les points R et S où elles rencontrent EF.

Menons par les points M et M_1 les parallèles à AB, MK, M_1K_1, coupant EF en K et K_1; désignons par P et p les puissances des points R et K par rapport au cercle O, et par P_1 et p_1 les puissances des points R et K_1 par rapport au cercle O_1; nous aurons, d'après le théorème de Newton,

$$\frac{\overline{AR}^2}{P} = \frac{\overline{MK}^2}{p} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{AR}^2}{P_1} = \frac{\overline{M_1K_1}^2}{p_1};$$

d'où, divisant membre à membre,

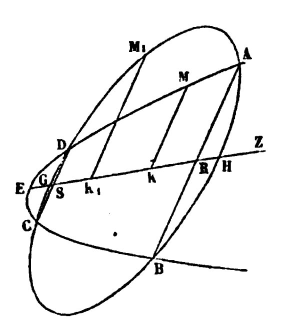
$$\frac{P}{P_1} = \frac{\overline{M_1K_1}^2}{\overline{MK}^2} \times \frac{p}{p_1}.$$

Le rapport des puissances du point R, par rapport aux cercles O et O_1, est donc connu; il en résulte que le point R et le point S, pour lequel il en est de même, se trouvent sur un cercle ayant même axe radical avec les cercles O et O_1; ce cercle peut être construit, comme on l'a fait au n° VI, Chapitre II, et la question est résolue.

Considérons actuellement le cas où l'une des coniques

est une parabole; supposons toujours connu le diamètre commun EZ de position et la direction des cordes, telles que AB, qu'il divise en parties égales (*fig.* 65). Supposons la parabole définie par deux points qui en déterminent deux autres, d'après la propriété du diamètre; il est facile de construire le point E où la courbe coupe le diamètre, car il est le centre de l'involution déterminée sur EZ par ses points de rencontre avec les couples de côtés opposés du quadrilatère inscrit, dont les sommets

Fig. 65.



se déduisent des données, son conjugué étant à l'infini. Les points G, H, où la seconde conique rencontre EZ, sont à l'intersection de cette droite et d'un cercle O_1, qu'on peut construire, si l'on connaît trois points de la courbe, comme dans le cas précédent.

Menons, par le point M de la parabole et par le point M_1 de la seconde conique, MK et M_1K_1 parallèles à la direction de AB et coupant EZ en K et K_1, et proposons-nous de trouver les points R, S où les cordes communes parallèles coupent EZ.

D'après la modification du théorème de Newton établie au n° I du présent Chapitre, quand la courbe est une parabole et quand l'une des sécantes est parallèle

au diamètre, nous aurons

$$\frac{\overline{AR}^2}{ER} = \frac{\overline{MK}^2}{EK}$$

et, d'après le théorème de Newton lui-même,

$$\frac{\overline{AR}^2}{RH \times RG} = \frac{\overline{M_1K_1}^2}{K_1H \times K_1G} = \frac{\overline{M_1K_1}^2}{p_1},$$

si p_1 est la puissance du point K_1 par rapport au cercle O_1.

Divisant membre à membre,

$$\frac{RH \times RG}{ER} = \frac{\overline{MK}^2}{\overline{M_1K_1}^2} \times \frac{p_1}{EK} = a,$$

a étant une longueur qu'on peut construire.

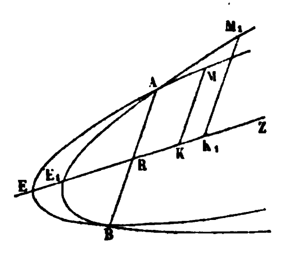
D'après cela, le point R et le point S, sur lequel on peut répéter le même calcul, appartiennent au lieu des points dont la puissance par rapport au cercle O_1 et la distance à une droite quelconque passant par E (perpendiculaire à EZ, si l'on veut), comptée parallèlement à EZ, sont dans le rapport a; ce lieu, qu'on a déterminé d'après le théorème II, Chapitre II, n° I, est un cercle, qui peut être construit et dont l'intersection avec EZ donne la solution de la question.

Enfin les deux coniques peuvent être deux paraboles ayant un diamètre commun.

Supposons que ce diamètre soit EZ, divisant en parties égales les cordes parallèles à AB (*fig.* 66); admettons du reste que nous connaissions des éléments en nombre suffisant pour déterminer ces deux courbes; nous pouvons supposer connus les points E, E_1, où elles rencon-

trent EZ, et les ordonnées parallèles à AB d'un point de chacune d'elles, soient MK, M_1K_1. D'après ce que

Fig. 66.



nous avons vu au n° I du présent Chapitre, nous aurons les égalités

$$\frac{\overline{AR}^2}{ER} = \frac{\overline{MK}^2}{KE} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{AR}^2}{E_1R} = \frac{\overline{M_1K_1}^2}{E_1K_1}.$$

Divisant membre à membre,

$$\frac{E_1R}{ER} = \frac{\overline{MK}^2}{\overline{M_1K_1}^2} \times \frac{E_1K_1}{EK}.$$

Le second membre est connu, on en déduit la position du point R, connaissant le rapport de ses distances aux points E et E_1; la seconde sécante commune passe à l'infini, la question est complètement résolue.

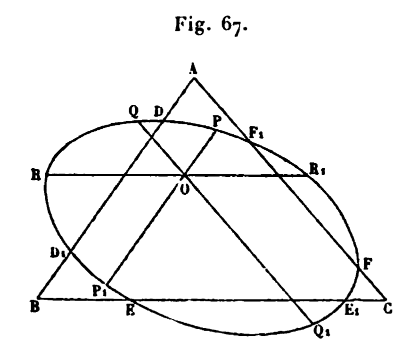
Remarque importante. — Cette question peut être utilisée pour déterminer exactement les points doubles virtuels de la projection sur un plan de l'intersection de deux quadriques.

V. Théorème de Carnot. — Si l'on considère une

conique et un triangle situés dans un même plan, la conique rencontrant en deux points chaque côté du triangle, le produit des six segments déterminés sur chaque côté entre un sommet du triangle et ses points de rencontre avec la conique, ces segments étant comptés dans le sens du mouvement d'un point qui parcourt le périmètre du triangle sans rétrograder, est égal au produit des six segments comptés de la même manière en sens contraire.

Considérons la conique de la *fig.* 67 coupée par les côtés du triangle ABC aux couples des points D et D_1,

Fig. 67.



E et E_1, F et F_1; par un point O du plan, menons les transversales PP_1, QQ_1, RR_1 respectivement parallèles aux côtés AB, AC, BC du triangle.

D'après le théorème de Newton, on a les égalités

$$\frac{AD \times AD_1}{AF \times AF_1} = \frac{OP \times OP_1}{OQ \times OQ_1},$$

$$\frac{BE \times BE_1}{BD \times BD_1} = \frac{OR \times OR_1}{OP \times OP_1},$$

$$\frac{CF \times CF_1}{CE \times CE_1} = \frac{OQ \times OQ_1}{OR \times OR_1};$$

multipliant membre à membre,

$$\frac{AD \times AD_1 \times BE \times BE_1 \times CF \times CF_1}{AF \times AF_1 \times CE \times CE_1 \times BD \times BD_1} = 1,$$

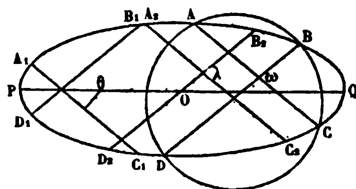
ce qui démontre le théorème énoncé.

Entre autres usages de ce théorème, on peut s'en servir, quand on connaît cinq points d'une conique, pour déterminer le second point de rencontre, avec cette courbe d'une droite quelconque passant par l'un des cinq points donnés.

Propriétés des coniques dont les points communs appartiennent à un cercle.

VI. Soient O (*fig.* 68) une conique; A, B, C, D quatre points communs à cette conique et à un cercle;

Fig. 68.



construisons un des couples de sécantes rectilignes, passant par ces quatre points, soit AC, BD se coupant en ω.

Si par un point quelconque, λ, du plan nous menons les parallèles A_2C_2, B_2D_2 aux droites AC et BD respectivement, les points communs A_2, B_2, C_2, D_2 de ces sécantes avec la conique appartiennent à un même cercle.

En effet, d'après le théorème de Newton, on a l'égalité

$$\frac{\lambda A_2 \times \lambda C_2}{\lambda B_2 \times \lambda D_2} = \frac{\omega A \times \omega C}{\omega B \times \omega D};$$

mais, d'après une propriété connue des sécantes au cercle, le second membre est égal à 1 : donc il en est de même du premier; dès lors, d'après la réciproque de cette propriété, qui est vraie et aussi connue, la proposition énoncée est évidente.

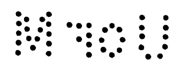
En second lieu, les deux sécantes considérées AC, BD sont également inclinées sur l'un des axes de la courbe, soit PQ.

Pour le démontrer traçons la sécante A_1C_1 parallèle à AC, et faisons passer par A_1 et C_1 un cercle dont le centre, θ, soit situé sur l'axe PQ. Ce cercle passera par les points D_1, B_1 respectivement, symétriques de A_1 et C_1, par rapport à PQ; la droite B_1D_1 sera symétrique de A_1C_1 par rapport à PQ ; ces deux droites se couperont sur PQ et seront également inclinées sur cette droite. Il suffit donc de montrer que B_1D_1 est parallèle à BD : or cela est évident; car, si nous menions par B_1 une parallèle à BD, le second point de rencontre de cette droite et de la conique appartiendrait au cercle θ, d'après la proposition précédente, et, si ce second point était distinct de D_1, c'est-à-dire si B_1D_1 n'était pas parallèle à BD, le cercle θ aurait avec la conique cinq points communs et se confondrait avec elle, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Il résulte de ces deux théorèmes :

1° *Que, si les points communs de deux coniques sont situés sur un cercle, les axes de ces coniques sont parallèles aux bissectrices des angles d'un de leurs systèmes de sécantes rectilignes communs, et, en conséquence, parallèles entre eux ;*

2° *Que, si un des systèmes de sécantes rectilignes*



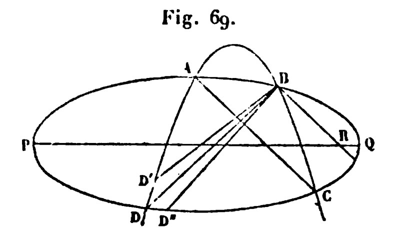
communs de deux coniques est composé de deux droites également inclinées sur l'un des axes de l'une d'elles, les points communs des deux coniques appartiennent à un même cercle; car les points communs de deux parallèles à ces droites menées par un point de l'axe avec la conique correspondante sont symétriques deux à deux par rapport à cet axe et, en conséquence, sur un même cercle;

3° *Que, si deux coniques ont leurs axes parallèles, leurs points communs sont situés sur un cercle, et qu'en conséquence leurs couples de sécantes communes sont composés de droites également inclinées sur les axes.*

Soient, en effet, deux coniques dont on suppose les axes parallèles, et se coupant aux points A, B, C, D (*fig.* 69).

Faisons passer un cercle par les points A, B, C, et menons par le point B, BR parallèle à AC; soit encore PQ l'un des axes et l'une des coniques, ou une parallèle

Fig. 69.



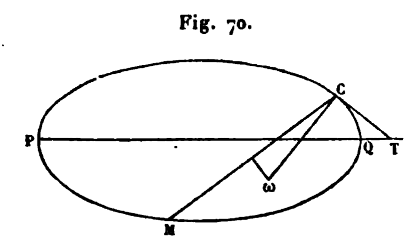
à cet axe. Si le cercle passant par A, B, C passe également par D, le théorème résulte des propositions précédentes; mais il ne peut en être autrement, car s'il rencontrait les deux coniques en des points différents, soient D' et D", les trois droites BR, BD', BD", issues du même point, seraient également inclinées sur une même droite PQ, ce qui est contradictoire avec un théorème connu: la proposition est donc établie.



VII. *Construction du cercle osculateur en un point d'une conique.* — Si trois des points communs d'un cercle variable et d'une conique fixe viennent se réunir en un seul, la limite du cercle variable porte le nom de *cercle osculateur* de la conique en ce point C (*fig.* 70).

Dans ce cas, les trois systèmes de sécantes rectilignes qui passent par les quatre points communs de la conique et du cercle se réduisent à un seul composé de la tangente à la conique au point d'osculation, C, et de la droite CM qui unit ce point au quatrième point commun qui en reste séparé. Dès lors, en construisant la tangente CT au point C de la conique, et la droite CM, de telle sorte que les droites CM et CT soient également inclinées sur l'un des axes de la courbe, soit PQ, puis

Fig. 70.



déterminant le point M, où CM rencontre la conique, le cercle osculateur sera défini par les conditions d'être tangent à CT en C et de passer par le point M.

VIII. *Propriétés de certaines sécantes communes au cercle et à l'hyperbole équilatère.* — On donne le nom d'*hyperbole équilatère* à celle dont les asymptotes sont rectangulaires; il en résulte que les axes de cette courbe sont égaux, et qu'il en est de même de deux diamètres conjugués quelconques d'après le second des théorèmes d'Apollonius. Dès lors le parallélogramme construit sur deux diamètres conjugués est un losange, et les asym-

ptotes qui en sont les diagonales, n° XVII, Ch. I, sont bissectrices des angles de deux diamètres conjugués.

On donne le nom de *cordes supplémentaires* d'une conique à deux cordes unissant un point de la courbe aux extrémités d'un même diamètre. Il en résulte que deux cordes supplémentaires d'une conique sont toujours parallèles à deux diamètres conjugués, ceux qui unissent le centre au milieu de chacune de ces cordes, et de là que deux cordes supplémentaires d'une hyperbole équilatère sont également inclinées sur les asymptotes.

De ces définitions ou propositions, et de celles sur les sécantes à une conique et à un cercle on peut déduire la proposition suivante :

Théorème. — *Si l'une des sécantes communes à un cercle et à une hyperbole équilatère passe par le centre de l'hyperbole, la sécante associée passe par le centre du cercle.*

Soient A, B, C, D quatre points communs à l'hyperbole équilatère dont les asymptotes sont PQ et RS, et à un cercle (*fig.* 71); de plus, supposons que la sécante AD passe par le centre O de l'hyperbole.

Menons AX, AY respectivement parallèles aux asymptotes PQ, RS; la bissectrice AZ de l'angle XAY est parallèle à un des axes de la courbe et fait avec AY un demi-angle droit. Prolongeons CA suivant AL, BA suivant AM, et menons AN parallèle à CD; AN étant parallèle à la corde CD supplémentaire de CA, AN et AL font des angles égaux avec AY, d'où NAY = YAL; AB et CD étant deux cordes communes de l'hyperbole et du cercle sont également inclinées sur les axes; il en résulte que AM, prolongement de BA, et AN, parallèle à

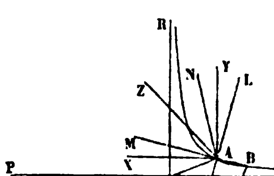


CD, font des angles égaux avec AZ, et ZAN = ZAM. Ajoutant membre à membre

$$ZAN + NAY = ZAM + YAL,$$

et le premier membre étant égal à un demi-droit, la somme des deux membres est égale à un angle droit;

Fig. 71.



donc MAL = CAB = 1 droit, et le cercle circonscrit au quadrilatère ABCD a son centre sur BC, ce qu'on voulait démontrer.

(*A suivre.*)

ERRATA AUX TABLES DE LOGARITHMES DE SCHRÖN.

Log. de 17139, *au lieu de* 9855, *lisez* 9855.

Log. de 18492, *au lieu de* 9839, *lisez* 9839.

BIBLIOGRAPHIE.

Recueil d'exercices sur le Calcul infinitésimal, par *F. Frenet,* Professeur honoraire à la Faculté des Sciences de Lyon. 5e édition, 1 vol. in-8, xiv-536 pages. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1891.

La succession régulière des éditions d'un Livre de cette nature suffit à l'éloge de son auteur. Ce Recueil, auxiliaire de l'enseignement, n'a pu, en effet, conserver la place conquise dès l'abord que grâce aux continuels et laborieux perfectionnements apportés à l'œuvre par son auteur pour la tenir au niveau des exigences de plus en plus grandes des programmes et des examens.

C'est ainsi que ses dimensions ont presque triplé depuis son apparition, qui remonte à 1856.

La précédente édition, notamment, avait réalisé un progrès marqué sur les précédentes par l'addition de questions nombreuses relatives, surtout, à l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Mais, en même temps, une lacune commençait à s'y manifester, résultant de la place nouvelle et de plus en plus large faite chaque jour à l'étude générale des fonctions, et spécialement des fonctions elliptiques, dans l'enseignement de l'Analyse infinitésimale.

Cette lacune est aujourd'hui comblée, grâce à un Appendice étendu, composé par M. Laurent, examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

Cet Appendice présente un heureux choix de nombreux exercices sur la théorie des fonctions d'une variable imaginaire, sur le calcul des résidus, sur les fonctions Θ, H et sur les fonctions elliptiques. Il comprend en outre des problèmes sur les équations aux dérivées partielles et sur les équations aux différentielles totales. Enfin les solutions de ces diverses questions sont précédées de plusieurs Tableaux présentant la réunion de toutes les formules importantes qu'on rencontre dans l'étude des fonctions elliptiques.

Ainsi enrichi encore par ces additions nouvelles, le Recueil de M. Frenet conservera la place incontestée qu'il occupe au premier rang parmi les Ouvrages classiques pour l'étude des hautes Mathématiques. J. C.

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1890.

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES.

Mathématiques.

On donne une surface du second ordre S, un point fixe A sur cette surface et une conique C située dans un plan P.

Les trois droites qui joignent le point A aux sommets A_1, A_2, A_3 d'un triangle T situé dans le plan P rencontrent respectivement la surface S en des points a_1, a_2, a_3 autres que A.

1° Démontrer que le plan $a_1 a_2 a_3$ passe par un point fixe M quand le triangle T se déplace dans le plan P en restant conjugué par rapport à la conique C.

2° Trouver le lieu décrit par le point M, quand la conique C varie en restant circonscrite à un quadrilatère donné.

3° Trouver le lieu décrit par le même point M, quand la conique C varie en restant inscrite dans un quadrilatère donné.

Physique.

I. Densité des gaz. Expliquer comment l'étude complète de la densité d'un gaz peut dispenser de l'étude de sa dilatation.

II. Avant les mesures précises, on pouvait hésiter, pour représenter la loi de la réfraction, entre la formule $\sin i = n \sin r$ et des formules analogues, telles que $i = nr$, $\operatorname{tang} i = n \operatorname{tang} r$. Reprendre complètement la théorie du prisme en substituant ces dernières formules à la formule exacte.

Reconnaître, en particulier, si la propriété du minimum de déviation subsiste toujours, et déterminer le foyer du prisme.

Chimie.

I. Acide sulfureux. Préparation. Propriétés. Décrire les réactions où cet acide intervient, soit directement, soit par ses sels, dans la préparation des différents composés oxygénés du soufre (abstraction faite de tous détails de préparation industrielle).

II. On chauffe avec un excès d'acide sulfurique concentré $3^{gr},320$ d'oxalate neutre de potasse.

Le produit gazeux de la réaction est dirigé dans une enceinte en verre, close, communiquant, d'une part avec un manomètre à mercure, d'autre part avec un matras en porcelaine vernie à l'intérieur, contenant 20^{gr} de chaux vive et 20^{gr} de carbonate de chaux.

L'espace total offert aux gaz est de $1^{lit},300$.

On demande quelle sera la force élastique finale et la composition du gaz, l'enceinte étant maintenue à 0° et le matras en porcelaine étant chauffé à 860°.

On ne tiendra pas compte de la dilatation du gaz contenu dans le matras chauffé à 860°, le volume de ce gaz étant assez petit par rapport à la capacité de l'enceinte pour que cette correction soit négligeable.

La formule de l'oxalate neutre de potasse est $C^4O^6, 2KO$.

La tension de dissociation du carbonate de chaux à 890° est 85^{mm}.

L'équivalent du potassium est 39.

III. L'action de l'eau sur un équivalent de trichlorure de phosphore dégage $63^{cal},6$; celle de la potasse étendue sur un équivalent de trichlorure de phosphore dégage $132^{cal},4$; celle de la potasse étendue sur un équivalent d'acide chlorhydrique étendu dégage $13^{cal},7$.

On demande la chaleur de formation à l'état dissous du phosphite bipotassique.

PHILOSOPHIE.

Mathématiques.

I. On donne quatre points A, B, C, D situés sur la circonférence d'un cercle O. On prend, dans le plan du cercle O, un

point P, et on mène le cercle circonscrit au triangle PAB, et le cercle circonscrit au triangle PCD; ces deux cercles se coupent au point P et en un autre point Q.

1° Trouver le lieu décrit par le point Q quand le point P décrit une droite donnée dans le plan du cercle O.

2° Trouver le lieu décrit par le point Q quand le point P décrit la circonférence d'un cercle donné dans le plan du cercle O.

3° Trouver la ligne sur laquelle devrait rester le point P pour que les cercles circonscrits aux triangles PAB, PCD fussent toujours tangents, quelle que soit la position du point P sur cette ligne.

II. On donne deux cercles tangents intérieurement; le point de contact est O; le diamètre OA du plus grand cercle est égal à a, le diamètre OB de l'autre cercle est égal à b. A un point P de la circonférence du premier cercle on fait correspondre un point Q de la circonférence du second cercle tel que l'angle POQ soit droit. Déterminer le point P de façon que la distance du point O à la droite PQ soit la plus grande possible.

MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES.

Mathématiques et Mécanique.

I. A tout point M d'une parabole on fait correspondre un point m déterminé comme il suit :

Soit N le point de rencontre de la normale en M à la parabole avec l'axe de cette parabole; soit P le point de rencontre de la perpendiculaire à la normale MN menée par le point N et de la parallèle à l'axe de la parabole menée par le point M. Le point m est le point de rencontre de la normale MN avec la perpendiculaire à l'axe de la parabole menée par le point P.

Cela posé, trouver, dans chacun des quatre cas suivants, le lieu du point m que l'on fait ainsi correspondre à un point M d'une parabole.

1° Le point M est fixe, et l'on considère toutes les paraboles qui passent par ce point M et qui ont pour foyer un point donné F.

2° Le point M est fixe, et l'on considère toutes les paraboles qui passent par ce point M et qui ont pour directrice une droite donnée DD'.

3° Le point M est mobile sur une droite donnée TT′ et, pour chaque position du point M, on considère la parabole qui est tangente à la droite TT′ en ce point et qui a pour foyer un point donné F.

4° Le point M est mobile sur une droite donnée TT′, et, pour chaque position du point M, on considère la parabole qui est tangente, en ce point, à la droite TT′, et qui a pour directrice une droite donnée DD′ située dans un plan qui contient la droite TT′.

II. On donne un losange OACB; par le sommet C on mène une droite quelconque qui rencontre la droite OA en un point D et la droite OB en un point E. On mène les droites AE, BD, et l'on désigne par la lettre M leur point de rencontre.

1° Montrer que, quand la droite DCE tourne autour du point C, le point M décrit une courbe fermée, circonscrite au triangle OAB, et construire la tangente au point A et la tangente au point B à cette courbe.

2° Soit θ l'angle donné AOB; soit λ l'angle variable formé par la droite mobile CD, prise dans le sens CD, avec la droite fixe BC, prolongée au delà du point C dans le sens BC. On suppose d'abord l'angle λ compris entre $0°$ et $180° - \theta$, et, dans ce cas, on désigne par α l'angle BAM et par β l'angle ABM; former, dans ces conditions, l'équation qui lie les angles variables α, λ et l'angle θ, et l'équation qui lie les angles β, λ et θ. Indiquer, dans le cas où λ est compris entre $180° - \theta$ et $180°$, quelle signification il faut donner aux lettres α et β pour que les équations trouvées dans le cas de λ compris entre $0°$ et $180° - \theta$ soient encore applicables.

Former l'équation qui lie α, β, et l'angle donnée θ, quel que soit λ.

Calculer, en fonction de θ, les valeurs de α et de β qui satisfont au système d'équations composé de l'équation entre α, β et θ, trouvée ci-dessus et de l'équation $\alpha + \beta = \theta$. — Cas d'indétermination. Interprétation géométrique.

SECONDE.

Algèbre et Géométrie.

I. Résoudre l'équation

$$1 + \frac{4x^2}{2x^2 + 8ax} + \frac{27a^2}{2x^2 + 7ax - 4a^2} = \frac{6a}{2x - a}.$$

II. Un losange ABCD, dont les diagonales AC et BD ont pour longueur respective $2a$ et a, est la base d'un prisme droit illimité : sur les arêtes latérales de ce prisme on porte, dans le même sens, les longueurs

$$AA' = 3a, \qquad BB' = 4a, \qquad CC' = a.$$

1° Calculer le volume du solide compris entre le plan des points A', B', C' et la base du prisme.

2° Évaluer la surface totale du même solide.

TROISIÈME.

Arithmétique, Algèbre et Géométrie.

I. Quelle est la plus petite valeur de la différence entre deux nombres entiers qui sont l'un multiple de 105, l'autre multiple de 504?

Quels sont les deux nombres dont la différence répond à l'énoncé, et qui ont 1 270 080 000 pour somme de leurs carrés?

II. On considère le quadrilatère inscriptible convexe ABCM : les sommets ABC sont fixes, mais le sommet M est mobile.

1° Trouver le lieu géométrique du point de rencontre P des droites qui joignent les milieux des côtés opposés.

2° Déterminer les positions limites du point P, et calculer la longueur du chemin parcouru par ce point pour passer de l'une de ces positions à l'autre. On désignera par a, b, c les longueurs des côtés du triangle ABC et par α, β, γ ses angles; toutes ces quantités sont connues.



DÉMONSTRATION DU THÉORÈME FONDAMENTAL DE LA THÉORIE DES ÉQUATIONS;

PAR M. E. CARVALLO,
Examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

THÉORÈME. — *Toute équation entière $f(z) = 0$ a une racine.*

M. Amigues a donné récemment une démonstration habile de ce théorème (¹). Dans le fond, la méthode est celle de Cauchy; l'intérêt de la nouvelle démonstration est d'être purement algébrique et de ne pas introduire la Trigonométrie. Dans une voie opposée, il importe de rechercher la forme la plus simple pour les élèves. Je propose la suivante.

La fonction $[\text{mod} f(z)]^2$ est toujours positive; elle est finie et continue pour les valeurs finies de z et croît indéfiniment avec z : donc elle a au moins un minimum. Je dis que, pour ce minimum, on a $f(z) = 0$. Pour cela, il suffit de prouver que ce minimum n'est pas atteint tant que $f(z)$ n'est pas nul. C'est sur ce dernier point que porte la simplification que je propose.

Soit $z = x + yi$ une valeur qui n'annule pas $f(z)$, $z_1 = x - yi$ l'imaginaire conjuguée de z, f_1 la fonction conjuguée de f, c'est-à-dire celle que l'on déduit du polynôme f en remplaçant tous les coefficients par leurs conjugués; $f_1(z_1)$ sera l'imaginaire conjuguée de $f(z)$. On aura donc

$$[\text{mod} f(z)]^2 = f(z) f_1(z_1) = F(z, z_1).$$

(¹) *Comptes rendus*, t. CXII; 26 janvier 1891.

Je donne à z un accroissement ζ; z_1 prend l'accroissement conjugué ζ_1. L'accroissement de F sera donné par la formule de Taylor à deux variables

$$\begin{aligned}\Delta F &= F(z+\zeta, z_1+\zeta_1) - F(z, z_1)\\ &= \sum \frac{1}{n!}\left(\zeta\frac{\partial}{\partial z} + \zeta_1\frac{\partial}{\partial z_1}\right)^n F\\ &= \sum \frac{1}{n!}[\zeta^n f^n(z) f_1(z_1) + \ldots + \zeta_1^n f_1^n(z_1) f(z)].\end{aligned}$$

Dans ce développement, soit $f^n(z)$ la première dérivée de $f(z)$ qui ne s'annule pas; $f_1^n(z_1)$ sera la première dérivée de $f_1(z_1)$ qui ne s'annule pas. Dès lors, tous les termes qui précèdent le terme de rang n sont nuls; de plus, celui-ci se réduit à la somme des deux termes extrêmes du crochet, savoir $\zeta^n f^n(z) f_1(z_1) + \zeta_1^n f_1^n(z_1) f(z)$; c'est la somme de deux imaginaires conjuguées. Soient (ρ, ω), (a, α), (b, β) les modules et les arguments de ζ, $f^n(z)$ et $f_1(z_1)$. Le premier terme $\zeta^n f^n(z) f_1(z_1)$ aura pour module $\rho^n ab$ et pour argument $n\omega + \alpha + \beta$. Dans la somme de ce terme avec son conjugué, les parties imaginaires se détruisent et les parties réelles se doublent pour donner $2\rho^n ab \cos(n\omega + \alpha + \beta)$. On a donc

$$\Delta F = \frac{2\rho^n ab}{n!}\cos(n\omega + \alpha + \beta) + \ldots.$$

Dans cette somme, on peut disposer de ω, de façon que l'on ait $\cos(n\omega + \alpha + \beta) = -1$; puis on pourra prendre ρ assez petit pour que le premier terme donne son signe à la somme, c'est-à-dire le signe $(-)$. L'accroissement ΔF est alors négatif. Donc la valeur considérée de $[\text{mod} f(z)]^2$, différente de zéro, n'est pas un minimum. C. Q. F. D.

SUR LES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES;

PAR M. DANIEL-E. MAYER,
Ingénieur des Ponts et Chaussées.

La présente Note a pour objet :

1° La démonstration d'un théorème sur les racines des équations dans un cas particulier;

2° L'indication d'une méthode pour le calcul approché des racines d'une équation.

PREMIÈRE PARTIE.

THÉORÈME. — *Si, dans une équation algébrique, à coefficients réels ou imaginaires, il existe un terme d'exposant k, dont le coefficient ait une valeur absolue (ou un module) plus grand que la somme des valeurs absolues (ou des modules) des autres coefficients, l'équation donnée admet $m-k$ racines dont les valeurs (ou les modules) sont supérieurs à 1, et k racines dont les valeurs (ou les modules) sont inférieurs à 1.*

Pour le démontrer, écrivons l'équation sous la forme

$$1 = \frac{p_1}{x} + \frac{p_2}{x^2} + \ldots + \frac{p_k}{x^k} + \pi_1 x + \pi_2 x^2 + \ldots + \pi_{m-k} x^{m-k},$$

et considérons d'abord le cas où $p_1, p_2, \ldots, \pi_1, \pi_2, \ldots$ sont des quantités toutes réelles, positives, et dont la somme est égale à 1.

Imaginons un jeu, auquel prennent part m joueurs, avec des chances de gagner chaque partie, différentes pour chacun d'eux et respectivement égales à

$$p_1, \quad p_2, \quad \ldots, \quad p_k, \quad \pi_1, \quad \pi_2, \quad \ldots, \quad \pi_{m-k}.$$

Ils conviennent que, à chaque partie gagnée par un des k premiers joueurs, la cagnotte lui devra une somme égale à 1, si c'est le premier joueur, 2 si c'est le second, ..., k si c'est le $k^{\text{ième}}$, et que, au contraire, à chaque partie gagnée par un des derniers joueurs, celui-ci devra à la cagnotte une somme égale à 1 si c'est le $(k+1)^{\text{ième}}$, 2 si c'est le $(k+2)^{\text{ième}}$, ..., $m-k$ si c'est le dernier.

Le jeu s'arrêtera quand la fortune de la cagnotte aura atteint ou dépassé $+P$ ou $-Q$.

Il est clair que, dans ces conditions, le jeu peut finir de m façons différentes.

En effet, si la cagnotte arrive aux valeurs négatives fixées pour la fin du jeu, cette éventualité peut se réaliser de k façons différentes, soit que la fortune de la cagnotte devienne exactement égale à $-Q$, soit que, après avoir atteint la valeur $-(Q-1)$, elle soit portée par un succès du $k^{\text{ième}}$ joueur à $-(Q+k-1)$, soit qu'elle atteigne une des valeurs intermédiaires entre ces deux extrêmes.

Et, de même, si c'est par les valeurs positives de la cagnotte que le jeu finit, cela peut se réaliser de $m-k$ façons différentes, soit que la valeur finale atteigne P, ou $P+1$, ou $(P+2)$, ..., ou $(P+m-k-1)$.

Cherchons l'espérance mathématique d'un parieur qui doit recevoir 1^{fr}, si l'une de ces m solutions, qu'il a choisie, se réalise.

Si nous désignons par x la fortune de la cagnotte, au moment considéré, et par $f(x)$ l'espérance cherchée, on voit d'abord que $f(x)$ est défini par la relation

$$f(x)=p_1 f(x-1)+p_2 f(x-2)+\ldots+p_k f(x-k) \\ +\pi_1 f(x+1)+\pi_2 f(x+2)+\ldots+\pi_{m-k} f(x+m-k).$$

Appelons $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ les m racines de l'équation

algébrique

$$1 = \frac{p_1}{x} + \frac{p_2}{x^2} + \ldots + \frac{p_k}{x^k} + \pi_1 x + \pi_2 x^2 + \ldots + \pi_{m-k} x^{m-k};$$

il est aisé de vérifier que l'expression $A_1 \alpha_1^x$, où A_1 est une constante arbitraire, satisfait à l'équation aux différences finies qui donne la valeur de $f(x)$. On a, de même, une seconde solution $A_2 \alpha_2^x$, ... et, en écrivant

$$f(x) = A_1 \alpha_1^x + A_2 \alpha_2^x + \ldots + A_m \alpha_m^x,$$

on a la solution complète, puisqu'elle contient autant de constantes arbitraires $A_1, A_2, \ldots, A_m$ que nous avons de données pour déterminer $f(x)$.

Supposons que la combinaison choisie par le parieur et dans laquelle il doit recevoir 1^fr soit celle où, à la fin du jeu, la cagnotte atteindra exactement $+P$. Les constantes $A_1, A_2, \ldots, A_m$ seront déterminées par les relations

$$\begin{aligned}
1 &= A_1 \alpha_1^P + A_2 \alpha_2^P + \ldots + A_m \alpha_m^P, \\
0 &= A_1 \alpha_1^{(P+1)} + A_2 A_2^{(P+1)} + \ldots + A_m (\alpha_m)^{P+1}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
0 &= A_1 \alpha_1^{(P+m-k-1)} + A_2 \alpha_2^{(P+m-k-1)} + \ldots + A_m (\alpha_m)^{P+m-k-1}, \\
0 &= A_1 \alpha_1^{-Q} + A_2 \alpha_2^{-Q} + \ldots + A_m \alpha_m^{-Q}, \\
0 &= A_1 A_1^{-(Q+1)} + A_2 \alpha_2^{-(Q+1)} + \ldots + A_m \alpha_m^{-(Q+1)}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
0 &= A_1 \alpha_1^{-(Q+k-1)} + A_2 \alpha_2^{-(Q+k-1)} + \ldots + A_m \alpha_m^{-(Q+k-1)},
\end{aligned}$$

qui, en supposant connues les racines $\alpha_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$, sont des équations du premier degré par rapport aux constantes à déterminer.

On peut résoudre ces équations, remplacer $A_1, A_2, \ldots, A_m$ par leurs valeurs en fonction de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ et l'on aura l'expression de $f(x)$ en fonction de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$.

Or, il est évident, d'après les données du problème, que, quelle que soit la valeur de x, comprise entre $+P$ et $-Q$, $f(x)$, qui représente l'espérance mathématique du parieur, a une valeur réelle, positive et plus petite que 1. Cela est vrai, quels que soient P et Q.

Si l'on fait Q infini en valeur absolue, le problème de probabilité conserve une signification précise. Cela veut dire que le jeu durera jusqu'à ce que la fortune de la cagnotte atteigne ou dépasse P, sans limitation des valeurs négatives par lesquelles elle peut passer. Il y a encore $m-k$ éventualités possibles pour la fin du jeu, de P à $(P+m-k-1)$ et $f(x)$ représente encore l'espérance mathématique du parieur qui recevra 1fr si la cagnotte atteint exactement P; $f(x)$ est encore une quantité réelle, positive et plus petite que 1.

Je dis qu'il faut pour cela que, dans l'expression de $f(x)$ en fonction des racines $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, le coefficient de toute racine, dont la valeur (ou le module) est inférieur à l'unité, devienne nul lorsque Q devient infini.

En effet, soit qu'on considère un terme $A\alpha^x$ correspondant à une racine réelle ou le groupe de deux termes $H^x(A\cos\omega x + B\sin\omega x)$ correspondant à deux racines imaginaires conjuguées, on voit que si α ou H sont inférieurs à l'unité, on pourrait toujours, si ces termes ne disparaissaient pas, donner à x des valeurs négatives assez grandes pour que la valeur absolue de ces termes devînt supérieure à toute quantité donnée. Et ces termes ne pourraient se détruire l'un l'autre puisque, pour des valeurs différentes de α ou de H, ils seraient d'ordre de grandeur différent. La fonction $f(x)$ ne pourrait donc conserver une valeur plus petite que l'unité, ni même une valeur limitée.

L'expression de $f(x)$, dans le cas où Q est infini, ne

contiendra donc que des termes correspondant à des racines supérieures ou au moins égales à l'unité.

De même, si l'on cherche l'espérance mathématique du parieur qui devrait recevoir 1^fr dans le cas où la cagnotte atteindrait $-Q$ avant d'avoir atteint ou dépassé P, et si l'on fait P infini, l'espérance mathématique de ce pari aura une expression qui ne contiendra que les termes correspondants à des racines dont les valeurs (ou les modules) sont inférieurs ou au plus égaux à l'unité.

Or, dans un cas comme dans l'autre, nous apercevons *a priori* combien de termes doivent subsister dans l'expression de $f(x)$.

En effet, s'il s'agit d'un jeu qui doit finir quand la cagnotte aura atteint ou dépassé P, sans limitation des valeurs négatives, il faut qu'on ait, dans l'expression de $f(x)$, $m-k$ constantes à déterminer, dont la valeur changera suivant que le parieur aura choisi l'une ou l'autre des $m-k$ éventualités possibles.

Et, s'il s'agit du jeu qui doit finir par la cagnotte négative, il faut que $f(x)$ contienne k constantes à déterminer.

On arrive donc à cette conclusion que l'équation algébrique donnée contient :

$m-k$ racines supérieures ou au moins égales à l'unité,
k racines inférieures ou au plus égales à l'unité.

L'unité est elle-même une des racines de l'équation.

Donc si l'on considère les deux paris distincts, l'un que la cagnotte arrivera à $+P$, sans limitation des valeurs négatives, l'autre que la cagnotte arrivera à $-Q$, sans limitation des valeurs positives, les expressions de l'espérance mathématique seront telles que dans un cas l'espérance tend vers une quantité différente de zéro, et

que dans l'autre cas elle tend vers zéro, lorsque P et Q augmentent indéfiniment.

Or, pour savoir laquelle des deux espérances tend vers une limite différente de zéro, et laquelle tend vers zéro, il suffit de rechercher si, d'après les conditions du jeu, la probabilité est favorable à l'accroissement positif ou négatif de la cagnotte, c'est-à-dire si l'expression

$$-(p_1+2p_2+\ldots+kp_k)+[\pi_1+2p_2+\ldots+(m-k)p_{m-k}],$$

qui n'est autre que la dérivée du second membre de l'équation algébrique par rapport à x, et où l'on fait $x=1$, est positive ou négative.

Si cette expression est positive, l'équation donnée admet, outre l'unité,

$m-k-1$ racines supérieures à l'unité,
k racines inférieures à l'unité.

Si elle est négative, l'équation admet

$m-k$ racines supérieures à l'unité,
$k-1$ racines inférieures à l'unité.

Nous n'avons pas tenu compte, dans ce qui précède, de la possibilité que l'équation donnée ait des racines multiples; mais il est aisé de voir que, si n racines de l'équation algébrique deviennent égales, les n termes de l'expression de $f(x)$

$$A_1\alpha_1^x+A_2\alpha_2^x+\ldots+A_n\alpha_n^x$$

deviennent

$$A_1\alpha^x+A_2x\times\alpha^x+\ldots+A_nx^n\alpha^x,$$

qui contient le même nombre de constantes arbitraires, et les raisonnements que nous avons faits dans le cas

général subsistent sans changement dans ce cas particulier.

Il nous reste à étendre ces considérations au cas le plus général auquel s'applique le théorème, c'est-à-dire au cas où un ou plusieurs des coefficients de l'équation précédente se trouvent, dans une équation nouvelle, multipliés par une quantité réelle, positive ou négative, plus petite que l'unité, ou par une quantité imaginaire, de module plus petit que l'unité.

En continuant de considérer les coefficients $p_1, p_2, \ldots,$ $\pi_1, \pi_2, \ldots$ de l'équation précédente, l'équation nouvelle peut s'écrire

$$1 = \frac{p_1 S_1}{x} + \frac{p_2 S_2}{x^2} + \ldots + \frac{p_k S_k}{x^k} + \pi_1 \sigma_1 x + \pi_2 \sigma_2 x^2 + \ldots + \pi_{m-k} \sigma_{m-k} x^{m-k},$$

$S_1, S_2, \ldots, \sigma_1, \sigma_2, \ldots$ étant des quantités quelconques de modules inférieurs à l'unité.

Continuons à considérer le jeu précédemment défini, avec les mêmes chances $p_1, p_2, \ldots, \pi_1, \pi_2, \ldots$ des joueurs, les mêmes enjeux, et les mêmes conventions pour la fin du jeu. Mais modifions les conditions du pari. Au lieu de recevoir un franc, si l'éventualité qu'il a choisie, parmi les m possibles, se réalise, le parieur recevra une somme déterminée d'après le nombre des parties qu'aura gagnées chaque joueur. Si l'on désigne par $n_1, n_2, \ldots, n_k, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{m-k}$ le nombre de parties gagnées par les joueurs d'indice correspondant, le compte, positif ou négatif, réel ou imaginaire du parieur, sera

$$S_1^{n_1} \times S_2^{n_2} \times S_k^{n_k} \times \sigma_1^{\nu_1} \times \sigma_2^{\nu_2} \times \ldots \times (\sigma_{m-k})^{\nu-m-k}.$$

Si l'on désigne par $\varphi(x)$ l'espérance mathématique du parieur en fonction de la fortune x de la cagnotte,

l'expression qui permet de calculer la valeur de cette espérance est

$$\varphi(x) = p_1 S_1 \varphi(x-1) + p_2 S_2 \varphi(x-2) + \ldots$$
$$+ p_k S_k \varphi(x+k) + \pi_1 \sigma_1 \varphi(x+1) + \pi_2 \sigma_2 \varphi(x+2) + \ldots$$
$$+ \pi_{m-k} \sigma_{m-k} \varphi(x+m-k),$$

et si l'on appelle $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ les racines de l'équation nouvelle, on aura

$$\varphi(x) = A_1 \beta_1^x + A_2 \beta_2^x + \ldots + A_m \beta_m^x.$$

Or il est évident que l'espérance mathématique de ce nouveau pari, en valeur absolue, ou son module, si elle est imaginaire, sera toujours inférieur à l'unité.

En effet, la quantité à donner ou recevoir par le parieur sera nulle, si l'éventualité choisie par le parieur ne se réalise pas, et dans tous les autres cas elle sera le produit de quantités inférieures à l'unité.

En conséquence, la démonstration que nous avons faite précédemment et qui, en somme, ne reposait que sur cette idée que $f(x)$ était une quantité limitée, s'applique *a fortiori* à $\varphi(x)$, avec cette seule différence qu'il n'y a plus de racine égale à l'unité, et que, dans ce cas plus général, il y a

$m - k$ racines de valeurs ou modules supérieurs à l'unité,
k racines de valeurs ou modules inférieurs à l'unité.

C. Q. F. D.

DEUXIÈME PARTIE.

Si l'on a à résoudre une équation algébrique

$$(1) \qquad 1 = p_1 x + p^2 x^2 + \ldots + p_m x^m$$

et qu'on forme l'équation aux différences finies

$$(2) \quad f(x) = p_1 f(x+1) + p_2 f(x+2) + \ldots + p_m f(x+m):$$

on peut écrire, en appelant $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ les racines de (1),

$$(3) \qquad f(x) = A_1\alpha_1^x + A_2\alpha_2^x + \ldots + A_m\alpha_m^x,$$

$A_1, A_2, \ldots, A_m$ étant des constantes arbitraires qu'on déterminera par les valeurs initiales qu'on choisira pour $f(x)$.

Prenons, par exemple,

$$\begin{aligned} f(m-1) &= 0, \\ f(m-2) &= 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f(-1) &= 0, \\ f(0) &= 1; \end{aligned}$$

on aura

$$\begin{aligned} f(-1) &= p_1, \\ f(-2) &= p_1^{-2} + p_2, \\ f(-3) &= p_1(p_1^{-2} + p_2) + p_2 p_1 + p_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

et il sera facile, et même rapide (si les valeurs numériques des coefficients ne sont pas trop compliquées), de calculer un grand nombre de ces valeurs de $f(x)$ pour des valeurs négatives croissantes de la variable.

Or, si l'on suppose qu'on ait écrit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ dans l'ordre des valeurs croissantes des racines ou de leurs modules, il apparaît, d'après la relation (3) que, si α_1 est une racine réelle simple, le rapport $\dfrac{f(-m)}{f-(m+1)}$ tendra vers α_1.

Si, au contraire, α_1 et α_2 sont des racines imaginaires conjuguées, ce sont les deux termes correspondants à ces racines qui prévaudront dans le calcul de $f(x)$, dont les valeurs successives ne suivront plus la loi simple du cas précédent.

Supposons connues quatre valeurs successives $a_1, a_2,$

a_3, a_4, de la fonction $A_1\alpha_1^x + A_2\alpha_2^x$, c'est-à-dire

$$(4)\qquad a_1 = A_1\alpha_1^{-m} + A_2\alpha_2^{-m},$$
$$(5)\qquad a_2 = A_1\alpha_1^{-(m+1)} + A_2\alpha_2^{-(m+1)},$$
$$(6)\qquad a_3 = A_1\alpha_1^{-(m+2)} + A_2\alpha_2^{-(m+2)},$$
$$(7)\qquad a_4 = A_1\alpha_1^{-(m+3)} + A_2\alpha_2^{-(m+3)},$$

il sera aisé de calculer α_1 et α_2.

En effet, soit

$$1 = q_1 x + q_2 x^2$$

l'équation du second degré dont α_1 et α_2 sont racines; on peut former l'équation aux différences finies

$$\varphi(x) = q_1\varphi(x+1) + q_2\varphi(x+2),$$

et si l'on pose

$$\varphi_{-m} = a_1,$$
$$\varphi_{-(m+1)} = a_2,$$

et qu'on détermine p_1 et p_2 par les conditions

$$a_3 = q_1 a_2 + q_2 a_1,$$
$$a_4 = q_1 a_3 + q_2 a_2,$$

les racines α_1 et α_2 de l'équation $1 = p_1 x + p_2 x^2$ satisferont aux équations (4), (5), (6) et (7).

De ce mode de détermination de p_1 et p_2 résultent les formules

$$q_1 = \frac{a_4 \times a_1 - a_2 \times a_3}{a_1 a_3 - (a_2)^2},$$
$$q_2 = \frac{(a_3)^2 - a_2 \times a_4}{a_1 \times a_3 - (a_2)^2},$$

qui ne dépendent que des rapports de a_1, a_2, a_3 et a_4.

Or si, après avoir calculé, au moyen de la relation (2), un certain nombre de valeurs de $f(x)$, on calcule q_1

et q_2 comme si l'on avait

$$f_{-(m+1)} = a_1,$$
$$f_{-(m+2)} = a_2,$$
$$f_{-(m+3)} = a_3,$$
$$f_{-(m+4)} = a_4,$$

on commettra une erreur d'autant moindre que m sera plus grand, et en résolvant l'équation $1 = q_1 x + q_2 x^2$, on aura des valeurs approchées de α_1 et α_2.

La règle pratique sera donc la suivante :

Calculer des valeurs successives $f(-1), f(-2), \ldots, f(-m)$, et surveiller le mode de variation de l'expression

$$[f_{-(m+2)}]^2 - [f_{-(m+1)}][f_{-(m+3)}].$$

Si cette expression tend vers zéro, avec des valeurs, soit toujours positives, soit toujours négatives de $\frac{f_{-(m+1)}}{f_{-(m+1)}}$, c'est la valeur de ce rapport, lorsqu'il sera devenu sensiblement constant, qui donnera la racine réelle α, la plus petite de toutes les racines.

Si, au contraire,

$$[f_{-(m+2)}]^2 - [f_{-(m+1)}][f_{-(m+3)}]$$

ne tend pas vers zéro, et si le rapport $\frac{f_{-(m+1)}}{f_{-(m+2)}}$ est tantôt positif, tantôt négatif, on verra toujours, sauf le cas d'exception des racines ou modules d'ordre multiple, l'expression

$$\frac{[f_{-(m+3)}]^2 - [f_{-(m+2)}][f_{-(m+4)}]}{[f_{-(m+2)}]^2 - [f_{-(m+1)}][f_{-(m+3)}]}$$

tendre vers une limite constante positive. C'est cette limite, prise avec le signe —, qui donnerait rigoureusement q_2, et c'est la valeur approchée de cette limite, prise avec le signe —, qui donnera la valeur approchée de q_2.

Quand on se sera arrêté dans le calcul des valeurs de $f(x)$ d'après les considérations précédentes, on évaluera, au moyen des quatre dernières valeurs calculées par la formule

$$q_1 = \frac{[f_{-(m+4)}] \times [f_{-(m+1)}] - [f_{-(m+2)}][f_{-(m+3)}]}{[f_{-(m+1)}][f_{(m+3)}] - [f_{-(m+2)}]^2},$$

et l'on trouvera, en résolvant l'équation $1 = q_1 x + q_2 x^2$, les valeurs approchées des deux racines imaginaires qui occupent le premier rang dans le Tableau par ordre de grandeur croissante des racines ou de leurs modules.

Il est clair que, dans la pratique, cette méthode sera d'autant plus expéditive que le rapport entre les valeurs ou les modules des quantités cherchées et celles qui viennent immédiatement après dans l'échelle des racines sera plus grand en valeur absolue.

Telle que nous l'avons exposée, la méthode ne s'appliquerait pas au cas où les racines cherchées sont d'ordre multiple.

Dans le cas où ces quantités, sans être rigoureusement égales à celles qui suivent, en seraient très voisines, la méthode, tout en restant théoriquement exacte, deviendrait pratiquement inapplicable.

Pour calculer la plus grande racine réelle, ou les deux plus grandes racines imaginaires de l'équation donnée, il suffira de considérer l'équation en $\frac{1}{x}$ et de procéder comme plus haut.

Enfin il serait possible, au moyen de transformations convenables, de modifier la place des diverses racines dans l'échelle des valeurs, de manière à pouvoir appliquer la méthode successivement aux diverses racines.

Nous nous réservons de compléter par l'étude de ces divers points les indications succinctes que nous venons de donner.

Nota. — Nous donnons ci-après deux exemples de l'application de la méthode, l'un au calcul d'une racine réelle, l'autre au calcul de deux racines imaginaires d'équations du quatrième degré.

APPLICATION DE LA MÉTHODE AU CALCUL DE LA PLUS PETITE RACINE DE L'ÉQUATION ALGÉBRIQUE

$$1 = x + x^2 + x^3 + x^4.$$

Tableau des valeurs successives de

$f(x) = f(x+1) + f(x+2) + f(x+3) + f(x+4)$.	$\log f(x)$.	$\log \frac{f-m}{f-(m+1)}$.
$f(3) = 0$		
$f(2) = 0$		
$f(1) = 0$		
$f(0) = 1$		
$f(-1) = 1 \times 1 = 1$		
$f(-2) = 1 \times 1 + 1 = 2$		
$f(-3) = 2+1+1 = 4$		
$f(-4) = 4+2+1+1 = 8$		
$f(-5) = 8+4+2+1 = 15$		
$f(-6) = 15+8+4+2 = 29$		
$f(-7) = 29+15+8+4 = 56$		
$f(-8) = 56+29+15+8 = 108$		
$f(-9) = 108+56+29+15 = 208$		
$f(-10) = 208+108+56+29 = 401$	2,6031444	
$f(-11) = 401+208+108+56 = 773$	2,8881795	$\bar{1}$,7149649
$f(-12) = 773+401+208+108 = 1490$	3,1731863	$\bar{1}$,7149932
$f(-13) = 1490+773+401+208 = 2872$	3,4581844	$\bar{1}$,7150019
$f(-14) = 2872+1490+773+401 = 5536$	3,7431961	$\bar{1}$,7149883
$f(-15) = 5536+2872+1490+773 = 10671$	4,0282051	$\bar{1}$,7149910
$f(-16) = 10671+5536+2872+1490 = 20569$	4,3132132	1,7149919
$f(-17) = 20569+10671+5536+2872 = 39648$	4,5982213	1,7149919
$f(-18) = 39648+20569+10671+5531 = 76424$	4,8832398	1,7149915

Conclusion. — **La valeur approchée de la racine est 0,51879.**

APPLICATION DE LA MÉTHODE AU CALCUL DES DEUX PLUS PETITES RACINES DE L'ÉQUATION

$$1 = 2x - 3x^2 + x^3 - 4x^4.$$

Tableau des valeurs successives de

$f(x) = 2f(x+1) - 3f(x+2) + f(x+3) - 4f(x+4)$	$\log(-q_2) = \log -\frac{(a_3)^2 - a_2 a_4}{(a_2)^2 - a_1 a_3}.$	$\log q_1 = \log \frac{a_1 a_4 - a_2 a_3}{a_1 a_3 - (a_2)^2}.$
$f(\ \ 0) = 1$		
$f(-1) = 2$		
$f(-2) = 4 - 3 = 1$		
$f(-3) = 2 - 6 + 1 = -3$		
$f(-4) = -6 - 3 + 2 - 4 = -11$		
$f - 5 = -22 + 9 + 1 - 8 = -20$		
$f(-6) = -40 + 33 - 3 - 4 + -14$		
$f - 7 = -28 + 60 - 11 + 12 = 33$		
$f - 8 = 66 + 42 - 20 + 44 = 132$		
$f - 9 = 264 - 99 - 14 + 80 = 231$		
$f - 10 = 462 - 396 + 33 + 56 = 155$		
$f - 11 = 310 - 693 + 132 - 132 = -383$		
$f - 12 = -766 - 465 + 231 - 528 = -1528$		
$f - 13 = -3056 + 1149 + 155 - 924 = -2676$		
$f - 14 = -5352 + 4584 - 383 - 620 = -1771$		
$f - 15 = -3542 + 8028 - 1528 + 1532 = -4490$		
$f - 16 = 8980 + 5313 - 2676 + 6112 = 17729$		
$f - 17 = 35458 - 13470 - 1771 + 10704 = 30921$		
$f - 18 = 61842 - 53187 + 4490 + 7084 = 20229$	0,5320813	0,4160344
$f - 19 = 40458 - 92763 + 17729 - 17960 = -52536$	0,5319672	0,4159493
$f - 20 = -105072 - 60687 + 30921 - 70916 = -205754$	0,5319621	0,4159422
$f - 21 = -411508 + 157608 + 20229 - 123684 = -357355$	0,5319429	0,4159527
$f - 22 = -714710 + 617262 - 52536 - 80916 = -230900$	0,5319531	0,4159570

Les quatre premières décimales des logarithmes des coefficients cherchés paraissent bien déterminées. En prenant

$$\log(-q_2) = 0{,}53195,$$
$$\log q_1 = 0{,}41595,$$

les deux racines imaginaires de l'équation donnée, qui sont en bas de l'échelle des valeurs absolues, résultent de l'équation du deuxième degré

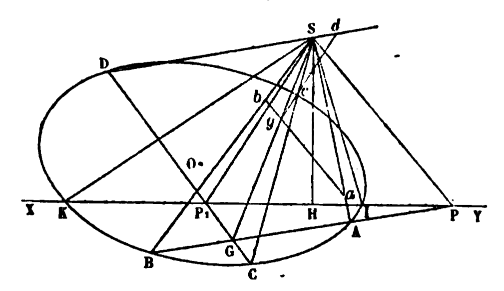
$$1 = 2{,}606x - 3{,}404x^2.$$

ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE DES PROPRIÉTÉS DES CONIQUES D'APRÈS LEUR DÉFINITION (1);

PAR M. L. MALEYX.

IX. *Propriété des sécantes rectangulaires à l'hyperbole équilatère.* — Soit O le cercle directeur et S le sommet d'un cône (*fig.* 72).

Fig. 72.



Supposons-le coupé par un plan suivant une hyperbole équilatère, le plan SXY mené par le sommet du cône parallèlement au plan sécant le coupera suivant les deux génératrices rectangulaires, SI, SK.

Dans le plan de la section imaginons deux droites rectangulaires, l'une sera parallèle à un diamètre transverse et rencontrera les deux branches de la courbe, l'autre sera parallèle à un diamètre non transverse et ne rencontrera que l'une des branches, soient ces cordes *ab* et *cd*. Menons par le sommet S, SP parallèle à *ab* et SP_1 parallèles à *cd*; l'une de ces droites sera extérieure à

(1) Voir t. X (1891), p. 91.

l'angle droit KSI, soit SP, l'autre SP_1 lui sera intérieure, l'angle PSP_1 étant droit.

Le plan des parallèles *ab*, SP coupe le plan de la directrice suivant la droite PAB, et le cône suivant les génératrices S*a*A, S*b*B; celui des parallèles *cd*, SP_1 coupe le plan de la directrice suivant la droite CP_1D, et le cône suivant les génératrices S*c*C, *d*SD; de plus, les cordes rectangulaires, *ab*, *cd*, se coupent en un point *g* de l'intersection SG des deux plans dont on vient de parler. On démontrerait, comme au n° I du présent Chapitre, qu'on a les égalités

$$\frac{ga \times gb}{GA \times GB} = \frac{\overline{SP}^2}{PA \times PB} \times \left(\frac{Sg}{SG}\right)^2,$$

$$\frac{gc \times gd}{GC \times GD} = \frac{\overline{SP_1}^2}{P_1C \times P_1D} \times \left(\frac{Sg}{SG}\right)^2$$

ou, d'après les propriétés des sécantes au cercle,

$$\frac{ga \times gb}{GA \times GB} = \frac{\overline{SP}^2}{PI \times PK} \times \left(\frac{Sg}{SG}\right)^2,$$

$$\frac{gc \times gd}{GC \times GD} = \frac{\overline{SP_1}^2}{P_1I \times P_1K} \times \left(\frac{Sg}{SG}\right)^2.$$

Divisant membre à membre, en ayant égard à la propriété des sécantes au cercle,

$$\frac{ga \times gb}{gc \times gd} = \frac{\overline{SP}^2}{\overline{SP_1}^2} \times \frac{P_1I \times P_1K}{PI \times PK},$$

et, comme l'angle P_1SP est droit, si SH est perpendiculaire sur PP_1, on a

$$\frac{\overline{SP}^2}{\overline{SP_1}^2} = \frac{PH}{P_1H},$$

d'où, substituant,

$$\frac{ga \times gb}{gc \times gd} = \frac{\dfrac{P_1I \times P_1K}{P_1H}}{\dfrac{PI \times PK}{PH}}.$$

Or SH est l'axe radical des cercles circonscrits aux triangles KSI, P_1SP, et l'on sait, d'après ce qu'on a vu au n° I, Chap. II, théorème II, que l'un de ces cercles, le second par exemple, est le lieu des points dont les puissances, par rapport au premier, sont à la distance des mêmes points à leur axe radical dans un rapport constant convenablement choisi.

Il en résulte que les rapports $\frac{P_1I \times P_1K}{P_1H}$, $\frac{PI \times PK}{PH}$ sont numériquement égaux : dès lors le rapport $\frac{ga \times gb}{gc \times gd}$ est numériquement égal à 1; mais, comme les deux segments ga, gb sont de sens contraires, tandis que les deux autres gc, gd sont de même sens, on doit considérer ce rapport comme égal à -1.

De là on peut déduire le théorème suivant :

Si une hyperbole équilatère est circonscrite à un triangle, elle passe par le point commun des hauteurs.

Et comme corollaire :

Si deux hyperboles équilatères ont quatre points communs, elles doivent coïncider, à moins que l'un des points ne soit le point commun des hauteurs d'un triangle dont les trois autres sont les sommets.

X. Théorème de Frégier. — *Si par un point de la circonférence d'un cercle on mène des parallèles à deux diamètres conjugués d'une conique, la droite qui unit les seconds points communs de ces parallèles avec la circonférence passe par un point fixe qui porte le nom de* point de Frégier.

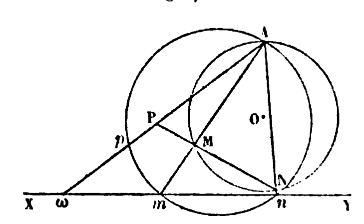
Soient O le cercle donné, A le point donné sur sa circonférence (*fig.* 73).

Menons par le point A les parallèles AM, AN à deux

diamètres conjugués d'une conique située dans le même plan; il s'agit de montrer que MN passe par un point fixe.

Les couples de droites, telles que AM, AN, forment un faisceau en involution; transformons la figure par rayons vecteurs réciproques en prenant A pour pôle et

Fig. 73.



une puissance quelconque K; la circonférence O a pour transformée la droite XY, et les points, tels que m et n, forment une involution, n° III; Chap. II, soit ω le centre de cette involution; unissons Aω par une droite.

La droite dont MN fait partie a pour transformée la circonférence passant par les points A, m, n, et rencontrant Aω en p; le point p est fixe à cause de l'égalité $\omega m \times \omega n = \omega A \times \omega p$, le premier membre étant fixe d'après la définition de l'involution. Or nous avons aussi, P étant le point où MN coupe Aω,

$$Ap \times AP = K,$$

d'après notre transformation; le point p et le nombre K étant fixes, il en est de même de P.

Le théorème de Frégier est encore vrai si au cercle on substitue une conique, cela se voit en considérant cette courbe comme la perspective d'un cercle.

L'application de ce théorème permet de construire facilement deux rayons d'un faisceau en involution faisant entre eux un angle donné, quand le faisceau est

déterminé par deux autres couples de rayons conjugués, et, en particulier, de construire, en direction, deux diamètres conjugués d'une conique, dont on donne le centre, faisant entre eux un angle donné, quand on connaît les directions de deux autres couples de diamètres conjugués. Nous ne nous y arrêterons pas.

Comme seconde application très intéressante, on peut, au moyen de ce théorème, déterminer simplement les rayons conjugués communs à deux faisceaux en involution de même sommet ou, ce qui revient au même, les diamètres conjugués communs de deux coniques concentriques. Il suffit pour cela de faire passer un cercle par le sommet commun des deux faisceaux, de déterminer le point de Frégier relatif à chacun d'eux et d'unir ces deux points par une droite; les points où la droite coupe le cercle appartiennent chacun à un des diamètres conjugués communs. On ramène à cette question celle de la détermination des diamètres conjugués parallèles de deux coniques situées, comme on voudra, dans le même plan.

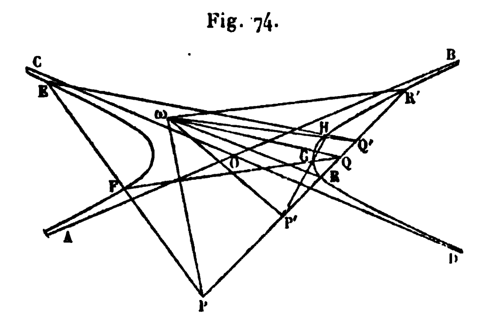
Le point de Frégier s'est présenté spontanément dans la construction que nous avons donnée au Chapitre I, n° VI.

Théorème et applications. — *Si par un point du plan d'un quadrilatère on mène des couples de parallèles aux directions des asymptotes de chacune des hyperboles circonscrites au quadrilatère, ces couples de parallèles forment un faisceau en involution.*

Soient EFGH le quadrilatère, AOB, COD les asymptotes d'une hyperbole circonscrite (*fig.* 74). Coupons la figure par une droite quelconque, rencontrant les côtés du quadrilatère en P et P', Q et Q', et l'hyperbole en R et R'; puis unissons ces six points à un point fixe ω, pris arbitrairement dans le plan, par des lignes

droites. D'après le théorème de Desargues, ces six droites forment un faisceau en involution, et il en sera encore ainsi si la sécante PR′ s'éloigne à l'infini ; mais alors les rayons ωP et ωP′, ωQ et ωQ′ deviennent parallèles aux systèmes de côtés opposés au quadrilatère, ωR et ωR′ deviennent parallèles aux asymptotes de l'hyperbole ;

Fig. 74.



donc les parallèles aux asymptotes de l'hyperbole menées par le point ω sont deux rayons conjugués du faisceau en involution, déterminé par les systèmes de parallèles aux côtés opposés du quadrilatère menées par le même point, ce qu'il fallait démontrer.

Ce théorème est susceptible d'applications nombreuses par son association à celui de Frégier.

1° *On en déduit les directions des asymptotes de l'hyperbole passant par cinq points.* Il suffit pour cela de construire les rayons conjugués communs à deux faisceaux en involution déterminés en menant par un point du plan des parallèles aux systèmes de côtés opposés de deux quadrilatères inscrits.

2° *On peut encore construire,* par ce moyen, *une hyperbole passant par quatre points donnés, connaissant l'angle des asymptotes ;* on est ramené pour cela à déterminer deux rayons conjugués d'un faisceau en involution comme faisant entre eux un angle donné.

3° Comme cas particulier de la question précédente, on peut *construire une hyperbole équilatère passant par quatre points donnés* en recherchant les rayons conjugués rectangulaires d'un faisceau en involution défini.

On voit ainsi que le problème n'admet généralement qu'une solution; toutefois, et c'est là une REMARQUE IMPORTANTE, *si les couples de côtés opposés du quadrilatère étaient rectangulaires, c'est-à-dire si trois des points étaient sommets d'un triangle dont les hauteurs concourraient au quatrième point, le quadrilatère étant non convexe, les seules coniques qu'on peut lui circonscrire sont des hyperboles; en second lieu, deux des couples de directions asymptotiques, celles des systèmes de côtés opposés, étant rectangulaires, tous les systèmes de rayons conjugués du faisceau sont rectangulaires, et toutes les coniques circonscrites à ce quadrilatère sont des hyperboles équilatères*. Ces dernières conséquences complètent le théorème et le corollaire démontrés à la fin du n° IX du présent Chapitre.

XII. THÉORÈME. — *Si l'on coupe une conique par une hyperbole équilatère, dont les asymptotes soient parallèles aux axes de la courbe, trois des points communs et le point diamétralement opposé au quatrième, dans la conique, sont situés sur un même cercle.*

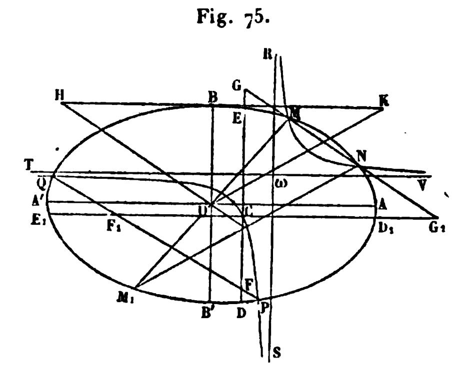
Démontrons le théorème pour le cas où la conique est une ellipse, la démonstration pour le cas où elle est une hyperbole est entièrement analogue, et l'on peut conclure qu'il est vrai pour la parabole, en la considérant comme limite de l'une des courbes précédentes.

Soient O l'ellipse dont les axes sont AA', BB' (*fig.* 75); ω l'hyperbole équilatère dont les asymptotes VT, RS sont respectivement parallèles à AA', BB'. Soient les

quatre points communs des deux courbes M, N, P, Q, et M_1 diamétralement opposé à M dans l'ellipse.

Prenons un point quelconque C sur l'hyperbole et menons par ce point des parallèles aux asymptotes ; l'ellipse, l'hyperbole et le système des sécantes rectilignes

Fig. 75.



MN, PQ, déterminent sur chacune de ces parallèles un système de six points en involution (théorème de Desargues) et comme dans ces deux involutions le point conjugué de C est à l'infini, C est le centre de chacune d'elles. De là les deux égalités

$$CE \times CD = CF \times CG \qquad \text{et} \qquad CE_1 \times CD_1 = CF_1 \times CG_1.$$

Divisons membre à membre en tenant compte du théorème de Newton,

$$\frac{CE \times CD}{CE_1 \times CD_1} = \frac{b^2}{a^2} = \frac{CF \times CG}{CF_1 \times CG_1},$$

en désignant par a et b les demi-axes de l'ellipse.

Unissons M_1N par une ligne droite : MN, M_1N forment un système de cordes supplémentaires, et les diamètres OK, OH, qui les divisent en parties égales et sont chacun parallèles à celle qu'il ne coupe pas, sont conju-

gués. Ces diamètres interceptent sur la tangente en B les segments BH, BK, dont le produit est égal à a^2 (n° IV, Chap. II) ; de là

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{b}{\text{BH}} \times \frac{b}{\text{BK}},$$

et, par comparaison avec l'égalité précédente,

$$\frac{\text{CF}}{\text{CF}_1} \times \frac{\text{CG}}{\text{CG}_1} = \frac{b}{\text{BH}} \times \frac{b}{\text{BK}}.$$

Les deux triangles rectangles BOH, GCG_1 sont semblables comme ayant leurs côtés parallèles, d'où

$$\frac{\text{CG}}{\text{CG}_1} = \frac{b}{\text{BH}};$$

d'après l'égalité précédente, il en résulte

$$\frac{\text{CF}}{\text{CF}_1} = \frac{b}{\text{BK}}.$$

Donc les deux triangles rectangles BOK, CFF_1 sont semblables, leurs angles sont égaux et leurs hypoténuses OK, FF_1 sont également inclinées sur BK et CF_1, ou sur la parallèle AA'; il en est de même de PQ et M_1N parallèle à OK; donc les points P, Q, N, M_1 appartiennent à un cercle (n° VI du précédent Chapitre).

C. Q. F. D.

(*A suivre.*)

ERRATA.

Page 83, dernière ligne de la note (¹), *au lieu de* $\frac{x}{u}$, *lisez* $\frac{x}{a}$.

SUR LE DÉVELOPPEMENT DE $\sqrt{R}$ EN FRACTION CONTINUE;

PAR M. J. DOLBNIA.

Je me propose d'exposer ici la démonstration très simple des quelques théorèmes insérés dans le Mémoire d'Abel *Sur l'intégration de la formule différentielle,* etc. ([1]).

THÉORÈME I. — R *étant une fonction entière de x, $\sqrt{R}$ se développe en fraction continue illimitée*

$$\sqrt{R} = \alpha + \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cdots + \cfrac{1}{\alpha_i + \cfrac{1}{y_i}}}},$$

où α, α_1, α_2, ..., α_i sont des fonctions entières, y_i est l'un des quotients complets quelconque. Je dis que y_i est racine de l'équation

$$Ay_i^2 + 2By_i - C = 0,$$

où

$$A = p_i^2 - q_i^2 R,$$

p_i, q_i étant des fonctions entières, et les coefficients A, B, C *satisfaisant à l'égalité*

$$B^2 - AC = R.$$

([1]) *Œuvres complètes,* t. I, p. 104 et suiv.; 1881.

Démonstration. — Posons

$$\alpha + \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \ldots + \cfrac{1}{\alpha_{i-1}}}} = \frac{p_{i-1}}{q_{i-1}},$$

$$\alpha + \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \ldots + \cfrac{1}{\alpha_{i-1} + \cfrac{1}{\alpha_i}}}} = \frac{p_i}{q_i},$$

alors on aura

$$\sqrt{R} = \frac{p_i y_i + p_{i-1}}{q_i y_i + q_{i-1}},$$

ou

$$(p_i^2 - q_i^2 R) y_i^2 + 2(p_i p_{i-1} - q_i q_{i-1} R) y_i + (p_{i-1}^2 - q_{i-1}^2 R) = 0.$$

D'où il suit que

$$A = p_i^2 - q_i^2 R,$$

$$B^2 - AC = (p_i q_{-i} - q_i p_{i-1})^2 R = R, \quad \text{C. Q. F. D.}$$

Théorème II. — *Soit*

$$\sqrt{R} = \alpha + \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \ldots + \cfrac{1}{+ \alpha_i \cfrac{1}{y_i}}}},$$

où y_i est l'une des racines de l'équation

$$(p_i^2 - q_i^2 R) y_i^2 + 2(p_i p_{i-1} - q_i q_{i-1} R) y_i + (p_{i-1}^2 - q_{i-1}^2 R) = 0.$$

Si

$$p_i^2 - q_i^2 R = a,$$

a étant constant, pour i impair, nous aurons

$$a = 1.$$

Démonstration. — Des équations

$$p_i^2 - q_i^2 R = a,$$
$$p_i q_{i-1} - q_i p_{i-1} = (-1)^{i-1} = 1,$$

on déduit

$$q_i q_{i-1} R - p_i p_{i-1} = \frac{p_i - a q_{i-1}}{q_i},$$

d'où il suit que

$$\frac{p_i - a q_{i-1}}{q_i}$$

est une fonction entière. Mais, comme

$$\delta p_i > \delta q_i > \delta q_{i-1} \quad (^1),$$

il est évident que $a q_{i-1}$ est le reste de la division de p_i par q_i. Par conséquent,

$$\frac{p_i}{q_i} = \alpha + \frac{a q_{i-1}}{q_i},$$

ou

$$\frac{p_i}{q_i} = \alpha + \cfrac{1}{a^{-1}\cfrac{q_i}{q_{i-1}}}.$$

Mais

$$\frac{p_i}{q_i} = \alpha + \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \ldots + \cfrac{1}{\alpha_i}}},$$

donc

$$\frac{a^{-1} q_i}{q_{i-1}} = \alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{1}{\alpha_3 + \ldots}},$$

$$\frac{q_i}{q_{i-1}} = \alpha_i + \cfrac{1}{a^{-1}\alpha_2 + \cfrac{1}{a\alpha_3 + \ldots}},$$

D'après une propriété bien connue des fractions conti-

---

(1) δp_i est le degré de la fonction p_i (*Œuvres complètes*, t. I, p. 108 et suiv.).

nues, nous aurons (¹)

$$\frac{q_i}{q_{i-1}} = \alpha_i + \cfrac{1}{\alpha_{i-1} + \cfrac{1}{\alpha_{i-2} + \ldots + \cfrac{1}{\alpha_i}}}.$$

Donc

$$\alpha_i + \cfrac{1}{\alpha_{i-1} + \ldots + \cfrac{1}{\alpha_1}} = a\alpha_1 + \cfrac{1}{a^{-1}\alpha_2 + \ldots + \cfrac{1}{a^{\pm 1}\alpha_i}}.$$

Cette égalité entraîne les suivantes

$$\begin{aligned} \alpha_i &= a\alpha_1, \\ \alpha_{i-1} &= a^{-1}\alpha_2, \\ \alpha_{i-2} &= a\alpha_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \alpha_1 &= a^{\pm 1}\alpha_i. \end{aligned}$$

Si i est impair, en posant

$$i = 2k + 1,$$

nous aurons

$$\alpha_{i-k} = a^{\pm 1}\alpha_{k+1},$$

ou

$$\alpha_{k+1} = a^{\pm 1}\alpha_{k+1},$$

$$a^{\pm 1} = 1,$$

et enfin

$$a = 1. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Théorème III. — *Si, dans le développement de $\sqrt{R}$ en fraction continue, l'un des quotients complets y_i satisfait à l'équation*

$$ay_i^2 + 2by_i + c = 0,$$

où

$$a = \pm(p_i^2 - q_i^2 R)$$

est une quantité constante, la fraction continue est nécessairement périodique.

(¹) Serret, *Cours d'Algèbre supérieure*, t. I, p. 30; 1866.

Démonstration. — Étant donné

$$\sqrt{R} = \alpha + \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \ldots + \cfrac{1}{\alpha_i + \cfrac{1}{y_i}}}}.$$

De l'équation

$$ay_i^2 + 2by_i + c = 0,$$

nous tirerons

$$y_i = \frac{-b + \sqrt{R}}{a},$$

$$y_i = \frac{-b + \alpha + \frac{1}{y}}{a},$$

et, en posant,

$$\frac{-b + \alpha}{a} = \beta,$$

nous aurons

$$y_i = \beta + \frac{1}{ay}.$$

Cela posé, distinguons, avec Abel, deux cas.

Premier cas. — Le nombre $i = 2k + 1$, k étant entier. Dans ce cas

$$a = 1,$$

donc

$$y_i = \beta + \frac{1}{y},$$

donc la fraction continue

$$\sqrt{R} = \alpha + \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \ldots + \cfrac{1}{\alpha_i + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \ldots}}}}}}$$

est évidemment périodique. En outre, nous avons vu

que pour i impair

$$\alpha_{i-m} = \alpha_{m+1}.$$

En posant successivement

$$m = 0, 1, 2, 3, \ldots, (k-1), k,$$

nous obtiendrons

$$\alpha_i = \alpha_1,$$
$$\alpha_{i-1} = \alpha_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\alpha_{k+2} = \alpha_k.$$

Par conséquent les quotients incomplets de la fraction continue formeront la série suivante

$$a, \quad \alpha_1, \quad \alpha_2, \quad \ldots, \quad \alpha_k, \quad \alpha_{k+1}, \quad \alpha_k, \quad \ldots, \quad \alpha_2, \quad \alpha_1, \quad \beta, \quad \ldots.$$

Deuxième cas. — Posons

$$i = 2k.$$

Nous avons

$$y_i = \beta + \frac{1}{ay}.$$

Mais

$$y = \alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \cfrac{1}{\alpha_3 + \ldots + \cfrac{1}{\alpha_i + \cfrac{1}{y_i}}}},$$

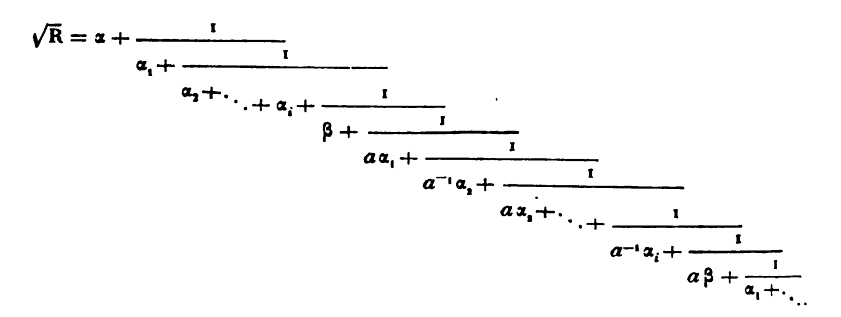
donc

$$ay = a\alpha_1 + \cfrac{1}{a^{-1}\alpha_2 + \cfrac{1}{a\alpha_3 + \ldots + \cfrac{1}{a^{-1}\alpha_i + \cfrac{1}{ay_i}}}}$$

ou

$$ay = a\alpha_1 + \cfrac{1}{a^{-1}\alpha_2 + \cfrac{1}{a\alpha_3 + \ldots + \cfrac{1}{a^{-1}\alpha_i + \cfrac{1}{a\beta + \cfrac{1}{y}}}}},$$

et par conséquent



$$\sqrt{R} = \alpha + \cfrac{1}{\alpha_1 + \cfrac{1}{\alpha_2 + \ldots + \alpha_i + \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{a\alpha_1 + \cfrac{1}{a^{-1}\alpha_2 + \cfrac{1}{a\alpha_3 + \ldots + \cfrac{1}{a^{-1}\alpha_i + \cfrac{1}{a\beta + \cfrac{1}{\alpha_1 + \ldots}}}}}}}}}$$

Il suit de là que les quotients incomplets forment la série

$$\alpha,\quad \alpha_1,\quad \alpha_2,\quad \ldots,\quad \alpha_i,\quad \beta,$$
$$a\alpha_1,\quad a^{-1}\alpha_2,\quad a\alpha_3,\quad \ldots,\quad a^{-1}\alpha_i,\quad a\beta,\quad \alpha_1,\quad \ldots.$$

La période se compose des nombres suivants

$$\alpha_1,\quad \alpha_2,\quad \ldots,\quad \alpha_i,\quad \beta,\quad a\alpha_1,\quad a^{-1}\alpha_2,\quad \ldots,\quad a^{-1}\alpha_i,\quad a\beta.$$

Ainsi, dans les deux cas, $\sqrt{R}$ se développe en fraction continue périodique. C. Q. F. D.

NOUVELLE DÉMONSTRATION GÉOMÉTRIQUE D'UN THÉORÈME DE M. FAURE;

PAR M. ERNEST DUPORCQ,
Élève de l'École Monge.

THÉORÈME. — *Les cercles circonscrits aux triangles conjugués par rapport à une conique fixe coupent orthogonalement un cercle fixe, concentrique à la conique.*

Pour démontrer ce théorème, dû à M. Faure, prenons un point S sur la perpendiculaire élevée au plan P de la conique C par son centre O, et imaginons une sphère passant par le point S et normale à la droite OS.

Si ABC est un triangle conjugué par rapport à la conique, les droites SA, SB et SC sont conjuguées par rapport au cône, ayant pour sommet le point S et pour directrice la conique C; en étendant à l'espace le théorème de Frégier généralisé, on voit donc que les plans, tels que *abc*, déterminés par les points où ces droites coupent la sphère, passent par un point fixe *m*, qui est situé sur la polaire prise par rapport au cône du plan Q tangent en S à la sphère : d'ailleurs, cette droite n'est autre que SO, car, les plans P et Q étant parallèles, leur intersection, rejetée à l'infini, a pour pôle, relativement à la conique C, le centre de cette conique.

Transformons la figure par rayons vecteurs réciproques, en prenant le point S pour origine d'inversion et un module tel que la sphère ait pour transformée le plan P : le plan *abc* a pour transformée la sphère SABC, qui passe donc par le point M, transformée du point fixe *m*, de la droite SO.

Le point O a donc même puissance par rapport à toutes les sphères telles que SABC, et, par suite, par rapport aux cercles circonscrits aux triangles conjugués; *ces cercles sont donc orthogonaux à un cercle fixe, concentrique à la conique.* On en détermine aisément le rayon, en considérant un triangle conjugué particulier, ayant, par exemple, pour sommet un sommet du rectangle construit sur les axes, et deux côtés confondus tangents à la conique en un de ses sommets [1].

---

[1] Il est facile de voir, d'après ce qui précède, qu'on peut, de même, démontrer le théorème de M. Faure au moyen d'une sphère



SUR LE LIEU DES CENTRES DE COURBURE D'UNE COURBE GAUCHE ET SUR LES COURBES GAUCHES A COURBURE CONSTANTE;

PAR M. P. ADAM,
Ingénieur.

Le lieu des centres de courbure d'une courbe plane est l'enveloppe des normales à cette courbe; il n'en est pas de même pour une courbe gauche; mais, dans ce cas :

Le lieu des centres de courbure est l'enveloppe du cercle normal à la courbe considérée et ayant pour diamètre le rayon de la sphère osculatrice qui aboutit à cette courbe.

On voit que cette propriété conduit à la première, comme cas particulier, quand on fait grandir indéfiniment le rayon de la sphère osculatrice en chaque point de la courbe gauche.

Voici, pour démontrer cette proposition, un procédé géométrique très élégant que M. Darboux a bien voulu nous indiquer.

Soit Γ l'arête de rebroussement de la surface polaire de la courbe gauche C considérée. Chaque tangente OO' à Γ est la droite polaire d'un point correspondant M de C; le plan $OO'M$ est normal à C, et le pied O' de la perpendiculaire abaissée de M sur OO' est le centre de courbure de C au point M. Le lieu de O' est une courbe

---

arbitraire, mais en plaçant toujours le point S au point de contact de cette sphère et d'un plan tangent parallèle au plan P.

C' tracée sur la surface polaire et dont, par suite, la tangente $O'T'$ est située dans le plan normal $OO'M$.

Déroulons la surface polaire sur l'un quelconque $O_0O'_0M_0$ de ses plans tangents, en lui donnant une série de rotations élémentaires convenables autour de ses génératrices successives O, O'. Il est visible que les points de C ne quitteront pas cette courbe et viendront en M_0, de sorte que la courbe C se réduira au point M_0. Les courbes Γ et C' se transformeront en deux courbes planes Γ_1 et C'_1 ; l'angle droit $OO'M$ viendra en $O_1O'_1M_0$ en restant droit; la tangente $O'T'$ viendra en $O'_1T'_1$, et comme les éléments de Γ et de C', situés en O et O', ne quittent pas les tangentes OO' et $O'T'$, il s'ensuit que $O'O'_1$ et O'_1T_1 sont des tangentes à Γ_1 et à C'_1.

Donc :

C'_1 *est la podaire de* Γ_1 *par rapport au point* M_0.

Or, d'après une propriété bien connue de la podaire d'une courbe plane Γ_1 par rapport à un point M_0 de son plan :

Cette podaire est l'enveloppe des cercles décrits sur les rayons vecteurs M_0O_1 *comme diamètres.*

Il suffit donc de revenir à la surface polaire et de se rappeler que OM est un rayon de la sphère osculatrice en M à la courbe C pour obtenir la propriété qu'il s'agissait de démontrer.

On peut démontrer cette même propriété assez rapidement par le calcul. Il suffit d'établir que la tangente $O'T'$ est située dans le plan normal à C et qu'elle est perpendiculaire à la droite $O'O''$ qui va du centre de courbure O' au milieu O'' de MO.

Appelons x, y, z les coordonnées du point M. On sait que les coordonnées du centre de courbure O' et du

centre O de la sphère osculatrice sont respectivement

$$a + R\alpha' \quad \text{et} \quad x + R\alpha' - T\alpha'' \frac{dR}{ds},$$
$$\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Les coordonnées du milieu O″ de MO sont donc

$$x + \frac{R\alpha'}{2} - \frac{T\alpha''}{2}\frac{dR}{ds},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et les droites O′T′ et O′O″ ont leurs cosinus directeurs proportionnels respectivement à

$$\alpha + R\frac{d\alpha'}{ds} + \alpha'\frac{dR}{ds} \quad \text{et à} \quad R\alpha' + T\alpha''\frac{dR}{ds},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Nous voulons montrer que

$$\sum \alpha\left(\alpha + R\frac{d\alpha'}{ds} + \alpha'\frac{dR}{ds}\right) = 0$$

et que

$$\sum\left(R\alpha' + T\alpha''\frac{dR}{ds}\right)\left(\alpha + R\frac{d\alpha'}{ds} + \alpha'\frac{dR}{ds}\right) = 0.$$

On le vérifie de suite en se servant des relations

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\alpha'}{ds} = -\dfrac{\alpha}{R} - \dfrac{\alpha''}{T}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Pour pousser plus loin l'analogie entre les deux propriétés énoncées au début de cette Note, cherchons une expression de l'arc élémentaire $d\sigma$ de la courbe C′ des centres de courbure, au moyen du rayon R_1 de la sphère osculatrice.

En appelant ξ, η, ζ les coordonnées du centre de courbure O′, on a

$$(2) \qquad \frac{d\sigma^2}{ds^2} = \frac{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}{ds^2}.$$

Or

$$\xi = x + R\alpha',$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

ce qui donne

$$\frac{d\xi}{ds} = \alpha + \alpha'\frac{dR}{ds} + R\frac{d\alpha'}{ds},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et, en tenant compte des relations (1),

$$\frac{d\xi}{ds} = \alpha'\frac{dR}{ds} - \frac{R\alpha''}{T},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Portant ces valeurs dans l'expression (2) de $\frac{d\sigma^2}{ds^2}$, il vient

$$\frac{d\sigma^2}{ds^2} = \left(\frac{dR}{ds}\right)^2 + \frac{R^2}{T^2}.$$

Mais le carré R_1^2 du rayon de la sphère osculatrice s'exprime par

$$R_1^2 = R^2 + T^2\left(\frac{dR}{ds}\right)^2;$$

par suite,

$$\frac{d\sigma^2}{ds^2} = \frac{R_1^2}{T^2}$$

ou bien

(3) $$\frac{d\sigma}{R_1} = \frac{ds}{T}.$$

Soit MN celle des normales à la courbe C qui est tangente à la sphère osculatrice, c'est-à-dire qui est perpendiculaire à OM; MN n'est autre chose que la direction conjuguée à C sur la sphère osculatrice, ce qui revient à dire que MN admet une enveloppe γ; γ est donc l'une des développées de la courbe C, et, par suite, en désignant par φ l'angle $\widehat{NMO'}$, ou son égal $\widehat{O'OM}$, on a, en vertu d'une formule connue,

$$\frac{ds}{T} = d\varphi;$$

(3) donne donc

$$d\sigma = R_1\, d\varphi.$$

Soit σ_1 l'arc O'M du cercle OO'M décrit sur OM comme diamètre. On a

$$\sigma_1 = R_1 \varphi,$$

d'où

$$d\sigma_1 = R_1\, d\varphi + \varphi\, dR_1 = d\sigma + \varphi\, dR_1.$$

Ainsi, dans le cas d'une courbe gauche, la différentielle $d\sigma$ de la courbe lieu des centres de courbure *n'est pas égale,* en général, à la différentielle $d\sigma_1$ de l'arc de cercle normal O'M dont ce lieu est l'enveloppe. Elle ne le devient que si $dR_1 = 0$, c'est-à-dire $R_1 =$ const.

Donc :

Les courbes gauches pour lesquelles le rayon de la sphère osculatrice est constant sont les seules dont la courbe des centres de courbure soit une développée par rapport au cercle OO'M *ayant pour diamètre le rayon de cette sphère.*

A ce titre, ces courbes offrent de l'intérêt : elles forment une transition entre la courbe gauche quelconque et la courbe plane.

Nous allons voir que ces courbes pour lesquelles le rayon de la sphère osculatrice est constant offrent d'autres caractères géométriques remarquables.

Appliquons, en effet, leur surface polaire sur le plan, comme nous l'avons fait précédemment dans le cas général; le rayon OM de la sphère osculatrice devient $O_1 M_0$, et, comme ce rayon est constant, deux cas se présentent :

1° Ou bien Γ_1 se réduit à un point;

2° Ou bien Γ_1 est un cercle de centre M_0.

Examinons ces deux cas avec quelque détail.

Dans le premier cas, Γ est aussi réduit à un point et, par suite,

La courbe C *est une courbe sphérique.*

Le triangle rectangle OMN donne alors

$$\overline{OM}^2 = OO' \times ON,$$

c'est-à-dire

$$R_1^2 = OO' \times ON.$$

Donc:

γ *et* C′ *sont deux courbes inverses l'une de l'autre par rapport au centre* O *de la sphère.*

Il résulte de là que la tangente O′T′ à C′ doit être dans le plan normal OMN comme la tangente à γ, et que $\widehat{T'O'N} = \widehat{O'NM}$, c'est-à-dire que O′T′ est tangente au cercle OO′M de diamètre OM. On retrouve ainsi, dans le cas particulier d'une courbe sphérique, la propriété que nous avons énoncée en commençant cette Note. On peut, d'ailleurs, de ce cas particulier, déduire immédiatement la même propriété pour le cas général d'une courbe gauche quelconque, en remarquant que quatre éléments consécutifs de cette courbe appartiennent à la sphère osculatrice.

Soit O‴ le point de rencontre de la droite polaire OO′ avec la sphère sur laquelle est tracée la courbe C′; le point O‴ et l'arc de grand cercle O‴M sont le centre de courbure sphérique et le rayon de courbure sphérique de la courbe C. L'arc de grand cercle O‴M et l'arc O′M du cercle OO′M (arc qu'on peut appeler le *rayon de courbure vrai*) ont même longueur. Si donc on appelle $d\sigma_2$ la différentielle de l'arc O‴M, ou, ce qui est pareil, la différentielle de la développée sphérique, on aura

$$d\sigma_2 = d\sigma_1 = d\sigma.$$

Ainsi, dans le cas d'une courbe sphérique :

Le rayon de courbure sphérique et le rayon de courbure vrai ont même longueur; la développée sphérique et la courbe des centres de courbure, qu'on peut appeler la développée vraie, *ont aussi même longueur.*

Le lieu du centre O″ du cercle OO′M est homothétique de la courbe C par rapport au point O. Donc ce lieu est normal au plan du cercle OO′M.

Il en résulte que :

C *et* C′ *sont tracées sur une surface canal* Σ *ayant pour diamètre* OM *le rayon de la sphère;*

mais c'est une surface canal toute particulière, car elle est tangente à une sphère; ou encore, les sphères qui admettent Σ pour enveloppe passent toutes par un point fixe O; C est, d'ailleurs, une ligne de courbure de Σ.

La surface canal Σ est le lieu du cercle OO′M de diamètre OM. Réciproquement :

Si pour une courbe gauche C, *le lieu* Σ *du cercle* OO′M *normal à cette courbe et décrit sur le rayon de la courbe osculatrice comme diamètre est une surface canal, cette courbe est sphérique.*

On peut l'établir analytiquement, mais c'est une chose évidente, car le point O, diamétralement opposé au point M sur la surface canal, doit décrire, comme ce point M, une trajectoire Γ normale au plan du cercle OO′M; et, comme cette trajectoire est tangente au plan OO′M, elle ne peut être qu'un point; le point M reste donc à distance constante d'un point fixe O et la courbe C est sphérique.

Pour terminer ce qui est relatif aux courbes sphé-

riques, remarquons que la développée γ est ici une ligne géodésique sur le cône de sommet O, car le plan osculateur TMN à γ est perpendiculaire au plan OMN, lequel est tangent au cône considéré.

Passons maintenant au second cas, celui dans lequel Γ_1 est un cercle de centre M_0. Alors C'_1 coïncide avec Γ_1. Ainsi :

Quand on applique sur le plan la surface polaire d'une courbe dont la sphère osculatrice a un rayon constant, l'arête de rebroussement de cette surface et la courbe des centres de courbure se transforment en un seul et même cercle.

Dans le cas d'une courbe sphérique, la transformée C'_1 reste quelconque. Il est donc à remarquer que la courbe sphérique qui semblerait devoir être un cas particulier de la courbe dont la sphère osculatrice a un rayon constant en est, au contraire, un cas tout différent qu'il faut traiter à part, comme nous l'avons fait.

Puisque C'_1 coïncide avec Γ_1, on a

$$M_0O'_1 = M_0O_1,$$

c'est-à-dire

$$R = R_1.$$

On retrouve ainsi ce théorème connu :

Une courbe gauche dont la sphère osculatrice a un rayon constant est une courbe à courbure constante, et son rayon de courbure est égal au rayon de la sphère osculatrice. L'arête de rebroussement de la surface polaire coïncide donc avec le lieu des centres de courbure.

Ce résultat met encore en relief la différence très grande qu'il y a entre la courbe dont la sphère oscula-

trice a un rayon constant et la courbe sphérique, puisque cette dernière n'a généralement pas son rayon de courbure constant.

La réciproque de ce théorème est vraie :

Si la courbure d'une courbe gauche est constante, il en est de même du rayon de la sphère osculatrice, et l'on a $R = R_1$.

Cela résulte immédiatement de la relation

$$R_1^2 = R^2 + T^2 \left(\frac{dR}{ds}\right)^2.$$

Voyons ce qu'est, dans le cas particulier qui nous occupe, l'arête de rebroussement Γ de la surface polaire, ou, ce qui est pareil, la courbe C' des centres de courbure.

Pour obtenir Γ il suffit, partant d'une origine quelconque ω, située sur Γ_1, de donner à ce cercle, autour de ses tangentes successives, des rotations élémentaires définies par une loi quelconque; dans ce mouvement, le centre M_0 du cercle Γ_1 décrira précisément la courbe C. Or, étant parvenu à un point quelconque O_1 de Γ_1, le point M_0 décrit autour de la tangente $O_1 N_1$ un élément perpendiculaire au plan $M_0 O_1 \Gamma_1$ déterminé par la portion de Γ_1 non encore déformée.

Donc le lieu des positions successives de la partie non déformée de Γ_1 est une surface canal Σ dont l'axe n'est autre chose que la courbe C décrite par le point M_0; Γ est une courbe tracée sur cette surface canal tangentiellement aux positions successives du cercle Γ_1, et comme les plans de deux cercles Γ_1 consécutifs se coupent suivant une tangente commune $O_1 N_1$, c'est-à-dire comme ces deux cercles n'ont qu'un point commun O_1, Σ est une surface canal à arête de rebroussement réelle et unique Γ. Enfin, les rotations successives du cercle Γ_1

autour de ses tangentes n'altérant l'angle de contingence de ce cercle que d'une quantité infiniment petite par rapport à cet angle, Γ a la même courbure que Γ_1; Γ est donc une courbe à courbure constante comme C et sa courbure est la même que C.

Inversement, considérons le cercle de centre O_1 et de rayon $O_1 M_0$ dont le plan est normal à Γ, c'est-à-dire est perpendiculaire à $O_1 N_1$; ce cercle n'est autre que le cercle osculateur à C en M_0 et il engendre une deuxième surface canal Σ' d'axe Γ et d'arête de rebroussement C; cette arête de rebroussement est unique, parce que deux cercles osculateurs successifs d'une courbe gauche ne se rencontrent qu'en un point.

On peut, en définitive, énoncer le théorème suivant dont la première partie est une proposition classique due à Monge :

Si une courbe gauche a sa courbure $\frac{1}{R}$ *constante, le lieu de ses centres de courbure a aussi sa courbure constante et égale à celle de la proposée. Chacune de ces deux courbes est l'arête de rebroussement unique d'une surface canal de rayon* R *ayant pour axe l'autre courbe et admet pour cercles osculateurs les cercles générateurs de la surface canal sur laquelle elle est tracée.*

Par exemple, la courbe des centres de courbure d'une hélice circulaire est une seconde hélice qui a même courbure que la première, et chacune de ces deux hélices est l'arête de rebroussement unique d'une surface qui admet l'autre hélice comme axe.

La réciproque de ce théorème est évidente :

Si l'on considère une surface canal Σ *à arête de rebroussement unique* Γ, *cette arête est à courbure con-*

stante et elle admet pour cercles osculateurs les cercles générateurs de la surface canal. L'axe C de cette surface est l'arête de rebroussement unique d'une deuxième surface canal Σ' de même rayon que la première, ayant comme axe l'arête de rebroussement de la première et comme cercles osculateurs les cercles générateurs de Σ'.

Terminons par quelques généralités relativement aux courbes gauches quelconques.

Pour une courbe quelconque, la surface lieu du cercle OO′M n'est généralement pas l'enveloppe d'une sphère; mais C est encore une ligne de courbure sur cette surface, comme dans le cas d'une courbe sphérique, puisque les tangentes menées à cette surface normalement à C admettent une enveloppe γ; quant à la développée γ, elle est encore une ligne géodésique sur la surface polaire de C, puisque le plan TMN osculateur à γ est perpendiculaire au plan tangent OMN à la surface polaire; du reste, les autres développées de C sont aussi des lignes géodésiques sur la surface polaire.

γ et C′ sont liées encore par la relation

$$OO' \times ON = \overline{OM}^2 = R_1^2;$$

ce sont donc deux courbes inverses, avec pôle et puissance d'inversion variables.

Remarquons enfin que la relation obtenue plus haut

$$d\sigma = R_1\, d\varphi,$$

laquelle devient, pour le cas d'une courbe plane,

$$d\sigma = \infty \times 0$$

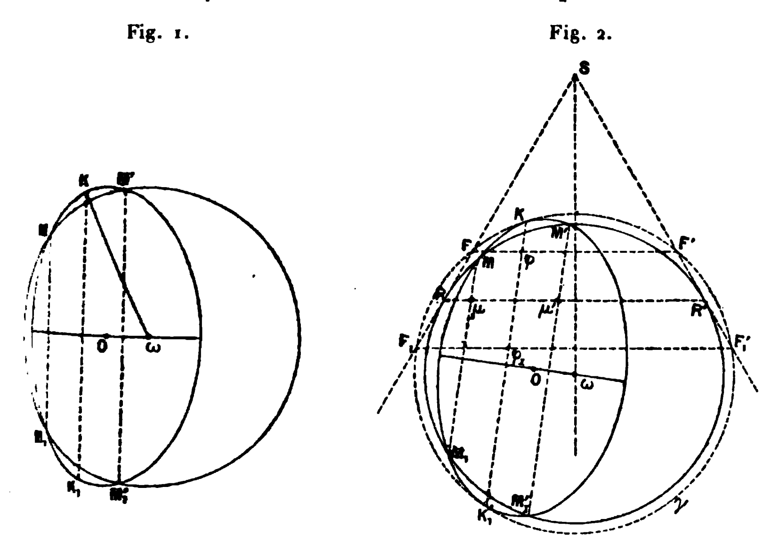
montre que, dans ce cas, la vraie valeur de $R_1\, d\varphi$ n'est autre que la différentielle $d\sigma$ de l'arc de la courbe des centres de courbure.

NOTE DE GÉOMÉTRIE;

PAR M. T. CLUGNET,
Ingénieur des Manufactures de l'État.

THÉORÈME. — *Si, d'un point* ω *de l'axe d'une conique* (*fig.* 1), *comme centre, on décrit une circonférence de rayon quelconque, les cordes d'intersection* MM_1, $M'M'_1$ *du cercle et de la conique sont à égales distances du pied* K *de la normale menée par* ω.

Fig. 1. Fig. 2.



En effet, soit une tangente quelconque RS à la circonférence (*fig.* 2), on peut la considérer comme engendrant un cône d'axe ωS quelconque, passant par ω et situé dans le plan de la figure.

De même, la conique, en tournant autour de son

axe ωO, engendre une surface de révolution du second ordre.

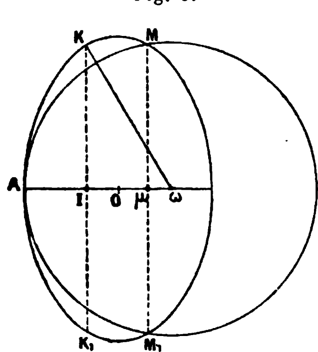
L'intersection de ces deux surfaces se projette sur le plan OωS des axes, suivant une conique, dont on a deux diamètres conjugués à l'aide des sphères limites.

L'une de ces sphères est déterminée par le cercle ωR et donne le diamètre $\mu\mu'$. L'autre sphère est déterminée par le cercle $\omega K\gamma$, tangent à la conique, et fournit le second diamètre $K\varphi\varphi_1 K_1$.

Or K est le pied de normale ωK et KK_1 passe au milieu de $\mu\mu'$. C. Q. F. D.

Corollaire. — Si d'un point ω de l'axe d'une conique on décrit, comme centre, une circonférence tangente au sommet, le pied de la normale ωK, menée de

Fig. 3.



ce point à la conique, est à égales distances de la tangente au sommet et de la corde d'intersection MM_1 du cercle et de la conique (*fig.* 3).

Remarque I. — Ce corollaire donne une construction très rapide de la normale. Il suffit de décrire le

cercle tangent en A; de tracer la corde MM_1 [1], et de mener par I, milieu de $A\mu$, la perpendiculaire IK à l'axe.

Réciproquement, si l'on connaît le pied K de la normale, on en déduit la détermination de la corde MM_1 d'intersection de la conique et du cercle de centre ω et de rayon ωA.

Et en particulier la corde réelle MM_1 (*fig.* 4), lorsque

---

[1] On peut, d'ailleurs, déterminer géométriquement cette corde MM_1. Il suffit, en effet, de considérer la surface de révolution engendrée par la conique autour de son second axe OB et la sphère de grand cercle ωA. Ces deux surfaces se coupent suivant une courbe projetée suivant un cercle sur un plan parallèle au plan projetant ωO.

Ce cercle, dont on a déjà le point *a*, se détermine à l'aide d'une parallèle H quelconque.

D'où le point *m* et la corde MM_1 (*fig.* α).

Fig. α.

Cette construction s'applique également au cas où le cercle n'est pas tangent au sommet. Il suffit alors de prendre deux parallèles pour déterminer le cercle de projection dont le diamètre de front donne les deux cordes cherchées.

les points d'intersection du cercle et de la conique sont imaginaires.

Remarque II. — La construction qui précède permet de construire rapidement la développée de la conique.

Fig. 4.

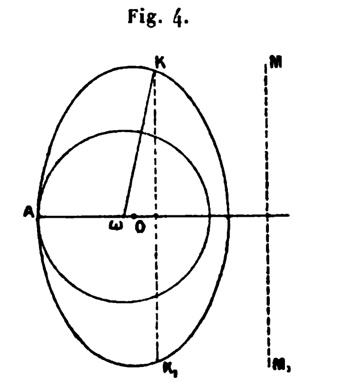
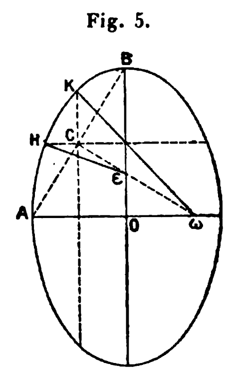


Fig. 5.



Remarque III. — Si l'on mène la perpendiculaire $C\varepsilon\omega$ à AB, en son milieu, les normales issues de ε et de ω ont leurs pieds en H et K, sur les parallèles aux axes passant par C (*fig.* 5).

Fig. 6.

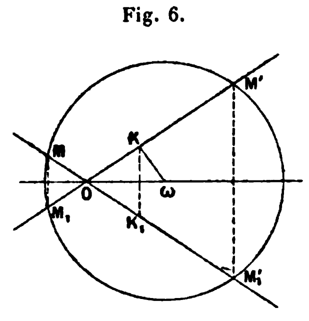
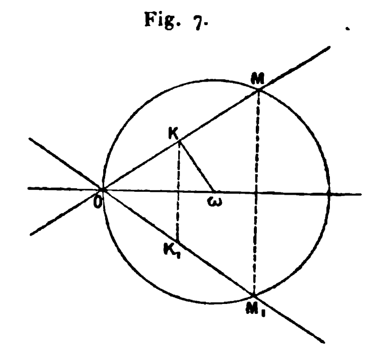


Fig. 7.

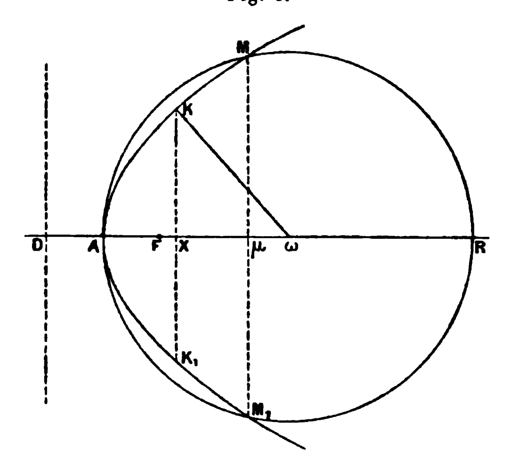


Remarque IV. — Le théorème et le corollaire précédents sont évidents lorsque la conique se réduit à deux droites qui se coupent (*fig.* 6 et 7).

Remarque V. — Soit une parabole de foyer F et de paramètre p (*fig.* 8). On a encore, si ωK est la normale,

$$AX = X\mu.$$

Fig. 8.



Mais

$$AX = A\omega - X\omega = A\omega - p$$

et, par suite,

$$A\mu = 2AX = 2A\omega - 2p = AR - 2p.$$

Cette relation

$$A\mu = AR - 2p$$

détermine la corde d'intersection du cercle ωA et de la parabole. Mais elle montre en outre que

$$AR - A\mu = \mu R = 2p = 4AF.$$

D'où ce théorème :

THÉORÈME. — *La flèche de l'arc intercepté par une parabole, dans toute circonférence tangente en son sommet, est constante et égale au double du paramètre.*

Remarque. — Il suit de là que la position limite de la corde MM_1 est obtenue lorsque AR lui-même est égal à $2p$.

Dans ce cas, le cercle est osculateur et l'on retrouve ainsi le paramètre pour la valeur du rayon de courbure au sommet.

SUR LE DÉVELOPPEMENT DES INTÉGRALES EN SÉRIES;

PAR M. WORONTZOFF.

En posant

$$\int F(x)\,\partial x = \Phi(x) + C,$$

on a

$$\int_{a_0+b_0 m}^{a+bm} F(x)\,\partial x = \Phi(a+bm) - \Phi(a_0+b_0 m) = f(m) = \Phi(a) - \Phi(a_0)$$
$$+ \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{(bm)^k}{1.2.3\ldots k}\Phi^{(k)}(a)$$
$$- \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{(b_0 m)^k}{1.2.3\ldots k}\Phi^{(k)}(a_0) + h,$$

où

$$h = \frac{(1-\theta)^{n-1} m^n}{1.2.3\ldots(n-1)} f^{(n)}(\theta m)$$
$$= \frac{(1-\theta)^{n-1} m^n}{1.2.3\ldots(n-1)} \left[b^n \Phi^{(n)}(a + b\theta m) - b_0^n \Phi^{(n)}(a_0 + b_0\theta m)\right]$$
$$= \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)} \left[\int_0^{bm} \Phi^{(n)}(a + bm - z) z^{n-1}\,\partial z - \int_0^{b_0 m} \Phi^{(n)}(a_0 + b_0 m - z) z^{n-1}\,\partial z\right].$$

Comme

$$\Phi(a) - \Phi(a_0) = \int_{a_0}^{a} F(x)\,\partial x, \qquad \Phi^{(k)}(x) = F^{(k-1)}(x).$$

on obtient, en prenant $m = 1$,

$$(a)\quad \left\{\begin{aligned}
\int_{a_0+b_0}^{a+b} \mathrm{F}(x)\,\partial x &= \int_{a_0}^{a} \mathrm{F}(x)\,\partial x + \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{b^k}{1.2.3\ldots k}\,\mathrm{F}^{(k-1)}(a) \\
&\quad - \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{b_0^k}{1.2.3\ldots k}\,\mathrm{F}^{(k-1)}(a_0) + h_0 \\
&= \int_{b_0}^{b} \mathrm{F}(x)\,\partial x + \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{a^k}{1.2.3\ldots k}\,\mathrm{F}^{(k-1)}(b) \\
&\quad - \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{a_0^k}{1.2.3\ldots k}\,\mathrm{F}^{(k-1)}(b_0) + h'_0, \\
h_0 &= \frac{(1-\theta)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\left[b^n\,\mathrm{F}^{(n-1)}(a+\theta b) - b_0^n\,\mathrm{F}^{(n-1)}(a_0+\theta b_0)\right] \\
&= \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}\left[\int_0^{b} \mathrm{F}^{(n-1)}(a+b-z)\,z^{n-1}\,\partial z \right.\\
&\qquad \left. - \int_0^{b_0} \mathrm{F}^{(n-1)}(a_0+b_0-z)\,z^{n-1}\,\partial z\right], \\
h'_0 &= \frac{(1-\theta)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\left[a^n\,\mathrm{F}^{(n-1)}(b+\theta a) - a_0^n\,\mathrm{F}^{(n-1)}(b_0+\theta a_0)\right] \\
&= \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}\left[\int_0^{a} \mathrm{F}^{(n-1)}(a+b-z)\,z^{n-1}\,\partial z \right.\\
&\qquad \left. - \int_0^{a_0} \mathrm{F}^{(n-1)}(a_0+b_0-z)\,z^{n-1}\,\partial z\right].
\end{aligned}\right.$$

Cette formule, pour $a + b = a_0 + b_0 = c$, donne

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
\int_{a_0}^{a} \mathrm{F}(x)\,\partial x &= \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{(-1)^{k-1}(a-c)^k}{1.2.3\ldots k}\,\mathrm{F}^{(k-1)}(a) \\
&\quad - \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{(-1)^{k-1}(a_0-c)^k}{1.2.3\ldots k}\,\mathrm{F}^{(k-1)}(a_0) + h_1, \\
h_1 &= (-1)^{n-1}\,\frac{1-\theta)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\Big\{(a-c)^n\,\mathrm{F}^{(n-1)}[a+\theta(c-a)] \\
&\qquad - (a_0-c)^n\,\mathrm{F}^{(n-1)}[a_0+\theta(c-a_0)]\Big\} \\
&= \frac{(-1)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\int_{a_0}^{a} \mathrm{F}^{(n-1)}(z)(z-c)^{n-1}\,\partial z \quad (^1);
\end{aligned}\right.$$

---

(1) Nous supposons ici que les fonctions $\mathrm{F}(x)$, $\mathrm{F}'(x)$, ..., $\mathrm{F}^{(n-1)}(x)$ sont finies

d'où l'on déduit, pour $c = a + a_0 (b = a_0,\ b_0 = a)$,

$$(2)\quad \left\{ \begin{aligned} \int_{a_0}^{a} \mathrm{F}(x)\,\partial x &= \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{a^k}{1.2.3\ldots k}\,\mathrm{F}^{(k-1)}(a_0) \\ &\quad - \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{a_0^k}{1.2.3\ldots k}\,\mathrm{F}^{(k-1)}(a) + h_2, \\ h_2 &= \frac{(1-\theta)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} \\ &\quad \times [a^n\,\mathrm{F}^{(n-1)}(a_0 + \theta a) - a_0^n\,\mathrm{F}^{(n-1)}(a + \theta a_0)] \\ &= \int_{a_0}^{a} \mathrm{F}^{(n-1)}(z)\,\frac{(a + a_0 - z)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\,\partial z, \end{aligned} \right.$$

et pour $c = 0$,

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} \int_{a_0}^{a} \mathrm{F}(x)\,\partial x &= \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{1.2.3\ldots k}\,a^k\,\mathrm{F}^{(k-1)}(a) \\ &\quad - \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{1.2.3\ldots k}\,a_0^k\,\mathrm{F}^{(k-1)}(a_0) + h_3, \end{aligned} \right.$$

(Théorème de Bernoulli.)

$$\begin{aligned} h_3 &= (-1)^{n-1}\,\frac{(1-\theta)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} \\ &\quad \times [a^n\,\mathrm{F}^{(n-1)}(\theta a) - a_0^n\,\mathrm{F}^{(n-1)}(\theta a_0)] \\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)} \int_{a_0}^{a} \mathrm{F}^{(n-1)}(z)\,z^{n-1}\,\partial z. \end{aligned}$$

Si l'on pose, dans la formule (a), $b = b_0 = c$, on trouve

$$\int_{a_0+c}^{a+c} \mathrm{F}(x)\,\partial x = \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{(a^k - a_0^k)}{1.2.3\ldots k}\,\mathrm{F}^{(k-1)}(c) + h,$$

---

et continues entre $x = a_0$ et $x = c$, aussi entre $x = a$ et $x = c$, par suite entre $x = a_0$ et $x = a$.

$$h = \frac{(1-\theta)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\left[a^n\,F^{(n-1)}(c+\theta a) - a_0^n\,F^{(n-1)}(c+\theta a_0)\right]$$

$$= \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}\left[\int_0^a F^{(n-1)}(a+c-z)\,z^{n-1}\,\partial z - \int_0^{a_0} F^{(n-1)}(a_0+c-z)\,z^{n-1}\,\partial z\right],$$

ou, en mettant $a-c$ et a_0-c au lieu de a et a_0,

(4)
$$\left\{\begin{aligned} \int_{a_0}^{a} F(x)\,\partial x &= \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{[(a-c)^k-(a_0-c)^k]}{1.2.3\ldots k}\,F^{(k-1)}(c) + h_4 \\ &= \frac{(1-\theta)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\Big\{(a-c)^n\,F^{(n-1)}[c+\theta(a-c)] \\ &\qquad -(a_0-c)^n\,F^{(n-1)}[c+\theta(a_0-c)]\Big\}, \\ h_4 &= \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)} \\ &\quad\times\left[\int_0^{a-c} F^{(n-1)}(a-z)\,z^{n-1}\,\partial z - \int_0^{a_0-c} F^{(n-1)}(a_0-z)\,z^{n-1}\,\partial z \text{ [1]}\right]. \end{aligned}\right.$$

En faisant successivement dans cette série $c=a_0$ et $c=0$, on obtient les formules bien connues

(5)
$$\int_{a_0}^{a} F(x)\,\partial x = \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{(a-a_0)^k}{1.2.3\ldots k}\,F^{(k-1)}(a_0) + h_5,$$

$$h_5 = \frac{(1-\theta)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\,(a-a_0)^n\,F^{(n-1)}[a_0+\theta(a-a_0)]$$

$$= \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}\int_0^{a-a_0} F^{(n-1)}(a-z)\,z^{n-1}\,\partial z;$$

d'où, pour $n=1$, si $F(x)$ est une fonction finie et continue entre $x=a_0$ et $x=a$,

$$\int_{a_0}^{a} F(x)\,\partial x = (a-a_0)\,F[a_0+\theta(a-a_0)]$$

---

[1] Les fonctions $F(x)$, $F'(x)$, ..., $F^{(n-1)}(x)$ sont supposées finies et continues entre $x=c$ et $x=a_0$, aussi entre $x=c$ et $x=a$, par suite entre $x=a_0$ et $x=a$.

et

(6) $$\int_{a_0}^{a} F(x)\,\partial x = \sum_{k=1}^{k=n-1} \frac{(a^k - a_0^k)}{1.2.3\ldots k} F^{(k-1)}(0) + h_6,$$

$$h_6 = \frac{(1-\theta)^{n-1}}{1.2.3\ldots(n-1)}\left[a^n F^{(n-1)}(\theta a) - a_0^n F^{(n-1)}(\theta a_0)\right]$$
$$= \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}\left[\int_0^a F^{(n-1)}(a-z)\,z^{n-1}\,\partial z - \int_0^{a_0} F^{(n-1)}(a_0 - z)\,z^{n-1}\,\partial z\right];$$

d'où, pour $n = 1$,

$$\int_{a_0}^{a} F(x)\,\partial x = a\,F(\theta a) - a_0\,F(\theta a_0) = \int_0^a F(x)\,\partial x - \int_0^{a_0} F(x)\,\partial x.$$

Remarque. — Si l'on applique la formule

$$\int_0^a F(x)\,\partial x = a\,F(\theta a)$$

aux intégrales

$$h_n = \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)}\int_0^a f^{(n)}(a_0 + a - x)\,x^{n-1}\,\partial x$$
$$= \frac{1}{1.2.3\ldots n}\int_0^{a^n} f^{(n)}\left(a_0 + a - y^{\frac{1}{n}}\right)\partial y$$
$$= \frac{1}{1.2.3\ldots(n-1)q}\int_0^{a^q} f^{(n)}\left(a_0 + a - z^{\frac{1}{q}}\right)\sqrt[q]{z^{n-q}}\,\partial z$$

où

$$x = y^{\frac{1}{n}} = z^{\frac{1}{q}}, \qquad F(x) = f^{(n)}(a_0 + a - x)\,x^{n-1},$$
$$[a\,F(\theta a) = a\,f^{(n)}(a_0 + a - \theta a)(\theta a)^{n-1} = a^n(1-\theta_1)^{n-1} f^{(n)}(a_0 + \theta_1 a)],$$

on obtient

$$h_n = \frac{(1-\theta)^{n-1} a^n}{1.2.3\ldots(n-1)} f^{(n)}(a_0 + \theta_1 a)$$
$$= \frac{a^n}{1.2.3\ldots n} f^{(n)}(a_0 + \theta a)$$
$$= \frac{(1-\theta_2)^{n-q} a^n}{1.2.3\ldots(n-1)q} f^{(n)}(a_0 + \theta_2 a)$$

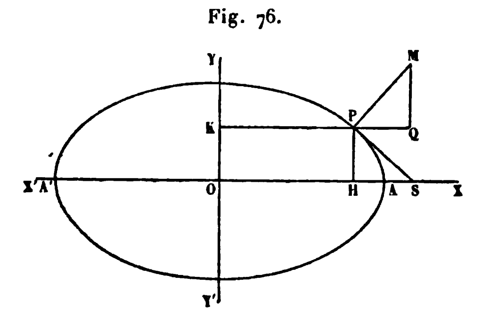
ÉTUDE GÉOMÉTRIQUE DES PROPRIÉTÉS DES CONIQUES D'APRÈS LEUR DÉFINITION [1];

Par M. L. MALEYX.

XIII. *Normales à une conique passant par un point donné dans son plan,* THÉORÈME DE JOACHIMSTAHL. — Examinons le cas de l'ellipse, la question se résoudra d'une manière analogue pour les autres courbes.

Soit O une ellipse dont les axes $2a$, $2b$ sont dirigés suivant OX, OY, et à laquelle nous voulons mener une normale par le point M (*fig.* 76).

Fig. 76.



Soit MP une de ces normales; P son point d'incidence, que nous définirons par ses distances PH, PK aux deux axes; nous représenterons ces distances, ou coordonnées, par y, x respectivement. Nous définirons aussi la position du point M par les distances analogues, β, α; y, x, β, α étant susceptibles de signes.

Menons la tangente PS en P, cette droite rencontrant OX en S; les deux triangles rectangles MPQ,

[1] Voir t. X (1891), p. 125.

PHS sont semblables comme ayant leurs côtés perpendiculaires : on en déduit

$$\frac{MQ}{PQ} = \frac{OS - OH}{PH} \qquad \text{ou} \qquad \frac{\beta - y}{\alpha - x} = \frac{OS - x}{y}.$$

Mais les points H, S étant conjugués harmoniques par rapport à A, A', on a

$$\overline{OA}^2 = OS \times OH, \qquad \text{d'où} \qquad OS = \frac{a^2}{x};$$

remplaçant,

$$\frac{y - \beta}{x - \alpha} = \frac{\frac{a^2}{x} - x}{y} = \frac{a^2 - x^2}{xy}.$$

D'après le n° II du présent Chapitre, on a

$$a^2 - x^2 = \frac{a^2}{b^2} y^2;$$

substituant,

(1) $$\frac{y - \beta}{x - \alpha} = \frac{a^2 y}{b^2 x}.$$

Cette équation peut se mettre sous la forme

$$(a^2 - b^2)xy + b^2\beta x - a^2\alpha y = 0$$

ou

(2) $$\left(y + \frac{b^2\beta}{a^2 - b^2}\right)\left(x - \frac{a^2\alpha}{a^2 - b^2}\right) = \frac{-a^2 b^2 \alpha\beta}{a^2 - b^2}.$$

Si nous construisons les parallèles à OY, OX, situés à des distances du point O respectivement représentées par $\frac{a^2\alpha}{a^2 - b^2}$, $\frac{-b^2\beta}{a^2 - b^2}$, les facteurs $x - \frac{a^2\alpha}{a^2 - b^2}$, $y + \frac{b^2\beta}{a^2 - b^2}$, représentent les distances du point P à ces deux parallèles.

Il résulte de la relation (2) que le produit de ces distances est constant, et, d'après le premier des théorèmes

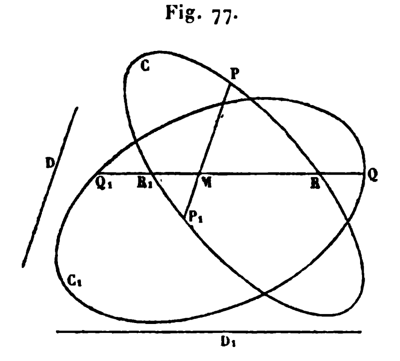
d'Apollonius, que le point P se trouve sur une hyperbole équilatère ayant ces parallèles pour asymptotes.

La relation (1) étant visiblement satisfaite pour le point M et pour le point O, ces deux points appartiennent à l'hyperbole équilatère. On peut construire cette courbe dont on connaît les asymptotes et deux points; ses points communs avec l'ellipse feront connaître les points d'incidence des normales issues de P, qui sont en général au nombre de quatre.

On peut conclure du théorème du numéro précédent, que : *trois des points d'incidence des normales menées d'un point à une conique et le point diamétralement opposé au point d'incidence de la quatrième, dans cette conique, appartiennent à un même cercle;* c'est là le THÉORÈME DE JOACHIMSTAHL.

XIV. LIEU GÉOMÉTRIQUE. — *Étant données deux coniques* C *et* C_1, *ainsi que deux directions* D *et* D_1, *dans le même plan; par un point* M *du plan on mène*

Fig. 77.



deux parallèles, la première à la direction D, *rencontrant la conique* C *aux points* P *et* P_1, *la deuxième à la droite* D_1, *rencontrant la conique* C_1 *aux points* Q *et* Q_1; *on demande de déterminer le lieu du point* M

par la condition que le produit $MP \times MP_1$ *ait avec le produit* $MQ \times MQ_1$ *un rapport donné* α (*fig.* 77).

Soient R et R_1 les points où la parallèle à D_1 passant par M rencontre la conique C, pour tous les points du plan, et, d'après le théorème de Newton, on a, β étant un nombre fini,

$$\frac{MP \times MP_1}{MR \times MR_1} = \beta.$$

Si, en outre, M est un point du lieu, on a aussi

$$\frac{MP \times MP_1}{MQ \times MQ_1} = \alpha.$$

Divisant membre à membre, on en conclut que, pour tous les points M du lieu,

$$\frac{MQ \times MQ_1}{MR \times MR_1} = \frac{\beta}{\alpha}.$$

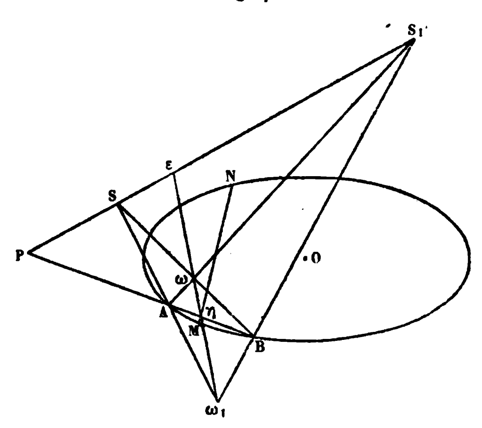
D'après cette égalité, le rapport involutif d'un point M du lieu, par rapport aux couples de points de rencontre d'une droite de direction donnée avec les coniques C et C_1, est constant, et il en résulte, d'après le théorème du n° VII du Chap. II, que le lieu est une conique passant par les points communs des deux premières.

XV. *Si deux cônes ont pour directrice une même conique, ils se coupent suivant une seconde courbe plane, qui est une autre conique* ([1]). — Soient S et S_1 les sommets des deux cônes ayant pour directrice la conique O (*fig.* 78); unissons S_1S par une ligne droite

([1]) Depuis ma rédaction, je me suis aperçu que la démonstration géométrique de ce théorème se trouvait dans le *Cours de Géométrie descriptive* de M. Ch. Brisse, IIe Partie, p. 92.

coupant le plan de la directrice en P. Par la droite SS_1 faisons passer un plan variable coupant celui de la directrice suivant la droite PAB et les deux cônes suivant les deux couples de génératrices SA et SB, S_1A et S_1B. Ces deux couples de génératrices se coupent aux points A, B, ω, ω_1; les points A, B décrivent la directrice, les points ω, ω_1 la seconde partie de l'intersection qu'il faut démontrer être plane.

Fig. 78.



Or la droite $\omega_1\omega$ est la polaire de P par rapport aux deux droites ω_1S, ω_1S_1; il en résulte que les points ε, η, où elle rencontre PS_1 et PB, sont conjugués harmoniques de P par rapport aux couples de points S et S_1, A et B; le point ε est fixe, puisque P, S et S_1 le sont, et quant à η il décrit la polaire MN de P par rapport à la conique; les points ω, ω_1 sont donc situés dans le plan εMN qui est fixe, et, en conséquence, la courbe qu'ils décrivent est plane.

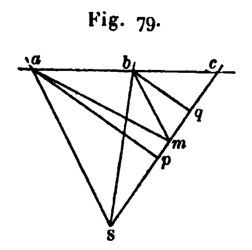
XVI. Note. — Le théorème de Pappus nous a servi au n° VI, Chap. II, pour établir un théorème important

par ses conséquences, soit pour fournir une construction relativement simple des points communs d'une conique et d'une droite, soit pour établir d'une manière immédiate le théorème de Desargues.

Il nous a paru intéressant de montrer comment, du même théorème de Pappus se déduit le principe de description d'une conique par le point d'intersection de deux rayons homologues de deux faisceaux homographiques, et c'est là le but de la présente Note, par laquelle nous allons terminer notre étude.

Lemme I. — *Considérons un faisceau de trois droites issues d'un point* S (*fig.* 79), *et une sécante qui les rencontre en* a, b, c; *le rapport des segments* ca, cb

Fig. 79.



est égal à celui des aires des triangles Sam, Sbm *ayant pour bases les rayons* Sa, Sb, *et pour sommet un point* m *quelconque situé sur le rayon* Sc.

En effet, les deux triangles Sac, Sbc, considérés comme ayant leur sommet en S, ont même hauteur et sont proportionnels à leurs bases; et, si on les considère comme ayant leurs sommets en a et b, ils ont même base et sont proportionnels à leurs hauteurs, d'où les égalités

$$\frac{ca}{cb} = \frac{\text{S}ac}{\text{S}bc} = \frac{ap}{bq},$$

ap et *bq* étant les perpendiculaires menées de *a* et *b* sur S*c*.

D'ailleurs, les deux triangles *am*S, *bm*S ont aussi même base et pour hauteurs *ap* et *bq* respectivement; dès lors,

$$\frac{ap}{bq} = \frac{ma\mathrm{S}}{mb\mathrm{S}},$$

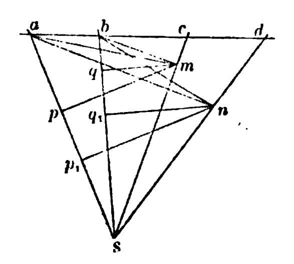
et, par comparaison avec les égalités précédentes, on a

$$\frac{ca}{cb} = \frac{ma\mathrm{S}}{mb\mathrm{S}},$$

ce qu'on voulait démontrer.

Lemme II. — *Le rapport anharmonique des quatre points a, b, c, d, où une droite coupe les rayons d'un faisceau* S.*abcd* (*fig.* 80), *soit* $\frac{ca}{cb} : \frac{da}{db}$, *est égal au rap-*

Fig. 80.



port des rapports des distances de deux points m et n pris arbitrairement sur les rayons S*c*, S*d*, *aux rayons* S*a et* S*b*, *respectivement, soit* $\frac{mp}{mq} : \frac{np_1}{nq_1}$, *mp*, np_1 *étant perpendiculaires sur* S*a*, *et mq*, nq_1 *perpendiculaires sur* S*b*.

En effet, et d'après le lemme I, on a

$$\frac{ca}{cb} = \frac{ma\mathrm{S}}{mb\mathrm{S}}$$

et

$$\frac{da}{db} = \frac{na\text{S}}{nb\text{S}};$$

divisant membre à membre,

$$\frac{ca}{cb} : \frac{da}{db} = \frac{ma\text{S}}{mb\text{S}} : \frac{na\text{S}}{nb\text{S}},$$

ou

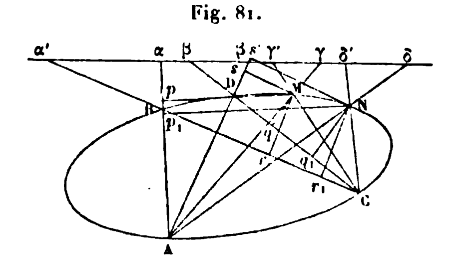
$$\frac{ca}{cb} : \frac{da}{db} = \frac{ma\text{S}}{na\text{S}} : \frac{mb\text{S}}{nb\text{S}};$$

mais les couples de triangles maS et naS, mbS et nbS ont mêmes bases et sont proportionnels à leurs hauteurs; donc, substituant aux rapports de ces triangles ceux de leurs hauteurs dans la dernière égalité, on a

$$\frac{ca}{cb} : \frac{da}{db} = \frac{mp}{mq} : \frac{np_1}{nq_1}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Soit actuellement une conique ABDMNC : construisons deux faisceaux ayant pour sommets deux points A

Fig. 81.



et C de la conique, et dont les rayons homologues se coupent sur cette courbe en B, D, M, N (*fig.* 81); il s'agit de montrer qu'ils sont homographiques, c'est-à-dire que les deux faisceaux A.BDMN, C.BDMN, ont même rapport anharmonique. Pour le démontrer, coupons les deux faisceaux par la transversale α', δ, et des

points M et n abaissons Mp, Np_1 perpendiculaires sur AB, de même. Mq, Nq_1 sur DC; Mr, Nr_1 sur BC; Ms, Ns_1 sur AD; il suffit de montrer l'égalité des deux rapports anharmoniques $\frac{\gamma\alpha}{\gamma\beta} : \frac{\delta\alpha}{\delta\beta}$ et $\frac{\gamma'\alpha'}{\gamma'\beta'} : \frac{\delta'\alpha'}{\delta'\beta'}$.

Or, d'après le lemme précédent,

$$\frac{\gamma\alpha}{\gamma\beta} : \frac{\delta\alpha}{\delta\beta} = \frac{Mp}{Ms} : \frac{Np_1}{Ns_1}$$

et

$$\frac{\gamma'\alpha'}{\gamma'\beta'} : \frac{\delta'\alpha'}{\delta'\beta'} = \frac{Mr}{Mq} : \frac{Nr_1}{Nq_1};$$

dès lors, il suffit d'établir,

$$\frac{Mp}{Ms} : \frac{Np_1}{Ns_1} = \frac{Mr}{Mq} : \frac{Nr_1}{Nq_1}$$

ou

$$\frac{Mp}{Ms} : \frac{Mr}{Mq} = \frac{Np_1}{Ns_1} : \frac{Nr_1}{Nq_1},$$

ce qui est évident d'après le théorème de Pappus, ABCD constituant un quadrilatère inscrit, et d'après les égalités

$$Mp \times Mq = \alpha Mr \times Ms$$

et

$$Np_1 \times Nq_1 = \alpha Nr_1 \times Ns_1,$$

lues sous les formes

$$\frac{Mp}{Ms} : \frac{Mr}{Mq} = \alpha = \frac{Np_1}{Ns_1} : \frac{Nr_1}{Nq_1}.$$

(*Fin.*)

RÉALISATION ET USAGE DES FORMES IMAGINAIRES EN GÉOMÉTRIE.

CONFÉRENCES DONNÉES PAR M. MAXIMILIEN MARIE
au Collège Stanislas, à Sainte-Barbe, à l'École Sainte-Geneviève et à l'École Monge (¹).

22. *Les périodes de la quadratrice d'une courbe algébrique peuvent encore disparaître en devenant infinies.* — Lorsqu'un anneau de la courbe réelle se transforme en une branche parabolique, l'aire correspondante devient infinie et la quadratrice perd une période, parce qu'elle n'est plus exprimable.

Il en est de même lorsque l'une des deux branches de la courbe réelle, qui comprenaient des anneaux fermés de conjuguées, passant à l'infini, ces conjuguées deviennent paraboliques.

C'est ainsi que la quadratrice d'une conique perd sa période et devient algébrique lorsque cette conique se transforme en parabole. Si l'on considère cette parabole comme dérivée de l'ellipse, l'aire de cette ellipse, qui formait la période réelle de la quadratrice, est devenue infinie et a disparu. Si, au contraire, on considère la parabole comme dérivée de l'hyperbole, une des branches de cette hyperbole a passé à l'infini, l'aire commune des conjuguées de cette hyperbole a grandi indéfiniment et la période imaginaire est devenue infinie.

Il en serait évidemment de même si des anneaux de l'enveloppe imaginaire d'un lieu devenaient paraboliques.

(¹) *Voir* t. IX, p. 508.

Mais la théorie des quadratrices des courbes paraboliques offre aujourd'hui des difficultés inabordables.

Ces courbes présentent, avec les courbes pourvues de points doubles à distance finie, cette analogie géométrique que ni les unes ni les autres n'ont jamais, eu égard à leur degré, le nombre maximum de tangentes parallèles à une direction donnée, et peut-être est-ce là le point de vue où il faudrait se placer pour en faire l'étude, car toute réduction dans ce nombre de tangentes en amène forcément une correspondante dans le nombre des anneaux fermés, mais il n'y a rien de fait à cet égard.

Nous ne nous occuperons donc plus des courbes paraboliques.

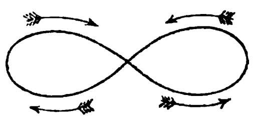
Au contraire, ce que nous nous proposons est de chercher, d'abord, le nombre des périodes de la quadratrice de la courbe la plus générale de degré m et de voir ensuite comment elle pourrait les perdre toutes successivement, les coefficients de l'équation de la courbe n'étant alors liés entre eux que par le moindre nombre possible de conditions. En d'autres termes, nous voulons déterminer la courbe la plus générale de degré m, dont la quadrature serait algébrique.

23. *D'une réduction accessoire d'une nouvelle unité dans le nombre des périodes de la quadratrice, au moment de la formation d'un point double à distance finie dans la courbe correspondante.* — Cette réduction se produit nécessairement au moment de la formation d'un point double qui fait évanouir la représentation géométrique d'une période, parce que deux anneaux, entre lesquels était compris celui qui vient de se réduire à un point unique, viennent se confondre en un seul circuit, en forme de huit, où il n'est plus possible de distinguer les deux anneaux l'un de l'autre, la condition

de continuité obligeant le point décrivant $[x, y]$ à parcourir les deux boucles en avançant toujours dans le même sens.

Il suffira d'établir le fait dans le cas le plus général, parce que les périodes de la quadratrice de la courbe la plus générale de degré m devant, dans tous les cas particuliers, rester les mêmes fonctions des coefficients, si

Fig. 20.



l'on peut constater, dans un cas absolument général, que la formation d'un point double entraîne la disparition de deux périodes dans la quadratrice, on pourra conclure à la même coïncidence dans tous les cas particuliers.

Supposons que la courbe ait toutes ses asymptotes réelles et que ce soit un anneau fermé de la courbe réelle qui doive s'évanouir : menons à cet anneau deux tangentes parallèles qui n'aient la direction d'aucune asymptote : les conjuguées du lieu qui toucheront l'anneau considéré aux points de contact des deux tangentes parallèles seront nécessairement fermées, quelque loin qu'ils s'étendent d'ailleurs, parce que la conjuguée à laquelle ils appartiendront, n'ayant pas d'asymptotes, n'aura pas de branches infinies; les produits par $\sqrt{-1}$ des aires de ces deux anneaux formeront deux périodes imaginaires de la quadratrice du lieu.

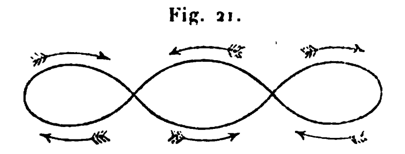
Mais au moment où l'anneau de la courbe réelle s'évanouira en un point isolé, les deux anneaux de la conjuguée se rejoindront au point isolé et s'y couperont sous un angle, au lieu de s'y toucher, de sorte que les

deux périodes, précédemment distinctes, se fondront en une seule égale à leur différence.

Il en serait évidemment de même si l'anneau qui devrait s'évanouir appartenait à une conjuguée et était, au contraire, compris entre deux anneaux fermés de la courbe réelle. Seulement les deux tangentes à la courbe au point double seraient alors réelles, au lieu d'être imaginaires.

Ainsi la formation d'un point double doit entraîner une réduction de deux unités dans le nombre des périodes. Le même fait, au reste, se reproduirait dans les mêmes conditions si, un huit s'étant déjà produit, il se formait un nouveau point double sur son pourtour. Seulement, au lieu de deux boucles, il s'en présenterait trois, en continuité entre elles.

Fig. 21.



Les trois boucles seraient, en tous cas, de même nature, c'est-à-dire toutes les trois réelles ou toutes les trois imaginaires.

En résumé, on doit admettre que la formation de p points doubles dans une courbe entraîne une réduction de $2p$ unités dans le nombre des périodes de sa quadratrice.

24. *Des autres conditions dans lesquelles peuvent se produire des réductions dans le nombre des périodes.* — D'autres réductions peuvent être amenées par beaucoup d'autres circonstances : ainsi une période représentée par l'aire d'un anneau en forme de *huit* disparaîtra lorsque les aires des deux boucles seront égales; deux

périodes représentées par les aires des deux anneaux fermés de la courbe réelle se réduiront à une seule si ces aires sont égales, et il en sera de même si les anneaux fermés de conjuguées, compris entre des branches distinctes de la courbe réelle, présentent la même aire, etc.

C'est ainsi, par exemple, que la quadratrice de la courbe

$$y^4 + x^4 = a^4$$

ne comporte que deux périodes $\frac{\omega}{2}$ et $\frac{\omega}{2}\sqrt{-1}$, ω désignant l'aire de l'anneau de la courbe réelle, compris entre les droites $x = \pm a$ et $y = \pm a$. Mais aussi, dans cet exemple, la courbe réelle, ses conjuguées à abscisses et à ordonnées réelles, et l'enveloppe imaginaire de ses conjuguées se confondent géométriquement.

Mais dans ces dernières circonstances, la disparition de chaque période manquante tiendra à la présence d'une relation particulière entre les coefficients de l'équation de la courbe, tandis que la relation unique qui introduit chaque point double entraîne une réduction de deux unités dans le nombre des périodes, de sorte qu'à égalité dans le nombre des périodes restantes, la courbe dont l'équation contiendra encore le plus de paramètres indépendants sera celle pour laquelle la disparition des périodes manquantes sera déterminée exclusivement par la formation de points doubles en nombre suffisant, c'est-à-dire en nombre p, s'il a disparu $2p$ périodes.

25. *Du nombre maximum de points doubles et du nombre maximum de périodes non cycliques.* — Si une courbe de degré m se résout en deux autres, l'une de degré $(m - q)$, et l'autre de degré q, n'ayant ni l'une ni l'autre de points doubles, le nombre des points doubles de la courbe composée sera

$$q(m - q);$$

si à son tour la courbe de degré q se résout en deux autres, de degrés $(q-r)$ et r, n'ayant pas de points doubles, la courbe décomposée présentera

$$(m-q)(q-r)+(m-q)r+r(q-r)=(m-q)q+r(q-r)$$

points doubles.

Il en résulte que, plus une courbe de degré m se segmente en courbes de degrés moindres, n'ayant pas de points doubles, plus elle présente de points doubles.

Le nombre maximum de points doubles que puisse présenter une courbe de degré m correspond donc au cas où elle dégénère en m droites, et ce nombre est

$$\frac{m(m-1)}{2}.$$

Il reste alors $2m$ coefficients indépendants dans l'équation de la courbe, au lieu de

$$\frac{(m+1)(m+2)}{2}-1;$$

les coefficients de la courbe satisfont donc alors à

$$\frac{(m+1)(m+2)}{2}-1-2m=\frac{m(m-1)}{2}$$

conditions.

Mais de ces $\frac{m(m-1)}{2}$ conditions, il y en a $(m-1)$ qui expriment que les m périodes cycliques sont nulles, puisqu'elles le sont en effet, et les

$$\frac{m(m-1)}{2}-(m-1)=\frac{(m-2)(m-1)}{2}$$

autres expriment chacune la présence d'un point double dans la courbe.

Si l'on supprimait les $(m-1)$ conditions qui expriment que les m périodes cycliques sont nulles, lesquelles peuvent s'exprimer à part, les $\frac{(m-2)(m-1)}{2}$ conditions restantes exprimeraient encore la présence d'autant de points doubles, et, les $(m-1)$ premières étant retirées, la courbe redeviendrait irréductible.

Donc le nombre maximum de points doubles d'une courbe irréductible de degré m est

$$\frac{(m-1)(m-2)}{2}$$

et, par conséquent, la quadratrice de la courbe la plus générale de degré m comporte

$$(m-1)(m-2)$$

périodes non cycliques, et, si l'on rajoute les $(m-1)$ périodes cycliques, on obtient $(m-1)^2$ pour le nombre total des périodes de toute nature.

On conclut de cette théorie :

1° Qu'une courbe de degré m, qui présente

$$\frac{(m-2)(m-1)}{2}$$

points doubles et que toutes ses asymptotes coupent chacune en trois points situés à l'infini est quarrable algébriquement;

Qu'une courbe de degré m qui présente

$$\frac{(m-2)(m-1)}{2}$$

points doubles, mais dont les asymptotes sont quelconques, est quarrable par les fonctions circulaires inverses ou par les fonctions logarithmiques;

Qu'une courbe de degré m qui présente

$$\frac{(m-1)(m-2)}{2}-1$$

points doubles est quarrable par les fonctions circulaires inverses et par les fonctions doublement périodiques;

2° Que la courbe la plus générale de degré m, quarrable algébriquement, est celle qui présente

$$\frac{(m-1)(m-2)}{2}$$

points doubles et que ses asymptotes coupent chacune en trois points à l'infini;

Que la courbe la plus générale de degré m, quarrable par les fonctions circulaires inverses, est celle qui présente $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ points doubles;

Que la courbe la plus générale de degré m, quarrable par les fonctions circulaires inverses et par les fonctions doublement périodiques, est celle qui présente

$$\frac{(m-1)(m-2)}{2}-1$$

points doubles, etc.

Mais il ne faudrait pas conclure, du mode de quadrabilité d'une courbe, au nombre de ses points doubles, parce que, comme nous l'avons dit, le nombre des périodes peut se réduire dans toutes sortes de circonstances. Ainsi la courbe $y^4+x^4=a^4$ est quarrable par les fonctions à deux périodes, c'est-à-dire par les fonctions elliptiques, et cependant elle ne présente aucun point double. (*A suivre.*)

GÉNÉRALISATION D'UN THÉORÈME SUR L'ÉQUILIBRE DES SURFACES FERMÉES (1);

PAR LE P. CH. ROBERT, S. J.

LEMME I. — *Étant donnée une surface fermée, prouver que des forces normales à cette surface et proportionnelles à ses éléments se font équilibre.*

La force F appliquée au point M est égale à

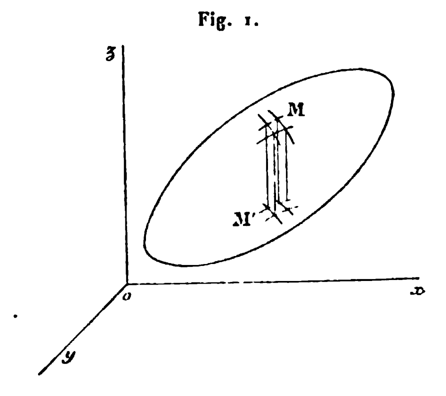
$$\mu\, dx\, dy \sqrt{1+p^2+q^2}$$

ou, plus simplement, à

$$\mu\, d\omega.$$

Imaginons un cylindre très petit, parallèle à Oz. Ce

Fig. 1.



cylindre va déterminer un second élément ou, en général, un nombre pair d'éléments, puisque la surface est fermée.

(1) Les deux lemmes et les deux premiers théorèmes sont extraits (en substance) du *Journal de Liouville*, 1re série, t. XIII, p. 243.

La force appliquée en M′ est

$$\mu\, d\omega_1.$$

Décomposons chacune des deux forces en trois parallèles aux axes. Les deux composantes suivant Oz sont

$$\mu\, d\omega \cos\gamma$$

et

$$\mu\, d\omega_1 \cos\gamma_1.$$

Or on a

$$\mu\, d\omega \cos\gamma = \mu\, d\omega_1 \cos\gamma_1;$$

car $d\omega \cos\gamma$ et $d\omega_1 \cos\gamma_1$ représentent l'une et l'autre la section droite du cylindre considéré.

Donc les deux composantes suivant Oz sont égales et de sens contraires, donc elles se détruisent.

On démontrerait de même que les composantes suivant Ox et Oy se détruisent, donc la surface est en équilibre. C. F. Q. D.

Lemme II. — *Soient deux surfaces parallèles,* A *et* A′ *deux points correspondants, c'est-à-dire situés sur une normale commune, $d\sigma$ et $d\sigma'$ les éléments superficiels en ces points, et ds la distance constante des deux surfaces. Prouver la relation*

$$d\sigma' - d\sigma = d\sigma\, ds \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right),$$

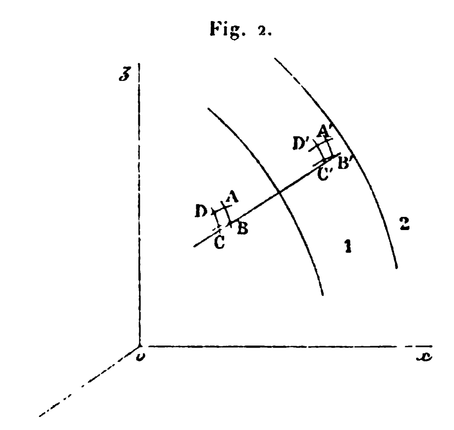
R, R′ *étant les rayons de courbure de la première surface au point* A.

Je décompose $d\sigma$ en éléments infiniment petits formés par quatre lignes de courbure de la première surface.

Les lignes de courbure sont orthogonales.

A′B′C′D′ donnent les lignes de courbure de la surface parallèle (car les normales coïncident).

Fig. 2.



On a, dans les triangles OA′B′, OAB,

$$\frac{\alpha + d\alpha}{\alpha} = \frac{R + ds}{R},$$

Fig. 3.

d'où, successivement,

$$\frac{d\alpha}{\alpha} = \frac{ds}{R},$$

$$\alpha = \frac{R\,d\alpha}{ds}.$$

et

$$(1)\quad \begin{cases} d\alpha = \dfrac{\alpha\, ds}{R}, \\ \text{de même,} \\ d\beta = \dfrac{\beta\, ds}{R'}. \end{cases}$$

Or

$$d\sigma = \alpha\beta,$$
$$d\sigma' = (\alpha + d\alpha)(\beta + d\beta),$$

d'où

$$d\sigma' - d\sigma = \alpha\, d\beta + \beta\, d\alpha,$$

en négligeant $d\alpha\, d\beta$ infiniment petit d'ordre supérieur.

Donc

$$d\sigma' - d\sigma = \alpha\beta \frac{ds}{R'} + \alpha\beta \frac{ds}{R},$$

ou, d'après les formules (1),

$$d\sigma' - d\sigma = d\sigma\, ds \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Théorème de M. Bertrand. — *Si l'on applique à une surface fermée des forces normales et proportionnelles à* $d\sigma \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)$, *ces forces se font équilibre.*

En effet, soit une surface parallèle à la première. A la surface proposée j'applique des forces $-\mu\, d\sigma$; ces forces se font équilibre (lemme I). A la surface parallèle distante de ds j'applique des forces $+\mu\, d\sigma'$; ces forces se font équilibre (lemme I). Donc sur chaque normale j'ai des forces égales à

$$\mu(d\sigma' - d\sigma),$$

c'est-à-dire, en vertu du lemme II, à

$$\mu\, d\sigma\, ds \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right).$$

Théorème de M. C. Joubert. — *Si l'on applique à une surface fermée des forces normales et proportionnelles à* $\frac{d\sigma}{RR'}$, *ces forces se font équilibre.*

En effet, à la première surface j'applique des forces égales à

$$-\mu\, d\sigma\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right);$$

à la deuxième surface j'applique des forces égales à

$$+\mu\, d\sigma'\left(\frac{1}{R+ds}+\frac{1}{R'+ds}\right).$$

Ces forces se font équilibre sur chaque surface, d'après le théorème de M. Bertrand.

Cherchons la résultante sur chaque normale : cette résultante a pour expression

$$\mu\, d\sigma'\left(\frac{1}{R+ds}+\frac{1}{R'+ds}\right)-\mu\, d\sigma\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right),$$

qu'on transforme successivement en

$$\mu\, d\sigma\left[\frac{RR'+ds(R+R')}{RR'}\right]\left[\frac{1}{R+ds}+\frac{1}{R'+ds}\right]-\mu\, d\sigma\left[\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}\right],$$

$$\mu\, d\sigma\left[\frac{\left\{\begin{array}{r}ds(R+R')(R+ds+R'+ds)+RR'(R+ds+R'+ds)\\ -(R+R')(R+ds)(R'+ds)\end{array}\right\}}{RR'(R+ds)(R'+ds)}\right];$$

ou, en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur,

$$2\mu\, d\sigma\, ds\,\frac{1}{RR'}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Cela posé, voici les théorèmes que nous nous proposons de faire connaître :

Théorème. — *Si l'on applique à une surface, for-*



mée des forces normales et proportionnelles à $\frac{d\sigma}{R^2 R'^2}$, *ces forces se font équilibre.*

En effet, à la première surface j'applique des forces égales à

$$-\mu\, d\sigma\, \frac{1}{RR'};$$

à la seconde surface j'applique des forces égales à

$$+\mu\, d\sigma'\, \frac{1}{(R+ds)(R'+ds)}.$$

Sur chaque surface ces forces se font équilibre, d'après le théorème de M. Joubert. Je cherche la résultante sur chaque normale. Cette résultante a pour expression

$$\mu\, d\sigma'\, \frac{1}{(R+ds)(R'+ds)} - \mu\, d\sigma\, \frac{1}{RR'}.$$

Or

$$d\sigma' = d\sigma\left[1 + ds\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\right] = d\sigma\left[\frac{RR' + (R+R')\,ds}{RR'}\right];$$

donc sur chaque normale j'ai la force

$$\mu\, d\sigma\left[\frac{RR' + (R+R')\,ds}{RR'}\,\frac{1}{(R+ds)(R'+ds)} - \frac{1}{RR}\right].$$

La quantité entre crochets, devient

$$\frac{RR' + (R+R')\,ds - (R+ds)(R'+ds)}{RR'(R+ds)(R'+ds)}$$
$$= \frac{RR' + (R+R')\,ds - RR' - (R+R')\,ds - ds^2}{RR'(R+ds)(R'+ds)},$$

On a donc sur chaque normale des forces égales à

$$\frac{-\mu\, d\sigma\, ds^2}{R^2 R'^2},$$

c'est-à-dire des forces proportionnelles à

$$\frac{d\sigma}{R^2 R'^2}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Théorème général. — *Plus généralement une surface fermée quelconque reste en équilibre sous l'action de forces normales et proportionnelles à*

$$\frac{N_n d\sigma}{R^n R'^n},$$

N_n *désignant l'expression*

$$N_n = N_{n-1}(R + R')(2 - n) + RR'\left(\frac{\partial N_{n-1}}{\partial R} + \frac{\partial N_{n-1}}{\partial R'}\right).$$

Considérons d'abord le cas de $n = 3$.

Il y a sur chaque normale une résultante égale à

$$\mu\, d\sigma \left[\frac{RR' + (R + R')\, ds}{RR'} \frac{1}{(R + ds)^2 (R' + ds)^2} - \frac{1}{R^2 R'^2}\right].$$

Je néglige au numérateur les termes en ds^2, ds^3, ..., et je ne m'occupe pour le moment que de la partie entre crochets

$$\frac{[RR' + (R + R')\, ds]\, RR' - (R + ds)^2 (R' + ds)^2}{R^2 R'^2 (R + ds)^2 (R' + ds)^2}.$$

Le numérateur devient successivement

$$[R^2 R'^2 + (R + R')\, ds\, RR' - (R = ds)^2 (R' + ds)^2,$$
$$R^2 R'^2 + (R + R')\, ds\, RR' - R^2 R'^2 - 2(RR'^2 + R'R^2)\, ds - \ldots,$$
$$(R + R')\, ds\, RR' - 2RR'(R + R')\, ds - \ldots,$$
$$- RR'(R + R')\, ds.$$

Nous avons donc sur chaque normale des forces égales à

$$- \mu\, ds\, d\sigma \frac{RR'(R + R')}{R^4 R'^4} = - \mu\, ds\, d\sigma \frac{R + R'}{R^3 R'^3};$$

ce qui vérifie la loi énoncée, vu que

$$N_3 = -(R + R').$$

Vérifions encore pour $n = 4$.

On a sur chaque normale une résultante égale à

$$\mu\, d\sigma \left[\frac{RR' + (R + R')\, ds}{RR'}\ \frac{(R + ds) + (R' + ds)}{(R + ds)^3 (R' + ds)^3} - \frac{R + R'}{R^3 R'^3}\right],$$

c'est-à-dire

$$\mu\, d\sigma \left\{\frac{\left\{\begin{array}{c}[RR' + (R + R')\, ds] R^2 R'^2 (R + ds + R'\, ds) \\ -(R + R')(R + ds)^3 (R' + ds)^3\end{array}\right\}}{R^3 R'^3 (R + ds)^3 (R' + ds)^3}\right\}.$$

Le numérateur devient, en négligeant les termes en ds^2, ds^3, ...,

$$R^3 R'^3 (R + R') - (R + R') R^3 R'^3$$
$$+ ds[(R + R')^2 R^2 R'^2 + 2 R^3 R'^3 - (R + R')(3 R^3 R'^2 + 3 R^2 R'^3)],$$
$$ds\, R^2 R'^2 [-2(R + R')^2 + 2RR'],$$
$$ds\, R^2 R'^2 (-2R^2 - 2R'^2 - 4RR' + 2RR');$$

donc, après réduction, la fraction devient

$$-\frac{2\, ds (R^2 + R'^2 + RR')}{R^4 R'^4};$$

ce qui est conforme à la loi énoncée, vu que

$$N_4 = -2(R^2 + R'^2 + RR').$$

Il reste à montrer que la loi, étant supposée vraie pour $n - 1$, est vraie pour n.

Je suppose donc qu'une surface fermée reste en équilibre si on la soumet à des forces dirigées suivant la normale en chacun de ses éléments et proportionnelles

à $\frac{N_{n-1}}{R^{n-1}R'^{n-1}}$; je dis que la surface est encore en équilibre si les forces sont proportionnelles à $\frac{N_n}{R^n R'^n}$.

En effet, raisonnant comme dans les cas précédents, j'aurai sur chaque normale une résultante égale à

$$\mu\, d\sigma \left[\frac{RR'+(R+R')ds}{RR'} \frac{N_{n-1}^{(R+ds,\, R'+ds)}}{(R+ds)^{n-1}(R'+ds)^{n-1}} - \frac{N_{n-1}}{R^{n-1}R'^{n-1}}\right],$$

en désignant par $N_{n-1}^{(R+ds,\, R'+ds)}$ le numérateur N_{n-1} dans lequel on a remplacé R et R′ par $R+ds$ et $R'+ds$; c'est-à-dire

$$(\alpha)\quad \mu\, d\sigma \left\{\frac{\left\{\begin{array}{l}[R^n R'^{n-1} + (R+R')\, ds R^{n-2} R'^{n-2}]\, N_{n-1}^{(R+ds,\, R'+ds)}\\ \qquad - N_{n-1}(R+ds)^{n-1}(R'+ds)^{n-2}\end{array}\right\}}{R^{n-1}R'^{n-1}(R+ds)^{n-1}(R'+ds)^{n-1}}\right\}.$$

Je ne m'occupe pour le moment que du numérateur. Le développement de $N_{n-1}^{(R+ds,\, R'+ds)}$ par la formule de Taylor à deux variables donne

$$f(R+ds,\, R'+ds) = f(R, R') + \left(\frac{\partial}{\partial R} ds + \frac{\partial}{\partial R'} ds\right) f + \frac{1}{1.2}\left(\frac{\partial}{\partial R} ds + \frac{\partial}{\partial R'} ds\right)^2 f + \ldots,$$

c'est-à-dire

$$N_{n-1}^{(R+ds,\, R'+ds)} = N_{n-1} + \left(\frac{\partial N_{n-1}}{\partial R} + \frac{\partial N_{n-1}}{\partial R'}\right) ds + \frac{1}{1.2}\left(\frac{\partial N_{n-1}}{\partial R} + \frac{\partial N_{n-1}}{\partial R'}\right)^2 ds^2 + \ldots.$$

Passant au dénominateur, et développant $(R+ds)^{n-1}$ et $(R'+ds)^{n-1}$ par la formule du binôme, on a

$$(R+ds)^{n-1} = R^{n-1} + (n-1) R^{n-2} ds + \frac{(n-1)(n-2)}{1.2} R^{n-3} ds^2 + \ldots,$$

$$(R'+ds)^{n-1} = R'^{n-1} + (n-1) R'^{n-2} ds + \frac{(n-1)(n-2)}{2.1} R'^{n-2} ds^2 + \ldots.$$

Les premiers termes du produit

$$(\mathrm{R} + ds)^{n-1}(\mathrm{R}' + ds)^{n-1}$$

sont donc

$$\mathrm{R}^{n-1}\mathrm{R}'^{n-1} + (n-1)(\mathrm{R}^{n-2}\mathrm{R}'^{n-1} + \mathrm{R}'^{n-2}\mathrm{R}^{n-1})\,ds$$
$$+ (\ldots)\,ds^2 + \ldots.$$

Cela posé, je reviens à la formule (α). Au numérateur les termes finis

$$\mathrm{R}^{n-1}\mathrm{R}'^{n-1}\mathrm{N}_{n-1} - \mathrm{N}_{n-1}\mathrm{R}^{n-1}\mathrm{R}'^{n-1}$$

se détruisent, et le coefficient du terme en ds a pour expression

$$\mathrm{R}^{n-1}\mathrm{R}'^{n-1}\left(\frac{\partial \mathrm{N}_{n-1}}{\partial \mathrm{R}} + \frac{\partial \mathrm{N}_{n-1}}{\partial' \mathrm{R}}\right)$$
$$+ (\mathrm{R}+\mathrm{R}')\mathrm{R}^{n-2}\mathrm{R}'^{n-2}\mathrm{N}_{n-1} - \mathrm{N}_{n-1}(n-1)\mathrm{R}^{n-2}\mathrm{R}'^{n-2}(\mathrm{R}+\mathrm{R}').$$

La formule (α) peut donc s'écrire (en négligeant les termes en ds^2 au numérateur et ceux en ds au dénominateur),

$$\frac{\mathrm{R}^{n-2}\mathrm{R}'^{n-2}\left[\mathrm{N}_{n-1}(\mathrm{R}+\mathrm{R}')(2-n) + \mathrm{R}\mathrm{R}'\left(\frac{\partial \mathrm{N}_{n-1}}{\partial \mathrm{R}} + \frac{\partial \mathrm{N}_{n-1}}{\partial \mathrm{R}'}\right)\right]}{\mathrm{R}^{2n-2}\mathrm{R}'^{2n-2}},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\mathrm{N}_n}{\mathrm{R}_n\mathrm{R}'^n}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

ERRATA AUX TABLES DE LOGARITHMES DE SCHRÖN.

Page 182. log. de 98309, *au lieu de* 0,9925933, *lisez* 0,9925933.

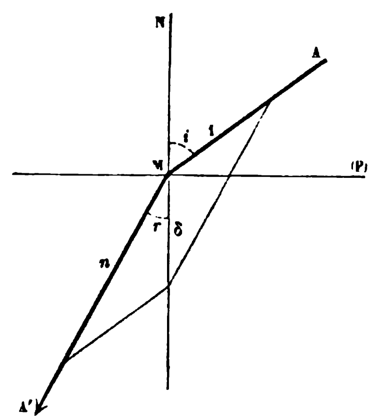
EXTENSION AUX PSEUDO-SURFACES DU THÉORÈME DE MALUS RELATIF A LA MARCHE DES RAYONS LUMINEUX;

PAR M. L'ABBÉ ISSALY.

THÉORÈME. — *Si des rayons lumineux sont normaux à une pseudo-surface, ils jouissent encore de la même propriété après un nombre quelconque de réflexions et de réfractions.*

Il suffit d'établir le théorème pour le cas de la réfraction, celui de la réflexion pouvant être considéré comme correspondant à une réfraction d'indice $n = -1$.

Nous suivrons, en cela, la même méthode que M. Darboux, pour le cas des surfaces (*Leçons sur les surfaces*, n° 450).



Soit (F_v) une pseudo-surface quelconque tangente en M au plan (P) et que nous envisageons, même *phy-*

siquement (nos recherches antérieures sur la surface de l'onde nous y autorisent, croyons-nous), comme la limite de séparation de deux milieux. Soient MN la normale au plan (P), et (S), (S') les deux courbes génératrices de (F_v), respectivement tangentes aux axes Mx, My situés dans ce plan. Associés à la normale MN, ces axes constituent le trièdre mobile $MNxy$, auquel nous supposerons la surface (F_v) médiatement rapportée.

Choisissons comme trièdre de référence un trièdre *trirectangle* quelconque OXYZ ou (T) et désignons par (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$, $(\alpha_v, \beta_v, \gamma_v)$ les cosinus directeurs, par rapport à ce trièdre, des rayons, incident et réfléchi, MA, MA' et de la normale MN.

Pour que la loi de Descartes, $\frac{\sin i}{\sin r} = n$, soit vérifiée, il faut et il suffit que la diagonale δ du parallélogramme construit sur les longueurs 1 et n, respectivement portées sur MA et MA', coïncide avec le prolongement de MN.

Cela étant, si l'on projette sur les arêtes du trièdre (T) les trois longueurs précédentes, on aura

$$(1) \qquad \begin{cases} \alpha + n\alpha' = \delta\alpha_v, \\ \beta + n\beta' = \delta\beta_v, \\ \gamma + n\gamma' = \delta\gamma_v. \end{cases}$$

Or, pour tout déplacement sur la pseudo-surface (F_v) du pied de la normale MN, on a la relation évidente

$$(2) \qquad \alpha_v\, dX + \beta_v\, dY + \gamma_v = 0,$$

en même temps que les conditions

$$dX = a\, ds + a'\, ds'.$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$\frac{\partial a'}{\partial s} = \frac{\partial a}{\partial s'},$$

propres à caractériser la pseudo-surface (F_v) et dans lesquelles (a, b, c), (a', b', c') désignent les cosinus directeurs de Mx et de My.

Substituant les valeurs (1) dans la relation (2), il vient

$$(3)\quad (\alpha\, dX + \beta\, dY + \gamma\, dZ) + n(\alpha'\, dX + \beta' dY + \gamma' dZ) = 0.$$

Ceci posé, prenons deux points (correspondants) fixes M_1 et M'_1, le premier, sur MA, à la distance ρ, le deuxième, sur MA′, à la distance $-\frac{\rho}{n}$ du point M. Les coordonnées de ces points pourront être représentées par les systèmes

$$(M_1)\qquad \begin{cases} X_1 = X - \rho\alpha, \\ Y_1 = Y - \rho\beta, \\ Z_1 = Z - \rho\gamma; \end{cases}$$

$$(M)\qquad \begin{cases} X'_1 = X + \frac{\rho}{n}\alpha', \\ Y'_1 = Y + \frac{\rho}{n}\beta', \\ Z'_1 = Z + \frac{\rho}{x}\gamma', \end{cases}$$

Si maintenant on admet que le rayon incident MA soit normal en M_1 à une pseudo-surface déterminée (F_{v_1}), on aura, pour tout déplacement infinitésimal de M_1 sur (F_{v_1}),

$$(4)\qquad \alpha\, dX_1 + \beta\, dY_1 + \gamma\, dZ_1 = 0,$$

et comme

$$dX_1 = dX - \alpha\, d\rho - \rho\, d\alpha,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

il s'ensuit que

$$(5)\qquad \alpha\, dX + \beta\, dY + \gamma\, dZ = d\rho.$$

Remontant à l'équation (3), on en tire

$$(6) \qquad \alpha' \, dX + \beta' \, dY + \gamma' \, dZ = - d\left(\frac{\rho}{n}\right).$$

D'autre part, des coordonnées du point M'_1 on déduit

$$dX'_1 = dX + \alpha' d\left(\frac{\rho}{n}\right) + \frac{\rho}{n} \, d\alpha',$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

système de valeurs qui, eu égard à (6), entraîne comme conséquence

$$(7) \qquad \alpha' \, dX'_1 + \beta' \, dY'_1 + \gamma' \, dZ'_1 = 0.$$

En rapprochant cette dernière relation des relations analogues (2) et (4), on voit qu'elle exprime que le rayon réfracté MA' est normal en M'_1 à une nouvelle pseudo-surface $(F_{\nu'_1})$, pseudo-surface, d'ailleurs, parfaitement déterminée, elle aussi, puisque, à chaque point M_1 (F_{ν_1}), correspond un point unique M'_1 de $(F_{\nu'_1})$. Le théorème généralisé que nous avions en vue se trouve donc par là-même établi.

SUR LES PÉRIODES DES INTÉGRALES ELLIPTIQUES;

PAR M. V. JAMET.

On connaît la relation

$$\omega\omega'_1 - \omega_1\omega' = \frac{2\pi\sqrt{-1}}{k^2}$$

qui existe entre les périodes 2ω, ω' et $2\omega_1$, ω'_1 des inté-

grales elliptiques de première et de seconde espèce, au module k. Cette relation tire son origine de considérations purement analytiques; mais il n'est pas sans intérêt de constater qu'on la rencontre quand on veut évaluer le volume de l'ellipsoïde au moyen des coordonnées elliptiques.

Voyons d'abord comment, au moyen de ces coordonnées, l'expression de ce volume va se réduire à une intégrale double.

Soit

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = 1$$

l'équation de l'ellipsoïde, où l'on suppose $a > b > c > 0$.

On peut exprimer les coordonnées d'un point (x, y, z) de cette surface par les formules suivantes

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} x^2 &= \frac{a(a+\mu)(a+\nu)}{(a-b)(a-c)}, \\ y^2 &= \frac{b(b+\mu)(b+\nu)}{(b-a)(b-c)}, \\ z^2 &= \frac{c(c+\mu)(c+\nu)}{(c-a)(c-b)}, \end{aligned} \right.$$

et l'on obtiendra tous les points possibles de cette surface en faisant varier μ, par exemple, entre $-a$ et $-b$, ν entre $-b$ et $-c$. Ceci résulte du mode de séparation, bien connu, des racines de l'équation du troisième degré en ρ

$$\frac{x^2}{a+\rho} + \frac{y^2}{b+\rho} + \frac{z^2}{c+\rho} = 1.$$

L'expression d'un élément de surface de l'ellipsoïde est le produit des différentielles des arcs des deux lignes de courbure, qu'on obtient, l'une en faisant varier μ et laissant ν invariable, l'autre, au contraire, en suppo-

sant ν variable et μ constante. Soit $d\sigma$ cet élément. On trouve

$$\sqrt{-1}\, d\sigma = \frac{\sqrt{\mu\nu}(\mu-\nu)\, d\mu\, d\nu}{4\sqrt{f(\mu)f(\nu)}},$$

en posant

$$f(\rho) = (\rho+a)(\rho+b)(\rho+c).$$

On calculera le volume infiniment petit du cône qui a pour directrice le contour de $d\sigma$ et pour sommet le centre de la sphère, en multipliant l'expression de $d\sigma$ par le tiers de la distance du centre au plan tangent à l'ellipsoïde au point (μ, ν). Soit p cette distance. On a

$$p = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}},$$

x, y, z désignant les coordonnées cartésiennes du point de contact. Mais, à cause des formules (1),

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} = \frac{\mu\nu}{abc}.$$

Donc l'élément de volume d'un ellipsoïde a pour mesure

$$-\frac{\sqrt{-1}}{12}\,\frac{(\mu-\nu)\, d\mu\, d\nu}{\sqrt{f(\mu)f(\nu)}}.$$

Mais, à chaque système de valeurs de μ, ν correspondent huit points de l'ellipsoïde; donc son volume total est égal à

$$-\frac{2\sqrt{abc}}{3}\sqrt{-1}\int_{-a}^{-b}\int_{-b}^{-c}\frac{(\mu-\nu)\, d\mu\, d\nu}{\sqrt{f(\mu)f(\nu)}}.$$

Posons maintenant

$$\mu = -b\,\mathrm{sn}^2\varphi - c\,\mathrm{cn}^2\varphi = -c-(b-c)\,\mathrm{sn}^2\varphi,$$
$$\nu = -c-(b-c)\,\mathrm{sn}^2\psi,$$

le module k^2 des fonctions elliptiques employées étant égal à $\frac{b-c}{a-c}$; et cherchons les valeurs φ_0, φ_1 de l'argument φ qui correspondent à $\mu=-a$, $\mu=-b$, et les valeurs ψ_0, ψ_1 de ψ qui répondent à $\nu=-a$, $\nu=-b$. Nous trouverons

$$\mathrm{dn}^2\varphi_0=0,\qquad \mathrm{cn}^2\psi_1=0,$$

et nous pourrons supposer

$$\varphi_0=\frac{\omega+\omega_1}{2},\qquad \varphi_1=\frac{\omega}{2}.$$

De même

$$\mathrm{cn}^2\psi_0=0,\qquad \mathrm{sn}^2\psi_1=0,$$

et nous pourrons faire

$$\psi_1=\frac{\omega}{2},\qquad \psi_0=0.$$

Alors l'expression du volume se transformera comme il suit :

$$+\frac{8\sqrt{abc}}{3}\sqrt{-1}\,k^2\int_{\frac{\omega+\omega_1}{2}}^{\frac{\omega}{2}}\int_{\frac{\omega}{2}}^{0}(\mathrm{sn}^2\varphi-\mathrm{sn}^2\psi)\,d\varphi\,d\psi$$

$$=-\frac{8\sqrt{abc}}{3}\sqrt{-1}\,k^2\left\{\int_{\frac{\omega+\omega_1}{2}}^{\frac{\omega}{2}}d\varphi\int_{\frac{\omega}{2}}^{0}\mathrm{sn}^2\psi\,d\right.$$

$$\left.-\int_{\frac{\omega}{2}}^{0}d\psi\int_{\frac{\omega+\omega_1}{2}}^{\frac{\omega}{2}}\mathrm{sn}^2\varphi\,d\varphi\right\}$$

$$=-\frac{2\sqrt{abc}}{3}\sqrt{-1}\,k^2(\omega_1\omega'-\omega\omega'_1).$$

Comparant cette expression avec l'expression connue, $\frac{4}{3}\pi\sqrt{abc}$, on trouve la formule qu'il s'agissait d'établir

$$\omega_1\omega'-\omega\omega'_1=\frac{2\pi\sqrt{-1}}{k^2}.$$

SUR LE THÉORÈME GÉNÉRAL RELATIF A L'EXISTENCE DES INTÉGRALES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES (¹);

PAR M. ÉMILE PICARD,
Membre de l'Institut.

1. Envisageons le système des n équations du premier ordre

$$\frac{du}{dx} = f_1(x, u, v, \ldots, w),$$
$$\frac{dv}{dx} = f_2(x, u, v, \ldots, w),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{dw}{dx} = f_n(x, u, v, \ldots, w).$$

Les fonctions f sont des fonctions continues réelles des quantités réelles $x, u, v, \ldots, w$ dans le voisinage de $x_0, u_0, v_0, \ldots, w_0$. Elles sont définies quand $x, u, v, \ldots, w$ restent respectivement compris dans les intervalles

$$(x_0 - a,\ x_0 + a),$$
$$(u_0 - b,\ u_0 + b),$$
$$(v_0 - b,\ v_0 + b),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$(w_0 - b,\ w_0 + b),$$

a et b désignant deux grandeurs positives.

De plus, on suppose que l'on puisse déterminer n

(¹) Cette démonstration si remarquable a été publiée dans le *Bulletin de la Société mathématique de France* (t. XIX; 1891). Nous avons cru devoir la reproduire en faveur des candidats à la Licence et à l'Agrégation.

quantités positives A, B, ..., L, telles que

$$|f(x, u', v', \ldots, w') - f(x, u, v, \ldots, w)| \\ < A.|u' - u| + B.|v' - v| + \ldots + L.|w' - w|,$$

(où $|\alpha|$ désigne, suivant l'usage, la valeur absolue de α), x ainsi que les $u, v, \ldots, w$ restant dans les intervalles indiqués. Il en sera évidemment ainsi, en particulier, si les fonctions f ont des dérivées partielles du premier ordre, restant finies, par rapport à $u, v, \ldots, w$.

Ces hypothèses très générales étant faites, on veut démontrer qu'*il existe des fonctions $u, v, \ldots, w$ de x, continues dans le voisinage de x_0, satisfaisant aux équations différentielles et se réduisant respectivement, pour $x = x_0$, à $u_0, v_0, \ldots, w_0$.*

2. Nous procéderons par approximations successives. Considérons d'abord le système

$$\frac{du_1}{dx} = f_1(x, u_0, v_0, \ldots, w_0),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{dw_1}{dx} = f_n(x, u_0, v_0, \ldots, w_0);$$

nous en tirons, par quadratures, les fonctions u_1, $v_1, \ldots, w_1$, en les déterminant de manière qu'elles prennent pour x_0 les valeurs $u_0, v_0, \ldots, w_0$. On forme ensuite les équations

$$\frac{du_2}{dx} = f_1(x, u_1, v_1, \ldots, w_1),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{dw_2}{dx} = f_n(x, u_1, v_1, \ldots, w_1),$$

et l'on détermine $u_2, v_2, \ldots, w_2$ par la condition qu'elles prennent respectivement pour x_0 les valeurs $u_0, v_0, \ldots$, w_0. On continue ainsi indéfiniment. Les fonctions u_{m-1},

$v_{m-1}, \ldots, w_{m-1}$ seront liées aux suivantes $u_m, v_m, \ldots,$ w_m par les relations

$$\frac{du_m}{dx} = f_1(x, u_{m-1}, v_{m-1}, \ldots, w_{m-1}),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$\frac{dw_m}{dx} = f_n(x, u_{m-1}, v_{m-1}, \ldots, w_{m-1}),$$

et, pour $x = x_0$, on a

$$u_m = u_0, \quad v_m = v_0, \quad \ldots, \quad w_m = w_0.$$

Nous allons établir que, m augmentant indéfiniment, $u_m, v_m, \ldots, w_m$ *tendent vers des limites qui représentent les intégrales cherchées, pourvu que x reste suffisamment voisin de x_0.*

Soit M la valeur absolue maxima des fonctions f, quand les variables dont elles dépendent restent dans les limites indiquées. Désignons par ρ une quantité au plus égale à a : si x reste dans l'intervalle

$$(x_0 - \rho, x_0 + \rho),$$

on aura

$$|u_1 - u_0| < M\rho, \quad \ldots, \quad |w_1 - w_0| < M\rho.$$

Par suite, si $M\rho < b$, les quantités $u_1, v_1, \ldots, w_1$ resteront dans les limites voulues, et il est évident qu'alors il en sera de même pour tous les autres systèmes de valeurs $u, v, \ldots, w$. Désignant par δ une quantité au plus égale à ρ, nous allons supposer que x reste dans l'intervalle

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

En posant

$$u_m - u_{m-1} = U_m, \quad \ldots, \quad w_m - w_{m-1} = W_m,$$

on peut écrire

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{dU_m}{dx}=f_1(x, u_{m-1}, \ldots, w_{m-1})-f_1(x, u_{m-2}, \ldots, w_{m-2})\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \dfrac{dW_m}{dx}=f_n(x, u_{m-1}, \ldots, w_{m-1})-f_n(x, u_{m-2}, \ldots, w_{m-2})\end{array}\right\}(m=2, \ldots, \infty).$$

Or on a

$$|U_1|<M\delta, \quad \ldots, \quad |W_1|<M\delta.$$

Les équations précédentes, pour $m=2$, démontrent que $|U_1|, |V_2|, \ldots, |W_2|$ sont inférieurs à

$$(A+B+\ldots+L)M\delta^2,$$

et, d'une manière générale, de proche en proche, on voit que $|U_m|, \ldots, |W_m|$ sont inférieurs à

$$M\delta(A+B+\ldots+L)^{m-1}\delta^{m-1}.$$

Or

$$u_m=u_0+U_1+U_2+\ldots+U_m;$$

par suite, $u_m, v_m, \ldots, w_m$ tendront vers une limite, si

$$(A+B+\ldots+L)\delta<1.$$

En prenant δ assez petit, cette condition sera vérifiée. Nous voyons donc que $u_m, v_m, \ldots, w_m$ tendront vers des limites déterminées, $u, v, \ldots, w$, fonctions continues de x dans l'intervalle

$$(x_0-\delta, x_0+\delta),$$

δ étant la plus petite des trois quantités

$$a, \quad \frac{b}{M}, \quad \frac{1}{A+B+\ldots+L};$$

$u, v, \ldots, w$ seront représentées par des séries qui convergent à la manière d'une progression géométrique décroissante.

On a d'ailleurs

$$u_m = \int_{x_0}^{x} f_1(x, u_{m-1}, \ldots, w_{m-1})\, dx + u_0,$$

et, puisque les u_m, v_m, ..., w_m diffèrent de leurs limites d'aussi peu qu'on veut, pour m assez grand, quel que soit x dans l'intervalle indiqué, on aura, à la limite,

$$u = \int_{x_0}^{x} f_1(x, u, v, \ldots, w)\, dx + u_0;$$

et, par suite,

$$\frac{du}{dx} = f_1(x, u, v, \ldots, w),$$

et de même pour les autres équations. *Les fonctions u, v, ..., w sont donc les intégrales cherchées.*

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1889).
SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES;

Par M. E. GROSSETÊTE,
Professeur au lycée de Nevers.

On donne deux droites concourantes OA, OB *et un point* P *pris dans leur plan : 1° construire sur* OA *un point* M, *tel que les deux cercles* S *et* S′ *passant par les points* P *et* M *et tangents à la droite* OB *se coupent sous un angle* ω; *2° étudier la variation de l'angle sous lequel se coupent les deux cercles* S, S′ *quand le point* M *se déplace sur la droite* OA; *3° soient* Q *et* Q′ *les deux autres points d'intersection des deux cercles* S, S′ *avec la droite* OA; *démontrer que le cercle circonscrit au*

triangle PQQ′ *est tangent à une droite qui reste fixe quand le point* M *décrit la droite* OA.

1° Supposons le problème résolu et prenons la figure inverse de la figure cherchée en choisissant le point P comme pôle d'inversion et pour puissance $\overline{PO}^2$. Les droites OA, OB ont pour inverses deux cercles *a*, *b* passant par P et O; les inverses des deux cercles cherchés S et S′ sont deux droites se coupant sous un angle ω, tangentes à la circonférence *b* et ayant leur point d'intersection *m* sur la circonférence *a*. L'inverse du point *m* est évidemment le point M cherché sur OA. Or *m* est situé à la fois sur la circonférence *a* et sur la circonférence concentrique à *b*, lieu des points d'où l'on voit *b* sous l'angle ω. Ces deux cercles se coupent généralement en deux points *m*, *m′*, auxquels correspondent deux points M, M′ à l'intersection de OA et des rayons P*m*, P*m′*. Il y aura donc, en général, deux solutions.

2° Étudions la variation de l'angle ω lorsque le point M se déplace sur OA, c'est-à-dire lorsque le point *m* se déplace sur la circonférence *a*, d'abord à l'extérieur de la circonférence *b*, en partant du point O. On voit sans peine que l'angle ω décroit constamment depuis deux droits jusqu'à un angle ω_1 défini par la relation

$$\sin\frac{\omega_1}{2} = \frac{\alpha}{l+\beta},$$

dans laquelle α et β désignent les distances du point P aux deux droites OA et OB et *l* la longueur de la droite qui joint les pieds de ces perpendiculaires. Pour cette valeur, le point *m* est situé en μ sur la ligne des centres des circonférences *a* et *b*. Le point M correspondant est situé à l'intersection de OA et de Pμ en N, de sorte que, pendant que M décrit la droite ON, l'angle ω varie depuis deux droits jusqu'à l'angle ω_1.

Le point m se déplaçant ensuite sur l'axe μP, auquel cas son correspondant M se déplace sur NA, l'angle ω croît depuis la valeur minimum ω_1 jusqu'à deux droits. Le problème n'est pas possible lorsque m décrit l'arc PO intérieur à la circonférence a.

3° Soient Q et Q′ les deux autres points d'intersection des deux cercles S, S′ avec la droite OA. Leurs correspondants dans la figure inverse sont les seconds points d'intersection des tangentes menées de m à la circonférence b avec la circonférence a; désignons-les par q, q'. Le cercle circonscrit au triangle PQQ′ a pour inverse la droite qq'. Or : *Étant donnés trois cercles ayant deux à deux le même axe radical, si l'on inscrit à l'un d'eux c une suite de triangles abc, dont les côtés ab, ac touchent respectivement les deux autres c′ et c″, le troisième côté bc de ce triangle enveloppera un quatrième cercle ayant le même axe radical que les deux autres* (*voir* CHASLES, *Géométrie supérieure*, n° 757). Ici le triangle à considérer mqq' est inscrit dans la circonférence : a l'un de ses côtés qm est tangent au cercle b; l'autre mq' est tangent au cercle b; ces trois cercles ont même axe radical ; donc qq' enveloppe un cercle ayant le même axe radical avec les autres. Ce cercle a pour inverse une droite passant par O. Donc la circonférence circonscrite au triangle PQQ′ reste tangente à cette droite quand le point M décrit la droite OA.

N. B. — M. Farjon nous a adressé une solution analogue.

ERRATA.

Page 12, ligne 8 en remontant, *au lieu de* ωt, *lisez* $\int \omega dt$.

Page 14, ligne 6 en remontant, *au lieu de* $Z_c = K \log b'$, *lisez* $Z_c = \log b'$.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1889).

SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES;

PAR M. GENTY.

On donne un cône du second degré C *et deux quadriques* A, A′, *inscrites dans ce cône; on considère une quadrique variable* S *inscrite dans le même cône et touchant les quadriques données* A *et* A′ *en des points variables* α *et* α' :

1° *Démontrer que la droite* $\alpha\alpha'$ *passe par un point fixe;*

2° *Trouver le lieu de la droite d'intersection des plans tangents à la surface* S *aux points* α *et* α';

3° *Démontrer que le lieu du pôle d'un plan fixe* P *par rapport à la surface* S *se compose de deux quadriques bitangentes;*

4° *Trouver le lieu de la droite qui passe par les points de contact de ces deux quadriques, lorsque le plan* P *se déplace, en restant parallèle à un plan tangent au cône* C.

I. Deux quadriques (A) et (A′) inscrites dans un cône du second degré (C) sont inscrites dans un second cône (C′) et elles se coupent suivant deux coniques; les plans (Q) et (Q′) de ces courbes et les plans des courbes de contact avec l'un ou l'autre des cônes circonscrits se coupent suivant une même droite et forment un faisceau harmonique.

II. Les surfaces (A) et (A′) sont homologiques de quatre manières différentes : on peut prendre pour

centre d'homologie l'un ou l'autre des sommets O et O' des cônes (C) et (C') et pour plan d'homologie l'un ou l'autre des plans (Q) et (Q').

Cela résulte immédiatement des propriétés bien connues des ombilics et des cordes communes des coniques.

III. Si nous considérons trois quadriques (A), (A') et (A'') inscrites dans le cône (C), les centres d'homologie de ces quadriques prises deux à deux (autres que le point O) sont situés sur une ligne droite que nous appellerons *axe d'homologie des trois quadriques.*

Les équations tangentielles de ces trois surfaces pouvant se mettre sous la forme

$$\sigma - \lambda\mu = 0, \qquad \sigma - \lambda\nu = 0, \qquad \sigma - \lambda\rho = 0,$$

l'axe d'homologie est représenté par les équations

$$\mu = \nu = \rho.$$

Le théorème reste vrai si l'une des quadriques est remplacée par un plan (P). La conique, suivant laquelle ce plan coupe le cône (C), peut, en effet, être considérée comme une quadrique infiniment aplatie inscrite dans ce cône. Le centre d'homologie de la quadrique (A) et du plan (P) est alors le sommet d'un cône circonscrit à (A) et contenant la conique en question.

IV. Les plans des courbes d'intersection deux à deux des quadriques (A), (A') et (A'') passent trois à trois par une même droite.

Les équations ponctuelles de ces trois quadriques étant

$$S + l^2 = 0, \qquad S + m^2 = 0, \qquad S + n^2 = 0,$$

les plans des courbes d'intersection de ces surfaces deux à deux passent trois par trois par l'une ou l'autre des

quatre droites représentées par les équations

$$l \pm m \pm n = 0.$$

V. Le théorème II, le théorème IV et sa réciproque, qui est évidente, conduisent immédiatement au corollaire suivant :

Si une quadrique (S) inscrite dans le cône (C) touche (A) et (A′) aux points α et α' respectivement, les plans tangents en α et α' se coupent sur l'un ou l'autre des plans (Q) et (Q′) et la droite $\alpha\alpha'$ passe par le centre d'homologie O′.

VI. Les quadriques (S) inscrites dans le cône (C) et tangentes à (A) et (A′) forment ainsi deux séries, l'une qui correspond au plan (Q) et l'autre au plan (Q′). Je dis que le lieu des pôles d'un plan (P) par rapport aux quadriques (S) d'une même série (Q) est une quadrique.

L'intersection du lieu en question avec le plan (P) est la courbe (p), lieu des points de contact avec ce plan des quadriques (S) de la série considérée qui lui sont tangentes.

Soit (a) la courbe de contact de ces mêmes quadriques avec (A); les courbes (a) et (p) sont situées sur un même cône ayant pour sommet le centre d'homologie O″ de la quadrique (A) et du plan (P).

Or les théorèmes qui précèdent conduisent très simplement à la construction suivante de la conique (a) (Rouché et de Comberousse, *Traité de Géométrie*, § 952 et 953). Le plan (Q) coupe le plan (P) suivant une droite (q); cette droite et la polaire réciproque par rapport à (A) de l'axe d'homologie O′O″ déterminent un plan qui coupe cette quadrique suivant la

courbe cherchée (a), qui est ainsi une conique. La courbe (p) est donc aussi une conique.

En remplaçant le plan (Q) par le plan (Q'), on obtiendrait de même les coniques (a') et (p'), lieux des points de contact des quadriques (S) de la série (Q') avec la quadrique (A) et le plan (P).

Donc, en résumé, le lieu des pôles du plan (P), par rapport aux quadriques (S), se compose de deux quadriques (Σ) et (Σ') : je dis que ces deux surfaces sont doublement tangentes.

En effet, les coniques (a) et (a') ont deux points communs L et M et les plans tangents en ces points à la quadrique (A) contiennent le point O''. Donc les coniques (p) et (p') se touchent aux deux points L_1 et M_1, où les droites O''L et O''M percent le plan (P). La droite L_1M_1 passe d'ailleurs au point d'intersection K des droites (q) et (q').

D'autre part, les quadriques (Σ) et (Σ') ont une courbe commune qu'il est facile de déterminer : c'est le lieu des pôles du plan (P) par rapport aux coniques (γ) suivant lesquelles les plans tangents au cône (C') coupent le cône (C). Ces coniques peuvent, en effet, être considérées comme des quadriques infiniment aplaties inscrites dans le cône (C) et tangentes à (A) et (A'), et il est évident qu'elles appartiennent à la fois aux deux séries des quadriques (S). La courbe commune passe, d'ailleurs, par les points L_1 et M_1 qui sont les points de contact avec le plan (P) de deux coniques (γ). Donc, enfin, les quadriques (Σ) et (Σ') se touchent en ces deux points.

Supposons, enfin, que le plan (P) tourne autour d'une droite (T) tangente au cône (C) en un point B. La droite L_1M_1 décrit une surface réglée qui a pour directrices rectilignes la tangente (T) et la droite d'inter-

section (I) des plans (Q) et (Q'); je dis que ces deux directrices sont divisées homographiquement par les points R et K où une génératrice les rencontre.

Soit, en effet, D le point de contact du plan tangent mené par la droite (T) à la quadrique (A). Le centre d'homologie O'' reste évidemment sur la droite BD; donc l'axe d'homologie O'O'' reste dans un plan fixe et sa polaire par rapport à (A) passe par un point fixe M, qui est visiblement situé sur une tangente à la quadrique (A) au point D; la droite O''M rencontre (T) au point R.

Au point R ne correspond évidemment qu'un seul point K, et réciproquement; donc, enfin, la droite RK décrit une quadrique (A).

Dans le cas particulier du problème, la directrice (T) est située à l'infini, et, par suite, la quadrique (A) est un paraboloïde hyperbolique.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1889).
SOLUTION DE LA QUESTION D'ANALYSE;

Par M. E. GROSSETÊTE,
Professeur au lycée de Nevers.

Soient h et k les invariants de l'équation aux dérivées partielles

$$(E) \qquad \frac{d^2 z}{dx\,dy} + a\frac{dz}{dx} + b\frac{dz}{dy} + cz = 0,$$

et h_1, k_1 les invariants de l'équation (E_1) *obtenue en appliquant la méthode de Laplace.*

Trouver les formes que doivent avoir les invariants

h et k pour que l'on ait les deux relations

$$h_1 = lh, \qquad k_1 = mk,$$

l et m étant des constantes.

Déterminer les formes que prennent dans ces conditions les coefficients a, b, c de l'équation (E).

I. On sait (¹) que, si l'on désigne par h_1 et k_1 les invariants de l'équation (E_1), on a

$$h_1 = 2h - k - \frac{d^2 \log h}{dx\,dy},$$
$$k_1 = h.$$

Or ici $h_1 = lh$, $k_1 = mk$; on conclut que l'équation donnant h est

$$h\left(l + \frac{1}{m} - 2\right) = \frac{d^2 \log h}{dx\,dy}.$$

Si l'on pose $l + \frac{1}{m} - 2 = p$, il faudra intégrer l'équation

(1) $$\frac{d^2 \log h}{dx\,dy} = ph,$$

dans laquelle p est constant.

Pour cela, posons

$$\log h = 2z, \qquad \text{où} \qquad e^{2z} = h.$$

(1) devient

$$\frac{d^2 z}{dx\,dy} = pe^{2z}.$$

C'est une équation de Liouville; pour l'intégrer, nous poserons

$$\frac{dz}{dy} = Q,$$

(¹) Darboux, *Théorie générale des surfaces*, t. II, p. 28. Paris, Gauthier-Villars et fils.

d'où

$$\frac{dQ}{dx} = pe^{2z},$$

et, en prenant la dérivée par rapport à y,

$$\frac{d^2Q}{dx\,dy} = \frac{dQ}{dx}\,2Q,$$

par suite

$$\frac{dQ}{dy} - Q^2 = F(y).$$

Soit $\psi(y) = \frac{1}{2}\,\frac{f''(y)}{f'(y)}$ une solution particulière de cette équation.

Pour avoir la solution générale, posons

$$Q = \frac{1}{2}\,\frac{f''(y)}{f'(y)} + u,$$

u étant une nouvelle variable; il viendra

$$\frac{du}{dy} - u\,\frac{f''(y)}{f'(y)} - u^2 = 0,$$

d'où, après avoir multiplié par $\frac{-f'(y)}{u^2}$,

$$\frac{d}{dy}\,\frac{f'(y)}{u} + f'(y) = 0.$$

Intégrant par rapport à y, il vient

$$\frac{f'(y)}{u} + f(y) + \varphi(x) = 0,$$

d'où

$$u = \frac{-f'(y)}{f(y)+\varphi(x)},$$

$$Q = \frac{1}{2}\,\frac{f''(y)}{f'(y)} - \frac{f'(y)}{f(y)+\varphi(x)},$$

enfin

$$pe^{2z} = \frac{dQ}{dx} = \frac{f'(y)\,\varphi'(x)}{[f(y)+\varphi(x)]^2};$$

donc

$$h = \frac{f'(y)\varphi'(x)}{p[f(y)+\varphi(x)]^2} = \frac{m}{l-2m+1}\,\frac{f'(y)\varphi'(x)}{[f(y)+\varphi(x)]^2},$$

$$k = \frac{1}{pm}\,\frac{f'(y)\varphi'(x)}{[f(y)+\varphi(x)]^2} = \frac{m}{l-2m+1}\,\frac{f'(y)^2\varphi'(x)}{[f(y)+\varphi(x)]^2}.$$

II. Pour déterminer les formes que prennent dans ces conditions les coefficients a, b, c de l'équation (E), nous calculerons les coefficients a', b', c' de l'équation réduite

$$\text{(E')}\qquad \frac{d^2 z'}{dx\,dy} + a'\frac{dz'}{dx} + b'\frac{dz'}{dy} + c' = 0,$$

qui a les mêmes invariants que la proposée et qui est telle que $a'b' - c' = 0$. Dans ce cas, on peut déterminer a', b', c' par les formules

$$a' = \int_{x_0}^{x} h\,dx, \qquad b' = \int_{y_0}^{y} k\,dy, \qquad c' = a'b',$$

$$a' = \int_{x_0}^{x} \frac{f'(y)\varphi'(x)}{p[f(y)+\varphi(x)]^2}\,dx = \frac{f'(y)[\varphi(x)-\varphi(x_0)]}{p[f(y)+\varphi(x)][f(y)+\varphi(x_0)]}$$
$$= \frac{mf'(y)}{l-2m+1}\,\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{[f(y)+\varphi(x)][f(y)+\varphi(x_0)]},$$

$$b' = \int_{y_0}^{y} \frac{\varphi'(x)f'(y)}{pm[f(y)+\varphi(x)]^2}\,dy = \frac{\varphi'(x)}{pm}\,\frac{f(y)-f(y_0)}{[f(y)+\varphi(x)][f(y)+\varphi(x_0)]}$$
$$= \frac{\varphi'(x)}{l-2m+1}\,\frac{f(y)-f(y_0)}{[f(y)+\varphi(x)][f(y_0)+\varphi(x)]},$$

$$c' = \frac{m\varphi'(x)f'(y)}{(l-2m+1)^2}\,\frac{[f(x')-\varphi(x_0)][f(y)-f(y_0)]}{[f(y)+\varphi(x)]^2[f(y)+\varphi(x_0)][f(y_0)+\varphi(x)]}.$$

En faisant sur (E') une substitution de la forme

$$z' = \lambda z,$$

dans laquelle λ désigne une fonction quelconque de x et y, on obtiendra une équation (E) répondant à la

question. Les valeurs de a, b, c sont alors données par les formules

$$a = a' + \frac{d \log \lambda}{dy},$$

$$b = b' + \frac{d \log \lambda}{dx},$$

$$c = c' + a \frac{d \log \lambda}{dx} + b \frac{d \log \lambda}{dy} + \frac{1}{\lambda} \frac{d^2 \lambda}{dx\, dy}.$$

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE EN 1889.

SOLUTION DE LA QUESTION D'ALGÈBRE;

PAR M. LE CAPITAINE BARISIEN.

Déterminer un polynôme entier en x du septième degré $f(x)$, sachant que $f(x)+1$ est divisible par $(x-1)^4$ et $f(x)-1$ par $f(x+1)^4$. Quel est le nombre des racines réelles de l'équation $f(x)=0$?

D'après l'énoncé, il faut que l'on ait

$$\frac{f(x)+1}{(x-1)^4} = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D,$$

$$\frac{f(x)-1}{(x+1)^4} = A'x^3 + B'x^2 + C'x + D',$$

avec

$$f(x) = ax^7 + bx^6 + cx^5 + dx^4 + cx^3 + fx^2 + gx + h.$$

En remarquant, de suite, que $A = A' = a$, il faut identifier les termes des deux équations

$$ax^7 + bx^6 + cx^5 + dx^4 + cx^3 + fx^2 + gx + h - 1$$
$$= (x-1)^4 (ax^3 + Bx^2 + Cx + D),$$

$$ax^7 + bx^6 + cx^5 + dx^4 + cx^3 + fx^2 + gx + h - 1$$
$$= (x+1)^4 (ax^3 + B'x^2 + C'x + D').$$

On obtient de la sorte le système d'équations

$$\begin{aligned} B - 4a &= b, & B' + 4a &= b,\\ C - 4B + 6a &= c, & C' + 4B' + 6a &= c,\\ D - 4C + 6B - 4a &= d, & D' + 4C' + 6B' + 4a &= d,\\ -4D + 6C - 4B + a &= e, & 4D' + C' + 4B' + a &= e,\\ 6D - 4C + B &= f, & 6D' + 4C' + B' &= f,\\ C - 4D &= g, & C' + 4D' &= g,\\ D &= h + 1; & D' &= h - 1. \end{aligned}$$

On a ainsi quatorze équations du premier degré entre quatorze inconnues a, b, c, d, e, f, g, h, B, C, D, B′, C′, D′. En éliminant les majuscules dans chacun des deux groupes, on obtient les huit équations

$$\begin{aligned} &(1) & -35a - 20b - 10c - 4d &= e,\\ &(2) & 84a + 45b + 20c + 6d &= f,\\ &(3) & 20a + 10b + 4c + d &= h + 1,\\ &(4) & -70a - 36b - 15c - 4d &= g;\\ &(5) & -35a + 20b - 10c + 4d &= e,\\ &(6) & -84a + 45b - 20c + 6d &= f,\\ &(7) & -20a + 10b - 4c + d &= h - 1,\\ &(8) & -70a + 36b - 15c + 4d &= g. \end{aligned}$$

Ajoutons et retranchons les équations telles que (1) et (5), nous aurons le système suivant

$$\begin{aligned} 35a + 10c + e &= 0, & 5b + d &= 0;\\ 45b + 6d - f &= 0, & 21a + 5c &= 0;\\ 10b + d - h &= 0, & 20a + 4c - 1 &= 0;\\ 70a + 15c + g &= 0, & 9b + d &= 0; \end{aligned}$$

d'où l'on déduit sans difficulté

$$b = 0, \quad d = 0, \quad f = 0, \quad h = 0,$$

$$a = +\frac{5}{16}, \quad c = -\frac{21}{16}, \quad e = \frac{35}{16}, \quad g = -\frac{35}{16}.$$

On a donc pour le polynôme demandé

$$f(x) = \frac{5x^7 - 21x^5 + 35x^3 - 35x}{16}$$
$$= \frac{x}{16}(5x^6 - 21x^4 + 35x^2 - 35).$$

En posant $x^2 = z$, la quantité entre parenthèses devient

$$(5z^3 - 21z^2 + 35z - 35)$$

et ne s'annule que pour la valeur positive $z = 2,526, \ldots$: les deux autres racines en z sont imaginaires.

Donc, en définitive, l'équation du septième degré en x, $f(x)$ a une racine nulle, deux racines égales et de signe contraire, $\pm 0,0159$ et quatre racines imaginaires.

N. B. — Voici, sans sortir du domaine de l'Algèbre élémentaire, une solution plus simple.

Les expressions

$$(1) \qquad \frac{f(x)+1}{(x-1)^4}, \qquad \frac{f(x)-1}{(x+1)^4}$$

étant, par hypothèse, des polynômes entiers du troisième degré par rapport à x, il en est de même des expressions

$$\frac{f(x)+f(-x)}{(x-1)^4}, \qquad \frac{f(x)+f(-x)}{(x+1)^4},$$

que l'on obtient en ajoutant à chacune des quantités (1) l'autre dans laquelle on a préalablement changé x en $-x$. Le polynôme $f(x)+f(-x)$, qui est du sixième degré au plus, devant d'après cela être divisible par $(x-1)^4(x+1)^4 = (x^2-1)^4$, est identiquement nul; en d'autres termes, $f(x)$ ne saurait renfermer aucun terme de degré pair, et l'on a

$$\lambda f(x) = x^7 + px^5 + qx^3 + rx.$$

En divisant alors $\lambda[f(x)-1]$ par $(x-1)^4$ et observant que le dernier terme de ce quotient doit être égal à $-\lambda$, on

trouve

$$f(x) = 1 + \frac{(x+1)^4}{\lambda}\left[x^3 - 4x^2 + \left(5 + \frac{\lambda}{4}\right)x - \lambda\right],$$

où il faut faire λ égal à $\frac{16}{5}$ pour que la condition $f(1) + 1 = 0$ soit satisfaite.

Mais la solution la plus élégante est sans contredit la suivante, qui repose sur l'emploi des dérivées et qui m'a été communiquée par M. Brisse :

$f(x) + 1$ étant divisible par $(x-1)^4$ et $f(x) - 1$ par $(x+1)^4$, leur dérivée commune $f'(x)$ est divisible par $(x-1)^3(x+1)^3$, puisque $x-1$ et $x+1$ sont premiers entre eux, et l'on a

$$f'(x) = \lambda(x^2 - 1)^3,$$

λ étant une constante, puisque $f'(x)$ est du sixième degré; d'où

$$f(x) = \lambda\left(\frac{x^7}{7} - \frac{3x^5}{5} + x^3 - x\right) + \mu.$$

On détermine λ et μ par les équations $f(1) = -1$, $f(-1) = 1$. D'après l'expression de $f'(x)$ et les signes de $f(1)$ et $f(-1)$, les racines sont séparées. E. R.

SUR LE NOMBRE e;

PAR M. V. JAMET.

Je me propose d'apporter une simplification notable à la méthode créée par M. Hermite pour démontrer que le nombre e n'est racine d'aucune équation algébrique, à coefficients entiers (*Sur la fonction exponentielle*. Paris, Gauthier-Villars, 1874).

Résumons d'abord les considérations fondamentales. Si $F(z)$ désigne un polynôme entier, de degré m, l'intégration par parties donne l'identité

$$e^a \int_0^a e^{-z} F(z)\, dz = [F(0) + F'(0) + \ldots + F^{(m)}(0)] e^a - [F(a) + F'(a) + \ldots + F^{(m)}(a)],$$

ou bien, en faisant, pour abréger,

$$F(z) + F'(z) + F''(z) + \ldots + F^{(m)}(z) = \Phi(z),$$

$$(1) \qquad e^a \int_0^a e^{-z} F(z)\, dz = \Phi(0) e^a - \Phi(a).$$

D'ailleurs, en supposant vraie l'égalité

$$(2) \qquad N_0 + N_1 e + N_2 e^2 + \ldots + N_p e^p = 0,$$

si, dans l'égalité (1), on remplace a successivement par 1, 2, 3, ..., p, et si l'on combine les égalités obtenues avec l'égalité (2), on trouvera

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{a=1}^{a=p} N_a e^a \int_0^a e^{-z} F(z)\, dz \\ &\quad = -[N_0 \Phi(0) + N_1 \Phi(1) + N_2 \Phi(2) + \ldots + N_p \Phi(p)]. \end{aligned} \right.$$

Si les coefficients du polynôme $F(z)$ sont entiers, ainsi que les coefficients N, le second membre de cette égalité sera un nombre entier : ce nombre sera divisible par 1, 2, 3, 4, ..., n, si l'on fait

$$F(z) = z^n (z-1)^n (z-2)^n \ldots (z-p)^n (\alpha - z)(\beta - z) \ldots (\lambda - z),$$

$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ désignant quelques-uns des nombres 1, 2, 3, ..., $p-1$, écrits par ordre de grandeur croissante; c'est dans le choix de ces nombres que réside la simplification annoncée. Divisons, en effet, les deux nombres

de l'égalité (3) par 1, 2, 3, ..., n. Nous trouvons un nombre entier, égal à

$$(4) \qquad \frac{1}{1.2.3.4\ldots n}\sum_{a=1}^{a=p} N_a e^a \int_0^a e^{-z} F(z)\, dz.$$

Je dis qu'on peut choisir les nombres $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$, de telle sorte que cette expression soit différente de zéro, mais inférieure (numériquement) à un nombre donné ε, si petit qu'il soit. En effet, décomposons chacune des intégrales qui figurent dans l'expression ci-dessus en une somme de termes, tels que

$$\int_0^1 e^{-z} F(z)\, dz + \int_0^2 e^{-z} F(z)\, dz + \int_0^3 e^{-z} F(z)\, dz + \ldots$$
$$+ \int_{a-1}^{a} e^{-z} F(z)\, dz.$$

Nous voyons alors que la somme qui entre dans cette même expression est une fonction linéaire, homogène, des intégrales, calculées de zéro à 1, de 1 à 2, de 2 à 3, ..., et finalement de $p-1$ à p; en outre, l'un, au moins, des coefficients de cette fonction n'est pas nul : c'est celui de l'intégrale prise de $p-1$ à p; en effet, il se réduit à $N_p e^p$. Je dis qu'on peut choisir des nombres α, $\beta, \gamma, \ldots, \lambda$, de telle sorte que tous les termes de cette fonction linéaire aient le même signe. En effet, considérons l'expression

$$A\int_0^1 e^{-z} F(z)\, dz + B\int_1^2 e^{-z} F(z)\, dz + C\int_0^3 e^{-z} F(z)\, dz + \ldots$$

égale à la somme que nous voulons étudier, ou bien égale et de signe contraire à cette somme, de manière que le premier de ses coefficients soit positif; soient q la limite supérieure de l'intégrale qui termine le premier groupe de termes à coefficients positifs, r la limite su-

périeure de l'intégrale qui termine le premier groupe de termes à coefficients négatifs, s la limite supérieure de l'intégrale qui entre dans le terme final du deuxième groupe de termes à coefficients positifs, et ainsi de suite. Chacune des intégrales de la somme précédente aura le même signe que son coefficient, si nous faisons n pair, et

$$\alpha = q, \qquad \beta = r, \qquad \gamma = s, \qquad \dots, \qquad \lambda = v,$$

v désignant la limite supérieure de l'intégrale qui termine l'avant-dernier groupe. De cette manière, on est assuré que l'expression (4) n'est nulle pour aucune des valeurs paires de n, et cela suffit pour mener la démonstration à bonne fin.

En effet, quand z varie de zéro à p, les produits

$$(\alpha - z)(\beta - - z)\dots(\lambda - z)$$

et

$$z(z-1)(z-2)\dots(z-p)$$

restent numériquement inférieurs, le premier à un nombre μ, le deuxième à un nombre ν, indépendants, l'un et l'autre, de n, et si l'on appelle H la plus grande valeur numérique des coefficients A, B, C, ..., on voit que l'expression (4) est numériquement inférieure à

$$p\mathrm{H}\mu\,\frac{\nu^n}{1.2.3\dots n};$$

or, cette dernière expression tend vers zéro, quand n est de plus en plus grand. C. Q. F. D. (¹).

(¹) On pourra consulter aussi sur une simplification de la méthode de M. Hermite une Note de M. Stieltjes (*Comptes rendus*, 1890).

THÉORIE DES DÉTERMINANTS;

PAR M. E. CARVALLO,
Examinateur d'admission à l'École Polytechuique.

1. INTRODUCTION. — M. F. Caspary, dans un très intéressant Mémoire (1), a exposé une méthode à la fois synthétique et analytique pour l'étude de la Géométrie. Les principes en sont dus aux génies de Cauchy (2) et de Grassmann (3). L'auteur indique qu'ils se prêtent à une théorie simplifiée des déterminants, mais il n'en dit rien de plus. De son côté, Grassmann, dans son remarquable Ouvrage *Die Ausdehnungslehre*, néglige cette théorie, quoique son exposition eût à gagner par une étude préalable des déterminants. Je serai heureux si, comme je pense, l'exposition suivante est jugée plus facile que les méthodes adoptées. Elle présente certainement l'avantage de faire ressortir le caractère de produit que possède un déterminant et qui est, en général, méconnu. Enfin elle prépare à ces méthodes puissantes de Cauchy, Grassmann, Hamilton, dont MM. F. Caspary, Laisant, Tait, ont fait d'intéressantes applications, mais qui n'ont pas encore, dans la Science et surtout dans l'enseignement, la place qu'elles méritent. Faciliter le présent et préparer l'avenir, tel est mon but.

2. DÉFINITIONS. — Le dénominateur commun des

(1) *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. XIII; sept. 1889.
(2) *Comptes rendus*, t. XXXVI et XLII: *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, t. III et IV.
(3) *Die Ausdehnungslehre*. Berlin, 1842 et 1862.

valeurs des inconnues x et y tirées des équations

$$(1)\qquad \begin{cases} c = ax + by, \\ c' = a'x + b'y \end{cases}$$

est $ab' - ba'$; il est *déterminé* quand on donne le Tableau des coefficients $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$. De là le nom de *déterminant* donné à ce Tableau. Le nombre $ab' - ab'$ est la *valeur de ce déterminant* (¹). On l'obtient commodément par une sorte de multiplication. Multiplions, en effet, membre à membre la première équation (1) par la deuxième, *en respectant l'ordre des facteurs*. Il vient

$$(2)\qquad cc' = aa'xx + ab'xy + ba'yx + bb'yy.$$

Si maintenant on cesse de regarder x et y comme des nombres pour en faire de purs symboles dénués de toute signification, et que Grassmann appelle *unités* (²), il suffit de faire sur ces unités la convention générale unique

$$xy = -yx$$

et, conséquemment,

$$xx = 0, \qquad yy = 0.$$

Le coefficient de xy, dans le développement (2), est alors la valeur $ab' - ba'$ du déterminant.

MULTIPLICATION EXTÉRIEURE. — Cette convention générale unique que *le produit de deux unités change de signe quand on intervertit l'ordre des facteurs* suffit

(¹) Cette distinction entre le déterminant et sa valeur peut paraître subtile; elle s'impose dans certaines questions.

(²) Cauchy emploie, pour désigner ces symboles, le nom de *clefs anastrophiques;* voir le *Mémoire sur les clefs algébriques* dans le Tome IV des *Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, p. 356. E. R.

pour engendrer les déterminants par voie de multiplication. Cette sorte de multiplication qui en résulte, Grassmann l'appelle *multiplication extérieure* et la représente par des crochets pour la distinguer de la multiplication usuelle ou *algébrique*. Enfin, pour éviter toute confusion, au lieu d'employer la notation ci-dessus, je désignerai les *unités* par la lettre x affectée d'indices, les fonctions linéaires de ces unités par la lettre y; les nombres, *éléments des déterminants*, seront désignés par les lettres $a, b, c, \ldots$. Ainsi le produit extérieur des quantités $y = ax_1 + bx_2$, $y' = a'x_1 + b'x_2$ qui définit le déterminant $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$ sera

$$[yy'] = [(ax_1 + bx_2)(a'x_1 + b'x_2)] = (ab' - ba')[x_1 x_2].$$

De la définition résultent immédiatement les propriétés suivantes pour les produits extérieurs qu'on peut former avec n unités $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

1° *Dans ces produits, les facteurs peuvent être ordonnés dans tel ordre que l'on veut par des échanges successifs de facteurs consécutifs, chaque échange étant accompagné d'un changement de signe.*

2° *Ceux qui contiennent plus d'une fois un même facteur sont nuls.*

3° *Quand on intervertit deux facteurs quelconques non consécutifs, le produit change de signe;* en effet, pour passer de $[\ldots x_p \ldots x_q \ldots]$ à $[\ldots x_q \ldots x_p \ldots]$, on peut échanger x_p successivement avec les k facteurs qui le séparent de x_q, puis échanger x_p et x_q, enfin échanger x_q avec les k facteurs qui le séparaient d'abord de x_p. Le nombre $2k+1$ de ces échanges successifs étant impair, le produit a finalement changé de signe.

Déterminants. — 1° *Étant donné n fonctions linéaires homogènes $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de n lettres x_1,*

$x_2, \ldots, x_n$, on appelle déterminant de ces fonctions le tableau carré des n^2 coefficients.

2° *La valeur du déterminant est le coefficient de $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ dans le produit extérieur $[y_1, y_2, \ldots y_n]$.*

Si l'on appelle D cette valeur, on aura

$$[y_1 y_2 \ldots y_n] = D[x_1 x_2 \ldots x_n],$$

ce qui conduit à la notation fort commode

$$D = \frac{[y_1 y_2 \ldots y_n]}{[x_1 x_2 \ldots x_n]},$$

qui est celle des déterminants fonctionnels (¹).

3. Théorème. — *Un déterminant change de signe quand on échange deux lignes entre elles.*

Il s'agit de prouver que si, dans le produit $[y_1 y_2 \ldots y_n]$, on intervertit deux facteurs y quelconques, le produit change de signe et pour cela il suffit de démontrer que, pour deux facteurs consécutifs quelconques y_p et y_q, on a

$$(1) \qquad [y_p y_q] = -[y_q y_p].$$

Or un terme quelconque du premier produit se trouve dans le second avec cette seule différence que les lettres x qui s'y trouvent ont échangé leurs places. L'égalité (1) est donc démontrée et le théorème en résulte (comme au n° 2).

Corollaires. — 1° *Cette règle générale qui a servi*

(¹) Cette définition établit une différence entre les lignes et les colonnes d'un déterminant. Cela me paraît essentiel. Quand on échange les lignes avec les colonnes, le *déterminant* lui-même change. Sa *valeur* reste la même, il est vrai; mais c'est là un théorème et il n'y a pas lieu de renfermer ce théorème dans la définition en s'efforçant de rendre celle-ci symétrique par rapport aux lignes et aux colonnes.

de définition à la multiplication extérieure (à savoir que le produit de deux unités change de signe quand on permute les deux facteurs) *s'étend à des fonctions linéaires quelconques de ces unités.*

2° *Si, dans un déterminant, on échange les lignes avec les colonnes, sa valeur ne change pas.* En effet, de la définition (n° 2) et du théorème (n° 3), il résulte que les valeurs de deux déterminants sont formées des mêmes termes munis des mêmes signes.

3° *Tout théorème relatif aux lignes s'applique également aux colonnes, et réciproquement.*

4. Théorème. — *On a*

$$\begin{vmatrix} a+a' & b+b' & c+c' \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

C'est ce qu'exprime la formule évidente

$$[(y+y')y_1 y_2] = [y y_1 y_2] + [y' y_1 y_2].$$

5. *Développement d'un déterminant suivant les éléments d'une ligne.*

Soit à développer suivant les éléments de la première ligne le déterminant défini par les formules

$$\begin{aligned} y &= ax_1 + bx_2 + cx_3, \\ y' &= a'x_1 + b'x_2 + c'x_3, \\ y'' &= a''x_1 + b''x_2 + c''x_3. \end{aligned}$$

On a

$$[y'y''] = [(a'x_1 + b'x_2 + c'x_3)(a''x_1 + b''x_2 + c''x_3)].$$

Dans le développement de ce produit, le terme en $[x_2 x_3]$, par exemple, provient de

$$(b'x_2 + c'x_3)(b''x_2 + c''x_3).$$

Le coefficient de ce terme est donc le déterminant $\frac{[y'y'']}{[x_2x_3]}$ qu'on obtient en supprimant la ligne y et la colonne x_1 qui se croisent sur l'élément a. On a ainsi

$$[y'y''] = \frac{[y'y'']}{[x_2x_3]}[x_2x_3] + \frac{[y'y'']}{[x_1x_3]}[x_1x_3] + \frac{[y'y'']}{[x_1x_2]}[x_1x_2].$$

Je multiplie *en avant* le premier membre par y, le second par l'expression égale $ax_1 + bx_2 + cx_3$, et je développe le second membre en tenant compte des égalités de définition de la multiplication extérieure. Il vient

$$[yy'y''] = a\frac{[y'y'']}{[x_2x_3]}[x_1x_2x_3] + b\frac{[y'y'']}{[x_1x_3]}[x_2x_1x_3] + c\frac{[y'y'']}{[x_1x_2]}[x_3x_1x_2],$$

d'où enfin

$$\frac{[yy'y'']}{[x_1x_2x_3]} = a\frac{[y'y'']}{[x_2x_3]} - b\frac{[y'y'']}{[x_1x_3]} + c\frac{[y'y'']}{[x_1x_2]}.$$

C'est l'expression de la règle connue; $\frac{[y'y'']}{[x_2x_3]}$ est le déterminant mineur de l'élément a.

On obtient une généralisation de ce théorème en séparant le produit

$$[y_1y_2\ldots y_py_{p+1}\ldots y_n]$$

en deux autres,

$$[y_1\ldots y_p],\quad [y_{p+1}\ldots y_n].$$

6. J'ai donné en substance la partie la plus élémentaire de la théorie des déterminants. C'est à dessein que j'ai négligé quelques détails auxquels on suppléera sans peine. La multiplication des déterminants se traite aussi d'une façon intuitive par la même méthode.

———

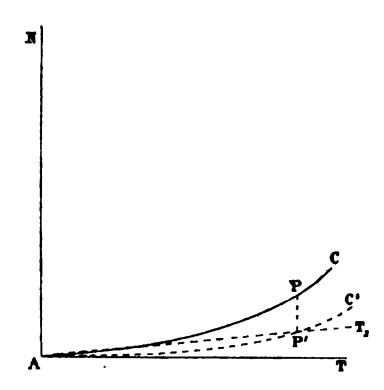
DÉMONSTRATION NOUVELLE D'UN THÉORÈME SUR LES NORMALIES;

PAR M. H. ADER,
Élève à l'École Polytechnique.

En un point d'une surface, les rayons de courbure des sections normales sont proportionnels aux carrés des diamètres d'une conique appelée *indicatrice;* on peut déduire de là le théorème des tangentes conjuguées. (BERTRAND, *Calcul différentiel*, p. 670. — POINCARÉ, *Nouvelles Annales de Mathématiques;* 1874.)

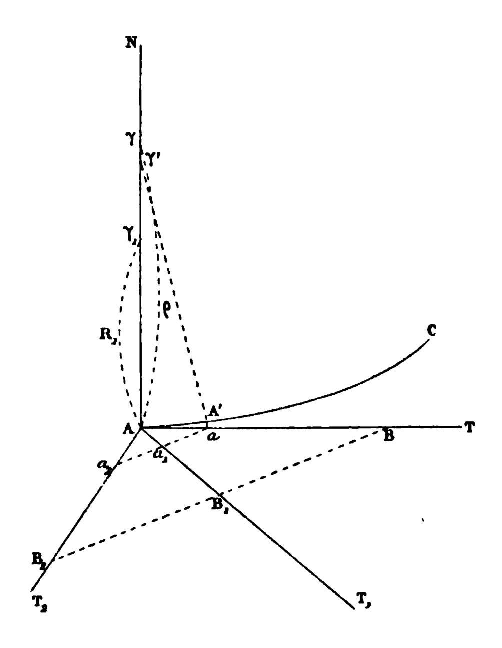
Cela étant, on peut démontrer que, si la directrice d'une normalie passe par un point A d'une surface, les plans principaux relatifs à ce point sont tangents à la normalie aux centres de courbure principaux.

Pour cela, démontrons d'abord que, si l'on considère deux normalies dont l'une a pour directrice la section



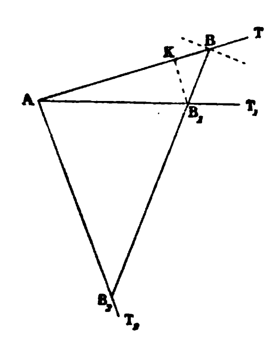
par le plan NAT (AN étant la normale à la surface que nous supposons verticale) et l'autre une courbe AC tan-

gente en A à AT, et projetée sur le plan horizontal du point A suivant AC′, ces deux normalies se raccordent le long de AN. En effet, coupons par le plan NAT_1 voisin de NAT; la normalie qui a pour directrice cette section a avec la normalie AC deux génératrices communes : AN et la normale au point P d'intersection de AC avec NAT_1. Si donc on fait tendre NAT_1 vers NAT, à la limite, les deux normalies (NAT) et (AC) ont deux génératrices infiniment voisines communes et se raccordent.



Il suffit donc de démontrer la propriété énoncée pour une normalie ayant pour directrice une section normale. Or, pour trouver le point de contact avec la normalie (NAT) d'un plan passant par AN, il suffit de chercher la limite du point d'intersection avec ce plan de la normale au point A′ infiniment voisin de A. Si donc on considère deux plans NAT_1, NAT_2, les hauteurs de leurs

points de contact au-dessus du plan horizontal sont dans le rapport $\frac{aa_1}{aa_2}$, aa_1a_2 étant la projection de la normale en A'. Or cette normale, étant perpendiculaire au plan tangent en A', a sa projection perpendiculaire à la trace de ce plan, qui n'est autre que la caractéristique du plan



tangent en A, c'est-à-dire le diamètre conjugué de AT. Les hauteurs des points de contact de NAT_1 et NAT_2 sont donc dans le rapport $\frac{BB_1}{BB_2}$, BB_1B_2 étant une perpendiculaire quelconque au diamètre conjugué de AT; par exemple, si B est sur l'indicatrice, la normale à cette courbe est au point B. Or si NAT_2 est perpendiculaire à NAT, son point d'intersection avec la normale en A' se projette sur le plan NAT en γ'. Le point de contact de ce plan avec la normalie est la limite de γ', c'est-à-dire γ, centre de courbure de AC. Si l'on suppose, de plus, que NAT_1 est le plan principal correspondant à l'axe a de l'indicatrice, pour démontrer qu'il est tangent en γ_1, centre de courbure de la section principale correspondant à l'axe b, il suffit de démontrer que

$$\frac{BB_1}{BB_2} = \frac{A\gamma_1}{A\gamma} = \frac{R_1}{\rho} = \frac{b^2_1}{a'^2_1},$$

c'est-à-dire que $\frac{BK}{BA} = \frac{b^2}{a'^2}$ ou $BK = \frac{b^2}{a'}$, ce qui est une propriété connue des coniques.

Le théorème énoncé est donc démontré.

Remarque. — La démonstration donne en même temps le moyen d'avoir le point de contact d'un plan tangent quelconque, le paramètre de distribution, etc.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE EN 1889.

SOLUTIONS PAR M. LE CAPITAINE BARISIEN.

PREMIÈRE SESSION.

Soient Ox, Oy *deux axes rectangulaires et une droite* LL' *parallèle à* Oy *dont l'équation est* $x - a = 0$. *On considère le faisceau des paraboles qui passent par le point* O *et qui ont la droite* LL' *pour directrice.*

1° *Trouver le lieu du foyer et le lieu du sommet de chacune de ces paraboles;*

2° *Par un point quelconque du plan* xOy *passent deux des paraboles considérées, réelles ou imaginaires, déterminer la région du plan dans laquelle doit être ce point pour que les deux paraboles soient réelles.*

3° *Étant données les coordonnées d'un point* M *du plan* xOy, *former l'équation qui a pour racines les coefficients angulaires des tangentes au point* O *aux deux paraboles du faisceau considéré qui passent par ce point* M. *En déduire l'équation de la ligne* S *sur laquelle doit se trouver le point* M *pour que les tangentes au point* O *aux deux paraboles du faisceau qui passent au point* M *soient rectangulaires.*

4° *Soit* M *un point situé sur la ligne* S, *et soient* F, F′ *les foyers des deux paraboles du faisceau considéré qui passent par ce point, démontrer que, lorsque le point* M *se déplace sur la ligne* S, *la droite* FF′ *tourne autour d'un point fixe.*

I. Si α, β sont les coordonnées du foyer de la parabole, ayant pour directrice la droite hh', son équation est

$$(1)\qquad (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=(x-a)^2,$$

avec la condition

$$(2)\qquad \alpha^2-\beta^2=a^2,$$

qui exprime que la parabole passe par le point O.

Cette condition (2) exprime aussi que le lieu des foyers des paraboles (1) est le cercle de centre O et de rayon a.

L'équation de l'axe étant

$$(3)\qquad y=\beta,$$

pour avoir le lieu du sommet des paraboles, il faut éliminer α et β entre les équations (1), (2) et (3). (1) devient, en tenant compte de (3),

$$(x-\alpha)=-(x-a),$$

d'où

$$\alpha=2x-a;$$

(2) devient alors

$$(2x-a)^2+y^2=a^2$$

ou

$$4x^2+y^2-4ax=0.$$

C'est une ellipse dont le centre est le milieu de OA. OA est le petit axe de longueur a : son grand axe est de grandeur $2a$.

II. Par un point (p, q) du plan passent deux paraboles déterminées par la valeur de α et β provenant des deux équations

$$\begin{cases} (p-\alpha)^2+(q-\beta)^2=(p-a)^2, \\ \alpha^2+\beta^2=a^2. \end{cases}$$

En formant l'équation en α, on trouve

$$4\alpha^2(p^2+q^2)-4\alpha p(q^2+2ap)+(q^2+2ap)^2-4a^2q^2=0.$$

La condition pour que les deux valeurs de α soient réelles se réduit à

$$q^2+4ap-4a^2<0,$$

ce qui indique que, si le point (p, q) est à l'intérieur de la parabole,

$$(4) \qquad y^2+4ax-4a^2=0,$$

les deux paraboles passant par ce point sont réelles. Elles se confondent si le point (p, q) est sur la parabole (4), et elles sont imaginaires si ce point est à l'extérieur de la parabole.

III. La tangente à l'origine de la parabole (1) ayant pour équation

$$(\alpha-a)n+\beta y=0;$$

son coefficient angulaire est

$$(5) \qquad p=\frac{a-\alpha}{\beta}.$$

En éliminant α et β entre cette équation (5) et les deux suivantes

$$\begin{cases} \alpha^2+\beta^2=a^2, \\ q^2=2(\alpha-a)p+2\beta q, \end{cases}$$

on forme sans aucune difficulté l'équation en p

$$(6) \qquad p^2(q^2+4ap)-4aqp+q^2=0,$$

qui donne les coefficients angulaires des tangentes au point O des deux paraboles du faisceau qui passent par le point (p, q).

Si ces deux tangentes sont rectangulaires, on doit avoir $p'p'' = -1$, c'est-à-dire

$$q^2 + 2ap = 0.$$

La ligne S de l'énoncé est donc une parabole.

IV. Avec la condition

$$q^2 = -2ap,$$

la relation

$$q^2 = 2(\alpha - a)p + 2\beta q$$

se réduit à

$$\alpha p + \beta q = 0,$$

et comme

$$\alpha^2 + \beta^2 = a^2,$$

on en déduit

$$\alpha = \frac{aq}{\sqrt{p^2 + q^2}}, \qquad \beta = -\frac{ap}{\sqrt{p^2 + q^2}},$$

pour les coordonnées du foyer F. Celles du foyer F' sont

$$\alpha' = -\frac{aq}{\sqrt{p^2 + q^2}}, \qquad \beta' = \frac{ap}{\sqrt{p^2 + q^2}}.$$

L'équation de la droite FF' est par suite

$$y - \beta = \frac{\beta' - \beta}{\alpha' - \alpha}(x - \alpha)$$

et se réduit à

$$y = -\frac{px}{q}.$$

La droite FF' tourne donc autour du point fixe O.

SECONDE SESSION.

1. *Démontrer que les coniques représentées par l'équation*

$$(A) \qquad (1 - m^2)x^2 + y^2 + 2mrx - r^2 = 0,$$

où l'on suppose m variable, ont deux points communs, et que, si les axes de coordonnées sont rectangulaires, elles ont en outre un foyer commun.

2. *Trouver l'équation* (B) *de la conique assujettie aux conditions suivantes : passer par l'origine, être tangente à une des coniques représentées par* (A) *en un point* P(x, y), *pris sur cette courbe, et enfin passer par les deux projections du point* P *sur les axes de coordonnées.*

3. *Trouver le lieu des points de contact avec les courbes, représentées par* A, *des tangentes issues d'un point*

$$x = 0, \qquad y = h$$

de l'axe des y, *lorsqu'on fait varier m.*

4. *Trouver le lieu des centres des courbes* (B) *correspondant à une courbe fixe* A *quand on fait varier la position du point* P *sur cette courbe.*

5. *Discuter l'équation* (B) *en supposant que l'on déplace le point* P *sur une des courbes représentées par l'équation* (A); *séparer les parties qui répondent à des ellipses de celles qui répondent à des hyperboles, et trouver le lieu des points de séparation lorsqu'on fait varier m.*

I. L'équation (A) pouvant s'écrire

$$(A) \qquad x^2 + y^2 = (mx - r)^2$$

n'est autre que l'équation générale des coniques ayant pour foyer l'origine et passant par deux points de l'axe des y équidistants de l'origine de la quantité r (on suppose les axes rectangulaires).

II. L'équation générale des coniques passant par l'origine, le point P et les projections de ce point sur les axes de coordonnées peut s'écrire

$$(1) \qquad Ax^2 + Cy^2 - Axx' - Cyy' = 0.$$

La tangente au point $(x'y')$ de cette courbe a pour équation

$$(2) \qquad Axx' Cyy' - Ax'^2 - Cy'^2 = 0.$$

La tangente au même point $(x'y')$ de la conique (A) a pour équation

$$(3) \qquad x[x'(1-m^2)+mr] + yy' + r(mx'-r) = 0.$$

En identifiant ces deux équations, on trouve

$$\frac{Ax'}{x'(1-m^2)+mr} = \frac{C}{1} = -\frac{(Ax'^2+Cy'^2)}{r(mx'-r)};$$

d'où

$$\frac{A}{C} = \frac{x'(1-m^2)+mr}{x'}.$$

En portant la valeur de ce rapport dans (1), l'équation de la conique (B) a pour expression

$$(B) \quad (x^2 - xx')[x'(1-m^2)+mr] + x'(y^2 - yy') = 0.$$

III. En faisant $x = 0$, $y = h$ dans (3), cette équation devient

$$(4) \qquad y'h + r(mx'-r) = 0.$$

On a de plus

$$(5) \qquad x'^2 + y'^2 = (mx'-r)^2,$$

En éliminant m ou plutôt $(mx' - r)$, entre (4) et (5), on a

$$y' = \pm x' \frac{r}{\sqrt{h^2 - r^2}}.$$

Le lieu des points de contact se compose de deux droites passant par l'origine et également inclinées sur les axes. Les deux droites ne sont réelles que si $h > r$.

IV. Les coordonnées du centre des courbes (B) sont

$$x = \frac{x'}{2}, \qquad y = \frac{y'}{2}.$$

De sorte qu'en éliminant x' et y' entre ces deux équations et la relation (5), on trouve pour le lieu des centres l'équation

$$(6) \qquad 4(x' + y^2) = (2mx - r)^2 :$$

c'est une conique homofocale de la conique (A).

V. Pour que la conique (B) soit une ellipse, il faut que

$$x'[x'(1 - m^2) + mr] > 0.$$

Si donc le point (x', y') se trouve situé sur l'arc de la conique (A) limité par les points d'intersection de la conique avec les droites

$$(7) \qquad \begin{cases} x = 0, \\ x = \dfrac{mr}{m^2 - 1}, \end{cases}$$

les coniques (B) seront des hyperboles. Sur tout le reste de l'arc d'ellipse, les coniques (B) seront des hyperboles. Aux points d'intersection, les coniques (B) seront des paraboles.

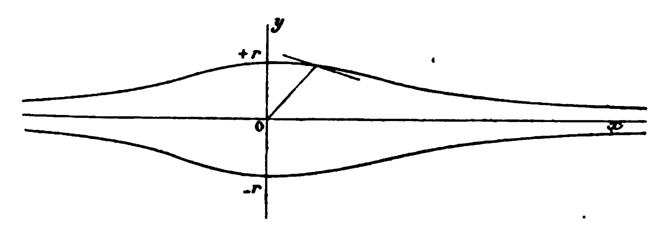
Pour $x = 0$, on trouve comme points d'intersection les deux points par lesquels passent les coniques (A).

Pour $x = \frac{mr}{m^2-1}$, on trouve, en substituant dans (A),

$$y^2 = \frac{r^2}{1-m^2}.$$

En éliminant m entre ces deux valeurs de x et y, on trouve pour le lieu des points de séparation

$$y^4 = r^2(x^2+y^2).$$



C'est une courbe ayant pour asymptote l'axe des x. Son équation en coordonnées polaires étant

$$\rho = \frac{r}{\sin^2\omega},$$

on trouve que les points d'inflexion correspondent à

$$\tang\omega = \sqrt{2}$$

et, par suite, à

$$\rho = \frac{3r}{2}.$$

SURFACES DE SYMÉTRIE DU TROISIÈME ORDRE D'UNE QUADRIQUE;

PAR M. S. MANGEOT,

Docteur ès Sciences, professeur au lycée de Troyes.

Mes recherches sur les surfaces de symétrie d'une quadrique, c'est-à-dire sur les surfaces dont chaque

normale, limitée à ses deux points de rencontre avec la quadrique, a son milieu au point d'incidence, m'ont conduit à une méthode générale pour la détermination de celles de ces surfaces qui sont algébriques.

Cette méthode a son point de départ dans les résultats suivants, que je me borne à énoncer.

I. Les surfaces de symétrie de la quadrique à centre unique

$$(S) \qquad \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = K,$$

rapportée à ses axes, sont toutes les surfaces dont l'équation est homogène par rapport aux trois quantités x^a, y^b, c^c (¹). Il suit de là que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une équation de la forme

$$(1) \qquad \Sigma A x^m y^n z^p = 0,$$

(¹) Les cônes sont les surfaces de symétrie des sphères

$$(a = b = c = 1).$$

En cherchant à généraliser ce résultat que les cônes ayant leur sommet à l'origine des coordonnées sont les enveloppes des plans $ux + vy + wz = 0$, on est conduit à ce théorème, qui se démontre facilement :

Toutes les surfaces de symétrie de la quadrique

$$\frac{x}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = K,$$

rapportée à ses axes, sont les enveloppes des surfaces de symétrie particulières définies par l'équation $ux^a + vy^b + wz^c = 0$, *où* u, v, w *désignent des fonctions d'une même variable* t; *de plus les caractéristiques de ces enveloppes sont des lignes de symétrie de la quadrique (c'est-à-dire des courbes dont chaque plan normal coupe la quadrique suivant une conique ayant son centre au point d'incidence).*

où les exposants $m, n, p, \ldots$ sont des nombres positifs quelconques, représente une surface de symétrie de cette quadrique, est que l'expression

$$D = \frac{m}{a} + \frac{n}{b} + \frac{p}{c}$$

ait une valeur constante pour tous les termes de l'équation.

Lorsque cette constante sera nulle, la surface sera orthopolaire de la quadrique, c'est-à-dire que les deux plans polaires d'un même point par rapport à la quadrique et à la surface seront rectangulaires, non seulement quand ce point se déplace sur la surface (condition qui suffit pour la symétrie), mais encore lorsqu'il occupe une position quelconque dans l'espace (¹).

II. Si l'on égale à une constante le rapport de deux des trois quantités x^a, y^b, z^c, on obtient les équations de toutes les surfaces de symétrie de la quadrique (S) qui sont cylindriques.

III. Pour que la quadrique (S) admette des cônes de symétrie algébriques autres que les plans de symétrie, il faut et il suffit : 1° que la quadrique ne soit pas de révolution ; 2° que le rapport $\frac{c(a-b)}{a(b-c)}$, qui peut toujours

---

(¹) En interprétant la condition $D =$ const., on peut énoncer cette proposition :

Pour que l'équation (1) *représente une surface de symétrie de la quadrique* (S), *il faut et il suffit que les points qui ont pour coordonnées les trois exposants* m, n, p *de chaque terme soient situés dans un même plan parallèle au plan diamétral conjugué, par rapport à la quadrique, de l'axe du trièdre trirectangle* OXYZ. *Lorsque les points précédents sont dans ce plan diamétral lui-même, la surface est orthopolaire de la quadrique.*

être supposé positif, soit commensurable, et alors l'équation de ces cônes est

$$\alpha x^{N} z^{M} + \beta y^{M+N} = 0,$$

si l'on désigne par $\frac{M}{N}$ la fraction irréductible égale au rapport précédent, et par α, β deux constantes arbitraires. Tous ces cônes sont ainsi du même degré $M+N$.

IV. Pour que l'équation entière $\Sigma\varphi_r(x, y, z) = 0$, où $\varphi_r(x, y, z)$ désigne un polynôme entier et homogène en x, y, z, de degré r, représente une surface de symétrie de la quadrique (S), il est nécessaire et il suffit que chacune des surfaces $\varphi_r = 0$ soit elle-même une surface de symétrie de la quadrique, et que, en outre, le degré d'homogénéité D de chaque fonction φ_r, par rapport à x^a, y^b, z^c, soit le même pour tous les groupes φ_r.

Je vais indiquer brièvement la marche qui m'a conduit, en partant de là, aux diverses formes que doit avoir l'équation du troisième degré

$$F(x, y, z) = \varphi_3 + \varphi_2 + \varphi_1 + \varphi_0 = 0$$

supposée indécomposable, pour qu'elle représente des surfaces de symétrie de la quadrique (S).

Je laisse de côté celles de ces surfaces qui sont des cylindres : leur détermination est immédiate (II). La fonction F renfermera donc les trois variables x, y, z.

Je cherche d'abord les surfaces de symétrie du troisième ordre qui ne sont pas des surfaces orthopolaires de la quadrique. La valeur constante de D étant différente de zéro, φ_0 doit être nul. Je distingue alors trois cas :

1° φ_3 *n'est pas décomposable en facteurs.*

L'équation $\varphi_3 = 0$ doit définir un cône de symétrie

proprement dit, ce qui exige que l'un des nombres M, N soit égal à 1, l'autre égal à 2. On peut prendre $M = 1$, $N = 2$; la fonction φ_3 a la forme $\alpha x^2 z + \beta y^3$, et l'on doit avoir

$$\frac{3}{b} = \frac{2}{a} + \frac{1}{c}.$$

La condition d'invariabilité imposée à D ne permet pas de prendre plus d'un terme pour composer la somme $\varphi_2 + \varphi_1$ et fait connaître la forme que peut avoir ce terme, en même temps qu'une nouvelle relation à laquelle satisferont a, b, c.

2° φ_3 *est un produit de deux facteurs.*

L'un des deux facteurs, égalé à zéro, doit donner un plan de symétrie, et l'autre un véritable cône de symétrie. L'équation de ce cône étant $\alpha xz + \beta y^2 = 0$, on doit avoir

$$\frac{2}{b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}.$$

Comme précédemment, la fonction $\varphi_2 + \varphi_1$ renferme un seul terme, qui se détermine aisément.

3° φ_3 *est un produit de trois facteurs.*

Si la quadrique n'est pas de révolution, φ_3 ne comprend qu'un seul terme, et, en remarquant que φ_1 n'en peut renfermer plus d'un, on a à examiner les trois hypothèses où le nombre des termes de φ_2 est égal à 2, 1 ou 0. On reconnaît sans difficulté quelles sont les associations de termes qui peuvent réaliser l'invariabilité de D.

Lorsque la quadrique est de révolution ($a = b$), en partant successivement des diverses valeurs que l'on peut prendre pour φ_1, à savoir $\alpha x + \beta y$, αz ou 0, on en déduit, toujours par la considération de D, la forme qui convient à φ_2, puis à φ_3.

En effectuant les calculs dont je viens de donner l'indication, voici les diverses formes que l'on trouve pour la fonction F. J'ai placé, en regard de chacune d'elles, la condition ou les conditions à imposer aux axes de la quadrique (S).

Formes de la fonction $F(x, y, z)$.	Relations entre a, b, c.
$\alpha y^3 + \beta x^2 z + \gamma z^2$	$3a = 4b = 6c$
$\alpha y^3 + \beta x^2 z + \gamma yz$	$a = 2b = 4c$
$\alpha y^3 + \beta x^2 z + \gamma xy$	$2a = b = -c$
$\alpha y^3 + \beta x^2 z + \gamma x$	$3a = b = -3c$
$\alpha x^2 z + \beta xy^2 + \gamma z^2$	$2a = 3b = 4c$
$\alpha x^2 z + \beta xy^2 + \gamma yz$	$a = 2b = 3c$
$\alpha x^2 z + \beta xy^2 + \gamma y$	$a = -b = -3c$
$\alpha y^3 + \beta xyz + \gamma x^2$	$3a = 2b = c$
$\alpha y^3 + \beta xyz + \gamma z$	$a = -b = -3c$
$\alpha x^3 + \beta y^2 + \gamma xz$	$2a = 3b = 4c$
$\alpha x^2 y + \beta y^2 + \gamma xz$	$a = 2b = 3c$
$\alpha z^3 + \beta x^2 + \gamma y$	$3a = 6b = 2c$
$\alpha z^2 x + \beta x^2 + \gamma y$	$2a = 4b = c$
$\alpha y^2 z + \beta x^2 + \gamma y$	$a = 2b = -2c$
$\alpha xyz + \beta x^2 + \gamma y$	$a = 2b = -c$
$\alpha y^3 + \beta yz + \gamma x$	$3a = b = 2c$
$\alpha x^2 y + \beta yz + \gamma x$	$a = -b = 2c$
$\alpha x^2 z + \beta x + \gamma y$	$a = b = -c$
$\alpha xyz + \beta x + \gamma y$	$a = b = -c$
$\alpha z^3 + \beta x^2 - \gamma y^2$	$3a = 3b = 2c$
$\alpha z^2 x + \beta x^2 + \gamma y^2$	$2a = 2b = c$
$\alpha x^3 + \beta x^2 y + \gamma xy^2 + \delta y^3 + \varepsilon z$	$a = b = 3c$
$\alpha x^3 + \beta x^2 y + \gamma xy^2 + \delta y^3 + \varepsilon z^2$	$2a = 2b = 3c$
$\alpha x^3 + \beta x^2 y + \gamma xy^2 + \delta y^3 + \varepsilon xz$	$a = b = 2c$
$\alpha x^3 + \beta yz$	$\frac{3}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$
$\alpha y^2 z + \beta x^2$	$\frac{2}{a} = \frac{2}{b} + \frac{1}{c}$
$\alpha y^2 z + \beta x$	$\frac{1}{a} = \frac{2}{b} + \frac{1}{c}$

On peut former, inversement, au moyen du Tableau qui précède, les équations des seules quadriques à centre unique qui admettent des surfaces de symétrie du troisième ordre non orthopolaires de la quadrique et autres que des cylindres. Je crois bon de les inscrire dans un second Tableau, en faisant suivre l'équation de chaque quadrique du nombre de classes de ces surfaces de symétrie correspondant à la quadrique.

Voici ce Tableau :

Quadriques qui ne sont pas de révolution.		Quadriques qui sont de révolution.	
$x^2+2y^2+3z^2=d$....	4	$x^2+y^2-z^2=d$....	2
$x^2-y^2+2z^2=d$....	3	$x^2+y^2+2z^2=d$....	1
$x^2+2y^2+4z^2=d$....	2	$x^2+y^2+3z^2=d$ ...	1
$2x^2+3y^2+4z^2=d$....	2	$2x^2+2y^2+z^2=d$....	1
$x^2-y^2+3z^2=d$....	2	$2x^2+2y^2+3z^2=d$....	1
$6x^2+3y^2+2z^2=d$....	1	$3x^2+3y^2+z^2=d$....	1
$6x^2+4y^2+3z^2=d$....	1	$3x^2+3y^2+2z^2=d$....	1
$2x^2-2y^2+z^2=d$....	1		
$3x^2-3y^2+z^2=d$....	1		

A ces quadriques, dans lesquelles les rapports des axes sont déterminés, il faut ajouter encore trois familles de quadriques comprenant chacune des quadriques symétriques par rapport à une seule classe de surfaces du troisième ordre, représentée par une équation binôme.

Il reste maintenant à calculer les formes de la fonction $F(x, y, z)$ qui correspondent aux surfaces de symétrie orthopolaires de la quadrique (S). Ici la valeur constante de D doit être zéro : la quadrique ne peut être que du genre hyperboloïde. La somme $\varphi_3+\varphi_2$ est divisible par l'une des variables, et le groupe φ_1 n'existe pas. La fonction φ_2 ne peut comprendre plus d'un terme. S'il

existe, φ_3 n'est composé également que d'un seul terme. Lorsque φ_2 fait défaut, φ_3 renferme au plus deux termes.

Le Tableau qui suit fait connaître les résultats de ces calculs. Les rapports mutuels des axes de la quadrique sont déterminés, sauf dans un cas. En regard de l'équation de chaque quadrique, se trouve celle des surfaces orthopolaires qui lui correspondent.

$x^2 + y^2 - 2z^2 = d$	$\alpha x^2 z + \beta y^2 z + \gamma = 0$
$2x^2 + 2y^2 - z^2 = d$	$\alpha x z^2 + \beta y z^2 + \gamma = 0$
$x^2 + 2y^2 - 2z^2 = d$	$\alpha x^2 z + \beta yz + \gamma = 0$
$2x^2 + y^2 - z^2 = d$	$\alpha x z^2 + \beta yz + \gamma = 0$
$x^2 + 4y^2 - 2z^2 = d$	$\alpha x^2 z - \beta y z^2 + \gamma = 0$
$\lambda(x^2 - z^2) + \mu(y^2 - z^2) = d$	$xyz + \gamma = 0$

En examinant les résultats inscrits dans les Tableaux précédents ([1]), on est conduit à cette remarque :

Quand un cône du second ordre admet une surface orthopolaire du troisième ordre qui n'est surface orthopolaire d'aucun autre cône du second degré, son cône supplémentaire admet également des surfaces orthopolaires du troisième ordre, et plus généralement, si un cône du deuxième degré est symétrique par rapport à une surface du troisième ordre sans que celle-ci soit surface de symétrie d'un autre cône du deuxième degré, son cône supplémentaire est lui-même symétrique par rapport à une infinité de surfaces du troisième degré.

([1]) Les lettres grecques qui figurent dans ces Tableaux, ainsi que a lettre d, désignent des constantes arbitraires.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE EN 1890.

SOLUTION PAR M. LE CAPITAINE BARISIEN.

PREMIÈRE SESSION.

On donne deux axes rectangulaires $x'Ox$, $y'Oy$, *et deux points* A, B, *symétriques par rapport au point* O.

1° *On prend sur l'axe des* x *un point quelconque* P, *et l'on considère la parabole* (P) *qui est tangente aux droites* PA, PB *au point* A *et au point* B. *Lieu du sommet et lieu du foyer de cette parabole quand le point* P *parcourt l'axe* $x'Ox$.

2° *On prend, sur l'axe des* y, *un point* Q *quelconque, et l'on considère la parabole* (Q) *qui est tangente aux droites* QA, QB, *au point* A *et au point* B. *Les deux paraboles* (P) *et* (Q) *qui correspondent ainsi à un point* P *pris sur* $x'Ox$ *et à un point* Q *pris sur* $y'Oy$ *se coupent aux points* A *et* B *et en deux autres points* C, D. *Former l'équation de la droite* CD *et trouver le lieu décrit par les points* C *et* D *quand les deux points* P *et* Q *se déplacent, l'un sur* $x'Ox$, *l'autre sur* $y'Oy$, *de façon que l'abscisse du premier soit toujours égale à l'ordonnée du second.*

I. Soient a et b les coordonnées du point A, et désignons les longueurs OP et OQ respectivement par α et β.

L'équation générale des coniques tangentes aux droites AP et BP, aux points d'intersection de ces

droites avec AB est

$$[bx+(\alpha-a)y-b\alpha][bx-(\alpha+a)y-b\alpha] \\ +\lambda(bx-ay)^2=0.$$

Pour que cette conique soit une parabole, il faut que $\lambda=-1$, et la parabole (P) a pour équation

$$(1) \qquad \alpha y^2+2b^2x-2aby-b^2\alpha=0.$$

Désignons par p et q les coordonnées du foyer de cette parabole et par $x-k=0$ l'équation de la directrice. En identifiant l'équation (1) avec l'équation focale

$$(x-p)^2+(y-q)^2=(x-k)^2,$$

on a les relations

$$k-p=\frac{b^2}{\alpha},$$

$$q=\frac{ab}{\alpha},$$

$$p^2+q^2-k^2=-b^2,$$

d'où l'on déduit

$$p=\frac{a^2-b^2+\alpha^2}{2\alpha}, \qquad q=\frac{ab}{\alpha}, \qquad k=\frac{a^2+b^2+\alpha^2}{2\alpha}.$$

Pour avoir le lieu des foyers de (P), lorsque α varie, il faut éliminer α entre les deux valeurs de p et q, ce qui donne

$$q^2(a^2-b^2)-2abpq+a^2b^2=0,$$

Cette équation représente une hyperbole ayant son centre à l'origine et l'une de ses asymptotes parallèle à l'axe des x.

L'axe de la parabole (P) ayant pour équation

$$y=\frac{ab}{\alpha},$$

on obtient le lieu du sommet en éliminant α entre cette dernière équation et l'équation (1). On trouve ainsi

$$ay^2 - 2bxy + ab^2 = 0;$$

Le lieu des sommets est donc une hyperbole ayant pour asymptote une parallèle à l'axe des x, son centre à l'origine, et passant par le point A.

II. Par analogie avec la parabole (P), on trouve pour l'équation de la parabole (Q),

$$(2) \qquad \beta x^2 + 2a^2y - 2abx - a^2\beta = 0.$$

L'équation générale des coniques passant par les points d'intersection de (P) et (Q) est

$$(3) \qquad \left\{ \begin{array}{l} ay^2 + 2b^2x + 2aby - b^2\alpha \\ \qquad + \mu(\beta x^2 + 2a^2y - 2abx - a^2\beta) = 0. \end{array} \right.$$

L'équation de AB est

$$bx - ay = 0.$$

Désignons celle de CD par

$$ux + vy - 1 = 0,$$

u et v, ainsi que μ, étant des coefficients à déterminer.

L'ensemble des deux droites AB et CD, considérées comme une conique, a donc pour équation

$$(ux + vy - 1)(bx - ay) = 0$$

ou

$$(4) \qquad ubx^2 + (vb - au)xy - avy^2 - bx + ay = 0.$$

Exprimons que cette équation est identique à (3); il vient les relations

$$\frac{ub}{\mu\beta} = \frac{-av}{\alpha} = \frac{-1}{2(b - a\mu)} = \frac{1}{2(a\mu - b)},$$

$$vb = au,$$

$$b'\alpha + \mu a^2\beta = 0.$$

De ces cinq relations, qui se réduisent à trois, on déduit

$$\mu = -\frac{b^2\alpha}{a^2\beta},$$

$$u = \frac{\alpha\beta}{2a(a\beta + b\alpha)}, \qquad v = \frac{\alpha\beta}{2b(a\beta + b\alpha)}.$$

L'équation de CD devient donc

(5) $$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2\left(\frac{a}{\alpha} + \frac{b}{\beta}\right).$$

Si $\alpha = \beta$, on a, pour cette dernière équation;

(6) $$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = \frac{2(a+b)}{\alpha}.$$

En éliminant α entre (6) et (1), on a le lieu des points C et D qui a pour équation

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = a + b.$$

C'est une ellipse de centre O et d'axes Ox et Oy.

SECONDE SESSION.

On donne une parabole rapportée à deux axes rectangulaires Ox *et* Oy *: cette parabole a son axe parallèle à l'axe des* y*; elle passe par l'origine et le point de l'axe des* x*, dont l'abscisse est* l*; enfin elle admet une ordonnée maxima égale à* f.

On donne, en outre, une droite passant par l'origine et par un point $A(x = l, y = h)$:

1° *Démontrer que si, pour une abscisse déterminée, on porte en ordonnée la somme algébrique de l'ordonnée de la droite et de celle de la parabole correspon-*

dant à cette abscisse, l'extrémité de cette ordonnée est sur une parabole (P) égale à la première;

2° *Démontrer que les axes des coniques qui passent par l'intersectiou d'un centre et d'une conique sont parallèles aux axes de celle-ci;*

3° *Une circonférence de cercle décrite sur* OA *comme diamètre coupant la parabole* (P) *en quatre points* O, A, B, C, *chercher le lieu du point d'intersection des sécantes communes* OA, BC *quand on fait varier* h, *et construire ce lieu qui n'est pas du second degré;*

4° *Chercher la valeur du rapport* $\frac{l}{f}$ *pour laquelle le cercle décrit sur* OA *comme diamètre est tangent à la parabole, quel que soit* h.

La parabole ayant son axe parallèle à l'axe des y, passant par l'origine et par le point de l'axe des x d'abscisse l, et ayant comme ordonnée maxima f, a pour équation

(1) $$x^2 - lx + \frac{l^2}{4f}y = 0.$$

On a aussi pour l'équation de la droite OA

(2) $$hx - ly = 0.$$

I. Les ordonnées de la parabole (1) et de la droite (2), correspondant à la même abscisse S, ont pour valeurs respectives

$$\frac{4fs(l-s)}{l^2} \quad \text{et} \quad \frac{hs}{l}.$$

De sorte que, si l'on pose

$$X = s,$$
$$Y = \frac{4fs(l-s)}{l^2} + \frac{hs}{l}$$

et si l'on élimine S entre ces deux dernières équations,

on obtient pour celle de la parabole (P)

$$(3) \qquad X^2 - \frac{l}{4f}(4f+h)X + \frac{l^2}{4f}Y = 0.$$

Les équations des paraboles (1) et (3) ont même coefficient du terme en y. Il est facile de voir d'une manière générale que, pour la parabole dont l'équation est

$$(4) \qquad x^2 + Ax + By = 0,$$

le coefficient B est le double du paramètre de la parabole. En effet, soient (α, β) les coordonnées du foyer et $y - k = 0$ l'équation de la directrice de cette parabole. Son équation pourra s'écrire

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = (y-k)^2$$

ou

$$(5) \qquad x^2 - 2\alpha x - 2(\beta - k)y + \alpha' + \beta' - k^2 = 0.$$

En identifiant (4) et (5), on obtient

$$2\alpha = -A, \qquad 2(k-\beta) = B, \qquad \alpha^2 + \beta^2 = k^2;$$

d'où l'on déduit les valeurs de α, β et k

$$\alpha = -\frac{A}{2}, \qquad \beta = \frac{A^2 - B^2}{4B}, \qquad k = \frac{A^2 + B^2}{4B}.$$

Or le paramètre p qui est la distance du foyer à la directrice a pour valeur

$$p = k - \beta = \frac{B}{2}.$$

Donc $B = 2p$, ce qui démontre bien que les paraboles (1) et (3) sont égales.

II. Soit, en général, une conique rapportée à son centre et à ses axes, dont l'équation est

$$(6) \qquad b^2x + a^2y^2 - a^2b^2 = 0,$$

et un cercle quelconque

(7) $$x^2+y^2+Mx+Ny+P=0.$$

L'équation générale d'une conique passant par les points d'intersection de ces deux courbes est

(8) $$b^2x^2 \pm a^2y^2 - a^2b^2 + \rho(x^2+y^2+Mx+Ny+P)=0.$$

Cette conique a bien ses axes parallèles à ceux de la conique (6).

En particulier, les droites d'intersection de (6) et (7) sont également inclinées sur les axes de (7), puisque les axes de deux droites sont leurs bissectrices.

III. Les droites BC et AO étant également inclinées sur l'axe de la parabole, l'équation de BC est de la forme

$$hx+ly+p=0.$$

De sorte que l'équation générale des coniques passant par les points d'intersection de la parabole P avec les droites AO et BC est

$$4fx^2-l(4f+h)x+l^2y+\lambda(hx-ly)(hx+ly+\mu)=0$$

ou

(9). $$\left\{\begin{aligned} & x^2(4f+\lambda h^2)-\lambda l^2y^2 \\ & \quad -x[l(4f+h)-\mu h\lambda]+ly(l-\mu\lambda)=0. \end{aligned}\right.$$

Le cercle décrit sur OA comme diamètre a pour équation

(10) $$x^2+y^2-lx-hy=0.$$

En identifiant (9) et (10), on obtient les relations

$$\frac{4f+\lambda h^2}{1}=\frac{-\lambda l^2}{1}=\frac{l(4f+h)+\mu h\lambda}{l}=\frac{l(\mu\lambda-l)}{h}.$$

Ces trois relations se réduisent à deux, l'une des trois rentrant dans les deux autres. On en déduit les valeurs

de λ et μ

$$\lambda = -\frac{4f}{l^2 + h^2}, \qquad \mu = -\frac{l(l^2 + h^2 + 4fh)}{4f}.$$

L'équation de la droite BC est donc

$$(11) \qquad hx + ly = \frac{l(l^2 + h^2 + 4fh)}{4f}.$$

Pour avoir le lieu des points d'intersection de OA et BC, il faut éliminer h entre (2) et (11), ce qui donne pour l'équation de ce lieu

$$(12) \qquad 8fx^2y = l[l(x^2 + y^2) + 4fxy].$$

Cette courbe du troisième degré a une asymptote double parallèle à l'axe des y, rejetée à l'infini, et une asymptote parallèle à l'axe des x dont l'équation est

$$y = \frac{l^2}{8f}.$$

Lorsque $l < 2f$, la courbe passe par l'origine, qui est un point double réel; quand $l = 2f$, la courbe passe encore par l'origine qui est un point de rebroussement de seconde espèce. Enfin, si $l > 2f$, l'origine est un point isolé.

IV. Les tangentes à la parabole (3) en un point (ξ, η) a pour équation

$$x[8f\xi - l(4f + h)] + l^2y - l(4f + h)\xi + l^2\eta = 0.$$

Pour exprimer que la droite BC est tangente, il faut identifier cette dernière équation avec l'équation (11), ce qui donne

$$\frac{8f\xi - l(4f + h)}{4fh} = \frac{l}{4f} = \frac{(4f + h)\xi - l\eta}{l^2 + h^2 + 4fh};$$

d'où l'on déduit

$$(13) \quad \xi = \frac{l(h+2f)}{4f}, \qquad \eta = \frac{1}{4f}(2fh + 8f^2 - l^2).$$

En éliminant h entre ces deux équations, on trouve pour le lieu des points (ξ, η) la droite

$$\eta = \frac{2f}{l}\xi + \frac{4f^2 - l^2}{4f}.$$

Voyons dans quel cas les coordonnées ξ et η satisfont à l'équation de la tangente, quel que soit h. En substituant les valeurs (13) dans l'équation

$$h\xi + l\eta = \frac{l(l^2 + h^2 + 4fh)}{4f},$$

on trouve

$$l = 2f.$$

Donc, si $\frac{l}{f} = 2$, le cercle décrit sur OA comme diamètre est tangent à la parabole, quel que soit h.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1890;

PAR M. LE CAPITAINE BARISIEN.

On donne, dans un plan, une hyperbole équilatère H *dont l'équation par rapport à ses axes, pris pour axes de coordonnées, est*

$$(1) \qquad x^2 - y^2 = a^2.$$

D'un point M *du plan, ayant pour coordonnées* $x = p$, $y = q$, *on mène des normales à cette courbe.*

On demande :

1° *De faire passer par les pieds de ces normales*

une nouvelle hyperbole équilatère, dont les normales en ces points soient concourantes, et de déterminer leur point de concours.

2° *En désignant par* K *une hyperbole satisfaisant à cette condition, dans quelle région du plan doit être placé le point* M *pour qu'il y ait une hyperbole* K *correspondant à ce point?*

3° *Quelle ligne doit décrire le point* M *pour que l'hyperbole* K *soit égale à l'hyperbole* H.

N. B. — On conservera les notations indiquées.

I. L'équation de l'hyperbole équilatère passant par les pieds des normales issues du point M est

$$(2) \qquad 2xy - py - qx = 0.$$

L'équation générale des coniques passant par les points d'intersection des hyperboles (1) et (2) est donc

$$(3) \qquad x^2 - y^2 + 2\lambda xy - p\lambda y - q\lambda x - a^2 = 0.$$

Ces coniques sont toujours des hyperboles équilatères. Il s'agit de déterminer λ de façon que les normales aux quatre points d'intersection de (1) et (2) concourent en un point (α, β) également à déterminer.

L'équation de la normale à l'hyperbole (3) en x, y, est

$$\frac{X - x}{2x + 2\lambda y - q\lambda} = \frac{Y - y}{-2y + 2\lambda x - p\lambda}.$$

Exprimons que cette droite passe par le point (α, β), il vient

$$(\alpha - x)(2y - 2\lambda x + p\lambda) + (\beta - y)(2x + 2\lambda y - q\lambda) = 0$$

et en développant

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} &2\lambda(x^2 - y^2) - 4xy + x[2\beta - \lambda(p + 2\alpha)] \\ &\quad + y[2\alpha + \lambda(q + 2\beta)] + \lambda(p\alpha - q\beta) = 0. \end{aligned} \right.$$

Les normales à l'hyperbole (3) issues du point (α, β) ont leurs pieds à l'intersection des courbes (3) et (4). Une quelconque des hyperboles (3) étant

$$(5)\qquad x^2-y^2+2\mu xy-q\mu x-p\mu q-a^2=0,$$

en identifiant (4) et (5), on exprimera les conditions de l'énoncé.

Les équations d'identification sont

$$\frac{2\lambda}{1}=\frac{-2}{\mu}=\frac{2\beta-\lambda(p+2\alpha)}{-q\mu}$$
$$=\frac{2\alpha+\lambda(q+2\beta)}{-p\mu}=\frac{\lambda(p\alpha-q\beta)}{-a^2}.$$

Elles peuvent s'écrire

$$(6)\qquad \lambda\mu=-1,$$
$$(7)\qquad 2q=2\beta-\lambda(p+2\alpha),$$
$$(8)\qquad 2p=2\alpha+\lambda(q+2\beta).$$
$$(9)\qquad p\alpha-q\beta=-2a^2.$$

En éliminant λ entre (7) et (8), on a l'équation

$$(10)\qquad \left(\alpha-\frac{p}{4}\right)^2+\left(\beta-\frac{q}{4}\right)^2=\frac{9(p^2+q^2)}{16},$$

A un système de valeurs de p et q correspondent donc deux systèmes de valeurs de α et β, relatifs aux points d'intersection de la droite (9) avec le cercle (10).

II. Pour que ces points d'intersection soient réels, il suffit d'exprimer que la distance du centre du cercle (10) à la droite (9) est plus petite que le rayon. On a ainsi

$$\frac{p^2-q^2+8a^2}{4\sqrt{p^2+q^2}}<\frac{3\sqrt{p^2+q^2}}{4},$$

ou

$$(p^2-q^2+8a^2)<3(p^2+q^2)$$

ou

$$p^2+2q^2-4a^2>0;$$

α et β ne seront réels, et par suite λ, que si le point M est à l'intérieur de l'ellipse

$$(11) \qquad p^2 + 2q^2 = 4a^2.$$

Si le point M est sur l'ellipse (11), on n'aura qu'une hyperbole K, et la valeur de λ correspondante est

$$\lambda = \frac{p}{q}.$$

Si, enfin, le point M est à l'intérieur de l'ellipse (11) les hyperboles (K) seront imaginaires.

III. Cherchons maintenant la grandeur de l'axe de l'hyperbole (3).

En général, pour une conique dont l'équation est

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

l'équation en R^2 qui donne les carrés des demi-axes est

$$(AC - B^2)R^4 + (A + C)F_1 R^2 + F_1^2 = 0$$

avec

$$F_1 = \frac{AE^2 + CD^2 - 2BDE}{B^2 - AC} + F.$$

Dans le cas de l'hyperbole équilatère, $A + C = 0$, et l'on a

$$R^2 = \frac{F_1}{\sqrt{B^2 - AC}}.$$

Or, pour l'hyperbole (3), comme

$$A = 1, \qquad C = -1, \qquad B = \lambda,$$

$$D = -\frac{q\lambda}{2}, \qquad E = -\frac{p\lambda}{2}, \qquad \Gamma = -a^2,$$

on trouve

$$R^2 = \frac{2pq\lambda^3 + \lambda^2(q^2 - p^2 + 4a^2) + 4a^2}{4(\lambda^2+1)^{\frac{3}{2}}}.$$

En exprimant que $R = a$, on a l'équation

(12) $$[2pq\lambda^3 + \lambda^2(q^2 - p^2 + 4a^2) + 4a^2]^2 = 16a^4(\lambda^2+1)^3.$$

On aura le lieu des points (p, q), tels que l'hyperbole K soit égale à l'hyperbole H en éliminant α, β et λ entre les quatre équations (7), (8), (9) et (12).

L'élimination de α et β entre (7), (8) et (9) se fait au moyen du déterminant

$$\begin{vmatrix} 2 & -2\lambda & 2q+\lambda p \\ 2\lambda & 2 & 2p-\lambda q \\ q & -p & 2a^2 \end{vmatrix} = 0,$$

qui, développé, devient

(13) $$\lambda^2(q^2 - p^2 + 4a^2) - 6pq\lambda + 4a^2 + 2(p^2 - q^2) = 0.$$

Il reste à éliminer λ entre (12) et (13). Cette élimination, qui paraît, au premier abord, assez laborieuse, est rendue facile par l'artifice suivant.

L'équation (12) peut s'écrire

$$\lambda^2(p^2 - q^2 - 2pq\lambda) = 4a^2(\lambda^2+1)\left(1 - \sqrt{\lambda^2+1}\right).$$

Multiplions les deux membres par $1 + \sqrt{\lambda_2 + 1}$, il vient

(12)' $$\left(\sqrt{\lambda^2+1} + 1\right)(p^2 - q^2 - 2pq\lambda) = -4a^2(\lambda^2+1).$$

L'équation (13) peut aussi se transformer de la façon suivante

(13)' $$3(p^2 - q^2 - 2pq\lambda) = (p^2 - q^2 - 4a^2)(\lambda^2+1).$$

Entre (12)' et (13)', l'élimination de λ va se faire maintenant très facilement. Divisons ces deux équations membre à membre ; nous aurons

$$\frac{\sqrt{\lambda^2+1}+1}{3} = -\frac{4a^2}{p^2 - q^2 - 4a^2};$$

d'où

$$\lambda^2 = \frac{24a^2(p^2 - q^2 + 2a^2)}{(p^2 - q^2 - 4a^2)^2}.$$

En portant cette valeur dans (13), on obtient

$$[(p^2 - q^2)^2 - 14a^2(p^2 - q^2) - 32a^4]^2 \\ - 216a^2p^2q^2(p^2 - q^2 + 2a^2) = 0$$

et définitivement

$$(p^2 - q^2 + 2a^2) \\ \times [(p^2 - q^2 + 2a^2)(p^2 - q^2 - 16a^2 - 216a^2p^2q^2 = 0].$$

Le lieu se compose donc de l'hyperbole équilatère

$$p^2 - q^2 + 2a^2 = 0$$

et de la courbe du sixième degré

$$(p^2 - q^2 + 2a^2)(p^2 - q^2 - 16a^2)^2 - 216a^2p^2q^2 = 0,$$

qu'il est facile de construire.

N. B. — M. Reynès, ancien élève de l'École Centrale, nous a envoyé aussi une solution de la troisième Partie.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1890). SOLUTION DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES;

Par M. E. GROSSETÊTE,
Professeur au lycée de Nevers.

On donne deux droites xOx', yOy', *qui se coupent en un point* O, *et sur la première un point* A, *sur la seconde un point* B. *Une droite mobile rencontre* xOx' *en* M *et* yOy' *en* N, *et l'on suppose que*

la longueur MN *est égale à la somme ou à la valeur absolue de la différence des longueurs* AM *et* BN.

1° *Démontrer qu'il y a deux séries de droites qui satisfont à cette condition. Trouver combien on peut faire passer de ces droites par un point donné* P *du plan. Construire ces droites et distinguer parmi ces droites celles pour lesquelles la longueur* MN *est la somme des longueurs* AM *et* BN *de celles pour lesquelles elle en est la différence.*

2° *Soit* MN *une droite appartenant à l'une des deux séries; démontrer que le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle* OMN *est une conique qui a un foyer au point* O, *et que l'enveloppe du cercle circonscrit au triangle* OMN *est un cercle.*

1° Prenons pour Ox la direction OA et pour Oy la direction OB, et soit θ l'angle AOB. Désignons OM par ξ, ON par η, ξ étant positif dans la direction Ox, négatif dans la direction contraire, η étant positif dans la direction Oy et négatif dans la direction contraire. Soit encore $OA = a$, $OB = b$. On a, dans tous les cas,

$$\overline{AM} = \xi - a, \qquad \overline{BN} = \eta - b;$$

et, dans le triangle OMN,

$$\overline{MN}^2 = \overline{OM}^2 + \overline{ON}^2 - 2OM.ON\cos\theta,$$

MN étant égal à la somme, ou a la valeur absolue de la différence des longueurs AM et BN, on aura, dans tous les cas,

$$[\xi - a \pm(\eta - b)]^2 = \xi^2 + \eta^2 - 2\xi\eta\cos\theta$$

ou

$$(1) \qquad 2\xi\eta(\cos\theta \pm 1) - 2(\xi \pm \eta)(a \pm b) + (a \pm b)^2 = 0.$$

Les signes supérieurs doivent être pris simultanément; il en est de même des signes inférieurs. La relation pré-

cédente permet de conclure que les points M et N tracent sur Ox et Oy deux divisions homographiques. On peut donner à la relation (1) une autre forme. Posons

$$\overline{\mathrm{AM}} = x = \xi - a, \qquad \overline{\mathrm{BN}} = y = \eta - b.$$

ξ étant positif dans le sens Ox et négatif en sens contraire, η étant positif dans le sens Oy, on obtient

$$(2)\quad 2xy(\cos\theta \pm 1) = 2x(a - b\cos\theta) + 2y(b - a\cos\theta) + l^2,$$

en posant

$$\overline{\mathrm{AB}}^2 = l^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta.$$

Considérons les deux divisions homographiques tracées sur Ox et Oy et définies par la relation

$$(3)\quad 2xy(\cos\theta + 1) = 2x(a - b\cos\theta) + 2y(b - a\cos\theta) + l^2.$$

Soit M un point de x'Ox correspondant à une valeur de x, la valeur correspondante de y déterminera sur y'Oy un point N. Deux cas peuvent se présenter :

1° La valeur de y est de même signe que celle de x, alors la droite MN est telle que sa longueur est égale à $\overline{\mathrm{AM}} + \overline{\mathrm{BM}}$;

2° La valeur de y est de signe contraire à x; MN est telle que sa longueur est égale à la valeur absolue de la différence $\overline{\mathrm{AM}} - \overline{\mathrm{BN}}$.

Considérons en second lieu les deux divisions homographiques tracées sur Ox et Oy et définies par la relation

$$(3')\quad 2xy(\cos\theta - 1) = 2x(a - b\cos\theta) + 2y(b - a\cos\theta) + l^2.$$

A un point M de x'Ox correspondant à la valeur x répond un point N sur y'Oy déterminé par (3').

1° La valeur de y est de même signe que celle de x;

alors la droite MN est telle que sa longueur est égale à la valeur absolue de la différence $\overline{AM} - \overline{BN}$;

2° La valeur de y est de signe contraire à x; MN est telle que sa longueur est la valeur absolue de la somme $\overline{AM} + \overline{BN}$.

Voyons combien on peut faire passer de ces droites par un point P du plan. Considérons les deux divisions homographiques définies sur OA et OB par la relation

$$(3)\quad 2xy(\cos\theta + 1) = 2x(a - b\cos\theta) + 2y(b - a\cos\theta) + l^2.$$

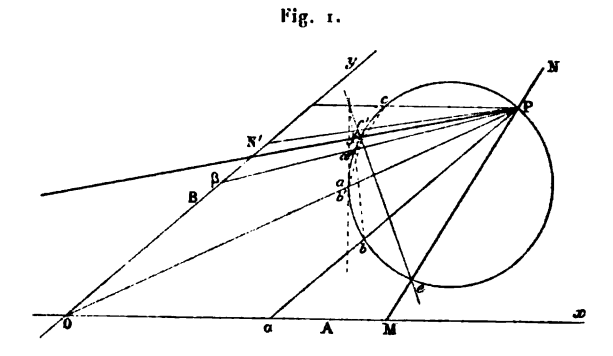
Si l'on joint le point P aux points de ces deux divisions, on obtient deux faisceaux homographiques de même sommet. Les droites doubles de ces faisceaux sont les droites telles que MN qu'on peut faire passer par le point P. En général, il y a deux droites réelles passant par le point P et correspondant à la formule (3). La formule (3') en donnerait deux autres. Construisons les droites passant par le point P et correspondant à la formule (3) ou à la formule

$$(1')\quad 2\xi\eta(\cos\theta + 1) - 2(\xi + \eta)(a + b) + (a + b)^2 = 0.$$

Pour cela, déterminons sur Ox et Oy trois couples de points homologues : au point O, considéré comme appartenant à Oy, correspond sur Ox un point α (*fig.* 1) situé à une distance de O égale à $\frac{a+b}{2}$; de même, au point O de Ox correspond, sur Oy, un point β situé à une distance de O égale aussi à $\frac{a+b}{2}$; au point à l'infini sur Ox correspond, sur Oy, un point situé à une distance de O égale à $\frac{a+b}{1+\cos\theta}$. En joignant P à ces trois couples de points homologues, on obtient trois couples de rayons homologues des deux faisceaux homogra-

phiques. Si l'on fait passer une circonférence par le point P, elle coupera les rayons homologues en (a, a'), (b, b'), (c, c'). Les droites $a'b$, ab' d'une part, et

Fig. 1.



(ac') et $(a'c)$ se couperont en deux points. La droite qui joindra ces deux points pourra rencontrer la circonférence en deux points e, f; les droites Pe, Pf seront les rayons doubles cherchés. On trouve PM et PN'. L'un d'eux PN est une droite de la première série, puisque AM et BN sont de même signe, l'autre PN' est de la seconde série puisque BN' et AM' sont de signes contraires. On verrait de la même manière la construction et la situation des rayons doubles correspondants à la relation (3').

Soit MN une droite appartenant à l'une des séries, et C un cercle circonscrit au triangle OMN; cherchons le lieu du centre C de ce cercle. Prenons la figure polaire réciproque du cercle C par rapport à un cercle directeur ayant O pour centre et 1 pour rayon. C, passant par le centre O du cercle directeur, aura pour figure polaire réciproque une parabole ayant pour foyer O et pour directrice la polaire $\varphi\varphi'$ du centre C par rapport au cercle directeur; au point M du cercle C corres-

pond une tangente à la parabole, la polaire de M par rapport au cercle directeur; elle passe par un point μ de OM, tel que, si l'on désigne $O\mu$ par x_1, on a

$$\xi x_1 = 1.$$

Le symétrique de O, par rapport à cette tangente, est le point φ, où OA rencontre la directrice de la parabole. Soit $O\varphi = x'$, on aura

$$x' = 2x_1;$$

donc ξ et x' sont liés par la relation

$$\xi x' = 2.$$

De même, en appelant y_1 la distance de l'origine O à la polaire ν de N et par y' la distance $O\varphi'$ de O au point où la directrice rencontre $y'Oy$, on aura

$$\eta y_1 = 1 \quad \text{et} \quad y' = 2y_1;$$

donc

$$\eta y'' = 2.$$

Or ξ et η vérifient la condition

$$2\xi\eta(\cos\theta \pm 1) - 2(\xi \pm \eta)(a \pm b) + (a \pm b)^2 = 0;$$

donc on aura, entre x' et y', la relation

$$(4) \quad \left(\frac{a \pm b}{4}\right)^2 x'y' - (y' \pm x')(a \pm b) + 2(\cos\theta \pm 1) = 0,$$

ce qui prouve que la directrice de la parabole trace sur deux droites fixes, Ox, Oy, deux divisions homographiques; par suite, la directrice enveloppe une conique. Cette conique est un cercle. En effet, considérons la directrice $\varphi\varphi'$ qui trace sur $x'Ox$, $y'Oy$ des divisions homographiques définies par

$$(4') \quad \left(\frac{a + b}{4}\right)^2 x'y' - (x' + y')(a + b) + 2(\cos\theta + 1) = 0.$$

Les valeurs de x', y' correspondantes aux points de contact de la conique avec Ox et Oy sont

$$O\alpha = \alpha = \frac{2(\cos\theta + 1)}{a+b},$$

$$O\beta = \beta = \frac{2(\cos\theta + 1)}{a+b}.$$

Ces points sont à égale distance de O. Si la conique est un cercle, le point de contact γ de $\varphi\varphi'$ avec ce cercle doit être tel que

$$\varphi\gamma = \varphi\alpha, \qquad \varphi'\gamma = \varphi'\beta.$$

Par suite, $\varphi\varphi' = \alpha\varphi + \beta\varphi'$; et réciproquement, si cette condition est remplie, les droites $\varphi\varphi'$ restent à une distance constante du point ω, intersection des perpendiculaires $\alpha\omega$ et $\beta\omega$ à Ox et Oy. Or

$$\overline{\alpha\varphi} = x' - \alpha = \left[x' - \frac{2(\cos\theta + 1)}{a+b}\right],$$

$$\overline{\beta\varphi'} = y' - \beta = \left[y' - \frac{2(\cos\theta + 1)}{a+b}\right].$$

Si la conique est un cercle, on devra avoir

$$\overline{\varphi\varphi'} = \overline{\alpha\varphi} + \overline{\beta\varphi'},$$

$$\left[x' + y' - \frac{4(\cos\theta + 1)}{a+b}\right]^2 = x'^2 + y'^2 - 2x'y'\cos\theta$$

ou

$$\left(\frac{a+b}{a}\right)^2 x'y' - (x' + y'(a+b) + 2(\cos\theta + 1) = 0,$$

qui n'est autre chose que la relation (4') à laquelle satisfont x' et y'; donc $\varphi\varphi'$ enveloppe un cercle.

On verrait de la même manière que $\varphi\varphi'$ enveloppe un cercle lorsqu'on considère la deuxième relation qu'on déduit de (4).

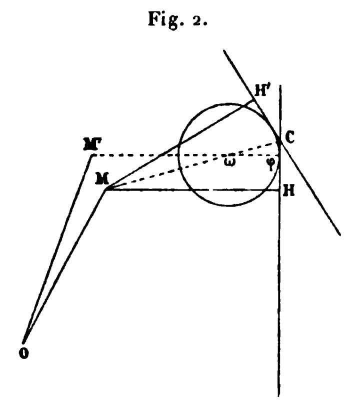
Si donc on prend la figure polaire réciproque de ce

cercle par rapport au cercle directeur de centre O, à l'enveloppe da la directrice correspondra le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle OMN. Ce lieu est donc une conique ayant pour foyer le point O et pour directrice la polaire de ω, c'est-à-dire nne perpendiculaire sur la bissectrice Oω de l'angle des axes.

Cela posé, pour avoir l'enveloppe du cercle circonscrit au triangle OMN, il suffit de chercher sur la figure polaire réciproque, l'enveloppe des paraboles ayant même foyer et telles que la directrice soit constamment tangente à un cercle.

Considérons alors deux paraboles voisines ayant pour foyer O (*fig.* 2) et pour directrices deux tangentes au cercle ω. Soit M un point d'intersection; ce point est tel que MO = MH = MH′, MH et MH′ étant les distances

Fig. 2.



de M aux deux directrices. Si l'on suppose que la seconde parabole se rapproche de plus en plus de la première, le point de contact φ de la directrice φH avec le cercle ω sera la limite du point d'intersection C des deux directrices, car les directrices enveloppent le cercle ω. Lorsque les deux directrices se rapprochent,

l'angle diminue de plus en plus; alors MH' tend vers la même limite que MH; or MH tend à devenir la perpendiculaire menée par le point φ à CH; cette droite passera par ω, ce qu'on pouvait du reste prévoir ([1]), et le point M tendra vers une position limite M', telle que $M'\varphi = M'O$. Or $M'\varphi$ est la distance du point M' à la circonférence ω. On peut donc dire que le lieu du point M' est le lieu géométrique des points tels que leur distance à un point fixe et à une circonférence fixe est la même. On sait que ce lieu est une conique ayant pour foyer le point fixe O. L'enveloppe des paraboles est donc une conique ayant pour foyer le point O.

Si maintenant on prend la figure polaire réciproque de cette conique, on trouve un cercle; donc les cercles circonscrits au triangle OMN enveloppent un cercle.

C. Q. F D.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1890).

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE DE LA QUESTION DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES;

PAR M. MAURICE LIROUX,
Élève au lycée de Lille.

On donne un triangle ABC *et un point* P *dans son plan.*

Trouver le lieu des centres des coniques S *inscrites dans le triangle* ABC *et vues du point* P *sous un angle droit.*

([1]) M est toujours situé sur la bissectrice de l'angle HCH', laquelle passe par le centre ω.

Démontrer que les coniques sont vues sous un angle droit d'un autre point P′; *montrer que, si* P *se déplace, la droite* PP′ *passe par un point fixe* I *et que le produit* IP.IP′ *est constant.*

La démonstration géométrique de cette question repose tout entière sur la proposition suivante : *Les cercles de Monge relatifs aux coniques inscrites dans un quadrilatère ont même axe radical,* et sur ce théorème de Steiner : *Les directrices des paraboles inscrites dans un triangle passent par le point de concours des hauteurs du triangle.*

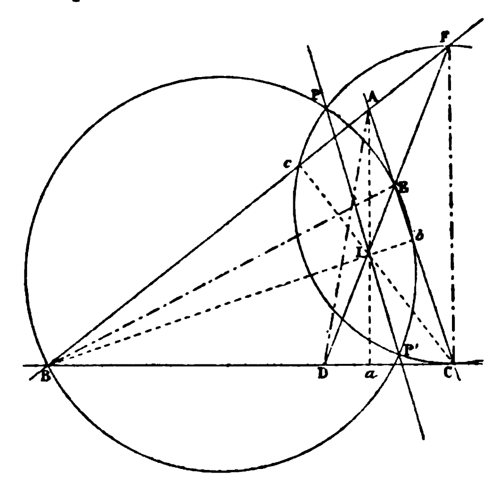
Transformons par polaires réciproques en prenant le point P pour pôle.

Les coniques, vues du point P sous un angle droit, se transforment en des hyperboles équilatères circonscrites à un triangle; d'après un théorème connu, ces hyperboles passent par un quatrième point fixe; donc les coniques, dont elles sont les transformées, sont tangentes à une quatrième droite fixe : elles sont donc inscrites dans un quadrilatère.

Si nous considérons les cercles de Monge relatifs à ces coniques, ils ont, d'après le premier théorème rappelé, même axe radical; et, comme les diagonales du quadrilatère sont des coniques indéfiniment aplaties, leurs cercles de Monge sont les cercles décrits sur elles comme diamètres; ces cercles se coupant en un point P se couperont en un autre point P′ fixe : c'est le second point cherché.

Si nous remarquons que le centre du cercle de Monge coïncide avec le centre de la conique, nous voyons que, pour obtenir le lieu des centres des coniques, il suffit d'élever, par le milieu de PP′, la droite perpendiculaire à PP′.

Aux quatre droites du quadrilatère, joignons la droite de l'infini : il n'y a qu'une conique qui est inscrite dans ces cinq droites ; donc une seule parabole pour chaque position du point P.



Or le point P est un point de la directrice de cette parabole, le point P' en est un autre; donc PP' qui est la directrice passera, en vertu du théorème de Steiner, par le point de concours des hauteurs des quatre triangles que l'on peut former avec le quadrilatère, et, en particulier, du triangle ABC.

Supposons tracée la quatrième droite DEF du quadrilatère; considérons les cercles décrits sur les diagonales BE et CF comme diamètres : ils passent par P, P' et par le pied d'une hauteur.

Or, le cercle décrit sur BE comme diamètre, donne

$$\text{PI}.\text{PI}' = \text{BI}.b\text{I} = \text{const.}$$

Remarque. — La démonstration précédente donne le moyen de construire la quatrième droite du quadrilatère. Faisons passer un cercle par le point P, par un

sommet B du triangle et par le pied *b* de la hauteur correspondante; ce cercle coupera le côté AC en un second point E qui appartient à la droite cherchée; on agira de même avec une autre hauteur du triangle et l'on joindra les deux points obtenus.

NOTE SUR LA QUESTION PRÉCÉDENTE;

PAR M. LEMAIRE.

Soit le triangle ABC, P un point de son plan, S une conique inscrite dans le triangle et vue du point P sous un angle droit $\widehat{DPE}$. Joignons PC; soit C_1 le point ou la perpendiculaire en P à cette droite coupe AB, et C_1B_1 la seconde tangente issue de C_1 à la conique.

Les trois couples de droites (PD, PE), (PC, PC_1), (PB, PB_1) forment une involution; les rayons de deux couples, étant rectangulaires, il en est de même des rayons PB et PB_1 du troisième couple. L'angle $\widehat{PBP_1}$ est donc droit, et la droite B_1C_1 fixe; cette droite passe d'ailleurs par le point A_1 de BC, tel que $\widehat{APA_1}$ soit droit.

Les coniques S sont donc inscrites dans un quadrilatère fixe.

Le lieu de leurs centres est, d'après le théorème de Newton, la droite qui joint les milieux des diagonales AA_1, BB_1, CC_1 de ce quadrilatère.

P est l'un des deux points communs aux cercles décrits sur ces diagonales comme diamètres.

L'autre point P', commun à ces cercles, jouit de la même propriété que P.

En effet, les tangentes menées de P' à la conique S

forment, avec les deux couples de droites $(P'B, P'B_1)$ et $(P'C, P'C_1)$, une involution; les rayons de ces deux couples étant rectangulaires, il en est de même des rayons du troisième, c'est-à-dire des tangentes à S issues de P'.

Il est aisé de voir que, si P se déplace dans le plan du triangle, PP' passe par un point fixe.

En effet, soit B' le point commun au cercle BPB_1 et à AC, et C' le point commun au cercle CPC_1 et à AB.

BB' et CC' sont hauteurs du triangle ABC; soit I leur point commun.

BC' et B'C étant antiparallèles par rapport à l'angle I, on a

$$IB.IB' = IC.IC'.$$

Par conséquent I est sur l'axe radical des deux cercles.

Aussi PP' passe par le point de rencontre des hauteurs du triangle ABC.

On a d'ailleurs

$$IP.IP' = IB.IB' = \text{const.}$$

Si P décrit une courbe, P' décrira une transformée de cette courbe par rayons vecteurs réciproques.

Transformons la figure par polaires réciproques en prenant pour cercle directeur un cercle quelconque O.

Les coniques S se transforment en coniques S_1 passant par trois points fixes et déterminant sur une droite fixe P_1 un segment vu d'un point fixe O sous un angle droit.

Nous voyons donc que :

1° Les coniques S_1 passent par un quatrième point fixe.

2° Il existe une seconde droite P'_1 telle que les segments déterminés sur elle par les coniques S_1 soient vus de O sous un angle droit.

3° Si la droite P_1 se déplace, le point de rencontre de P_1 et de P'_1 décrit une droite fixe.

Remarque. — Si la droite P_1 est la droite de l'infini du plan, les coniques S_1 ne sont autre chose que les hyperboles équilatères passant par trois points fixes.

On retrouve la propriété de ces hyperboles de passer par un quatrième point fixe.

REMARQUES SUR LE MÊME PROBLÈME ;

Par M. MARCHAND,
Professeur au lycée de Versailles.

I.

La méthode des caractéristiques de Chasles permet de retrouver tous les résultats géométriquement et de se rendre compte du degré de difficulté de quelques-uns des problèmes les plus simples que l'on peut se proposer sur les coniques S. Je m'appuierai sur ces résultats connus : « Lorsque, dans un système de coniques satisfaisant à quatre conditions, il y a μ coniques qui passent par un point donné, et ν qui touchent une droite donnée, on dit que μ et ν sont les caractéristiques du système. Le lieu du pôle d'une droite donnée par rapport à un système dont les caractéristiques sont μ et ν est une courbe de l'ordre ν. Si l'on examine, en effet, en combien de points ce lieu peut couper la droite donnée, on voit qu'il ne peut la rencontrer qu'autant que cette droite contient son pôle, c'est-à-dire qu'autant que cette droite est tangente à l'une des coniques du système; et comme, par hypothèse, ce contact ne peut se produire que dans ν cas, le lieu est du degré ν. » (G. Salmon, *Sections coniques;* 2e édition, p. 670 et 671.)

On est ramené à déterminer la caractéristique ν des coniques S. Si l'angle ω est quelconque, il suffit de chercher combien il y a de coniques tangentes à une droite quelconque PQ passant par le point P. On voit qu'il y en a deux, tangentes respectivement à BC, CA, AB, PQ et à l'une des deux droites passant par P et faisant un angle ω avec PQ. La caractéristique est 2; le lieu du centre est une conique S. On trouve aussitôt six points de cette conique, savoir les six points de rencontre avec les trois côtés du triangle DEF obtenu en joignant les milieux des côtés du triangle ABC. En effet, une conique S ne peut se réduire à deux points que si l'un de ses points est un des sommets du triangle ABC, par exemple A; en joignant alors PA et menant par P les deux droites qui font un angle ω avec PA de part et d'autre, on obtiendra deux points A_1 et A_2 situés sur BC, et chacun d'eux associé avec A donnera une conique satisfaisant aux conditions de l'énoncé. Les intersections de AA_1 et de AA_2 avec EF sont deux points du lieu.

Si l'angle est droit, les deux droites faisant de part et d'autre un angle droit avec PQ se confondent. La caractéristique est 1; le lieu du centre est une droite Δ; on construit, comme il a été dit précédemment, ses intersections avec les trois côtés du triangle DEF.

Enfin, si l'angle ω devient nul, on est ramené au lieu des centres des coniques inscrites à ABC et passant par P. Il semble qu'il n'y ait qu'une conique inscrite au triangle ABC et tangente à une droite PQ en P; mais ici encore la caractéristique reste égale à deux, comme on le voit en prenant au lieu de PQ une droite quelconque H ne passant pas par P; il y a en effet deux coniques tangentes à quatre droites BC, CA, AB, H et passant par un point donné P. Considérant l'angle nul comme la limite d'un angle ω quelconque, on voit que

les deux points de rencontre du lieu du centre avec EF viennent se confondre au point de rencontre de PA et de EF. Donc le lieu Γ du centre relatif à un angle nul est une conique inscrite au triangle DEF, qui se trouve déterminée par trois points et les trois tangentes en ces points.

Il est maintenant facile d'établir que toutes les coniques Σ lieux des centres sont bitangentes entre elles. En effet, appelons I et J les points circulaires; la droite PI faisant avec elle-même un angle indéterminé, le centre de la conique inscrite à ABC et tangente en P à PI appartiendra au lieu géométrique, quel que soit ω; de même pour PJ. Toutes les coniques Σ ont donc deux points communs et ces points sont nécessairement imaginaires; en effet, si le centre O de la conique ABCPI était réel, la conique aurait plus de quatre tangentes réelles, savoir : BC, CA, AB et les droites symétriques par rapport à O; elle serait réelle et le point de contact avec une tangente passant par I serait imaginaire, ce qui n'a pas lieu. Les coniques Σ ne peuvent avoir aucun autre point commun, car à un centre donné O correspond une seule conique inscrite à ABC, et par suite un angle ω bien déterminé. Alors deux coniques Σ étant deux coniques réelles qui n'ont en commun que deux points imaginaires conjugués sont nécessairement bitangentes, que l'angle soit quelconque, droit ou nul.

On peut dire que le lieu du centre est une conique bitangente à la conique fixe Γ aux points ou cette conique est rencontrée par la droite fixe Δ. La droite Δ et la conique Γ ont été déterminées, mais il est facile de déterminer plus complètement la conique Γ. Si l'on mène une droite K parallèle à AB et équidistante de AB et du point P, cette droite sera tangente à la conique Γ

et son point de contact avec Γ se déterminera facilement. En effet, pour que le centre d'une conique S soit sur la droite K, il faut que l'une des deux tangentes menées de P à S soit parallèle à AB; la seconde tangente sera l'une des deux droites qui passent par P et font avec AB des angles $+\omega$ et $-\omega$. A ces deux coniques correspondent deux centres situés sur K, qui se confondront en un seul lorsque l'angle ω deviendra nul, c'est-à-dire lorsque le lieu du centre sera la conique Γ. Donc Γ est tangente à K et le point de contact sera le centre d'une conique inscrite à ABC et tangente en P à une parallèle à AB; le cas particulier du théorème de Brianchon, relatif au quadrilatère circonscrit, donnera le point Q de contact avec AB; la droite QP rencontre K au point cherché. On a ainsi pour Γ six tangentes parallèles deux à deux avec leurs points de contact. On en tire aussitôt le centre, et, en appliquant la méthode de construction d'une conique par le théorème de Pascal, deux diamètres conjugués et, par suite, les axes.

Si le point P vient sur un des côtés du triangle ABC, sur BC pour préciser, on est ramené à trouver le lieu du centre des coniques de deux faisceaux tangentiels déterminés par BC, CA, AB et par les deux droites menées par P et faisant respectivement avec BC des angles $+\omega$ et $-\omega$. On a deux droites qui se confondent pour $\omega = 0$, de sorte que, la conique Γ se réduisant à une droite double, on peut toujours la considérer comme inscrite au triangle DEF.

II.

Il paraît bien facile de trouver la caractéristique μ : « $2\nu - \mu$ coniques du système se réduisent à un couple

de droites et $5\mu - \nu$ à un couple de points (SALMON, p. 673). » Comme on a trouvé facilement qu'il y avait six coniques S se réduisant à deux points, $2\mu - \nu = 6$; d'où $\mu = 4$. Pour $\omega = \frac{\pi}{2}$, $\mu = 2$.

Pour me limiter, je me bornerai à chercher le degré du lieu des foyers des coniques S lequel dépend seulement de la caractéristique ν. « L'ordre du lieu des foyers des coniques du système (μ, ν) est 3ν, et le lieu passe par des points I et J qui sont d'ordre ν (*voir* SALMON, pour la démonstration, p. 671). »

Lorsque l'angle ω est quelconque le lieu des foyers des coniques S est d'ordre $3\nu = 6$. Une courbe d'ordre 6 est, en général, déterminée par vingt-sept points; il est facile d'obtenir, dans le cas actuel, un nombre supérieur de points. On sait d'abord que I et J sont deux points doubles. On voit aussi, en considérant comme plus haut les deux coniques AA_1 et AA_2 réduites à deux points, que les points A_1 et A_2 appartiennent au lieu géométrique et que le point A est un point double. Les tangentes au point double A s'obtiennent facilement comme limite de ce théorème : « Les tangentes menées d'un point à une conique ont mêmes bissectrices que les droites qui joignent ce point aux deux foyers. » Considérant la conique AA_1 comme la limite d'une conique qui s'aplatit de manière à se réduire à une droite, on voit que la tangente AA' au point A au lieu du foyer doit faire avec AB le même angle que fait AA_1 avec AC, dans le sens convenable.

On a déjà cinq points doubles dont trois accompagnés de leurs tangentes, ce qui fait $15 + 6 = 21$ conditions; en outre, les six points A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, ce qui fait vingt-sept conditions.

Enfin, si l'on considère la conique inscrite à ABC et

tangente en P à PI, ses quatre foyers sont des points du lieu. De même, si l'on prend PJ, on aura quatre points du lieu, ce qui donnera en tout $27 + 8 = 35$ conditions.

Si l'on prend deux angles ω et ω' différents, on a deux courbes du sixième degré admettant en commun les cinq points doubles A, B, C, I, J ainsi que les huit points correspondant aux coniques ABC, PI et ABC, PJ. Ces courbes ne peuvent pas se rencontrer en un autre point Q, car toute conique, inscrite à ABC et admettant Q comme foyer, est déterminée par cinq tangentes et alors l'angle ω en résulte sans ambiguïté. Cela semble indiquer que les huit points communs donnés plus haut sont points de contact. En effet, deux courbes du sixième degré ont trente-six points communs et cinq points doubles, plus huit points simples avec leur tangente équivalant à $5 \times 4 + 2 \times 8 = 36$. Si $\omega = \omega'$, la démonstration semble indiquer que la courbe lieu des foyers ne peut admettre aucun point double en dehors de A, B, C, I, J.

On peut, comme dans la première question, déterminer les points de contact par les courbes particulières relatives à $\omega = 0$ et $\omega = \frac{\pi}{2}$.

Pour $\omega = 0$ le lieu est encore du sixième degré; mais A_1 et A_2 se confondant, le lieu admet BC comme tangente et, de plus, les deux tangentes au point double A se confondent. La courbe est tangente aux trois côtés du triangle ABC et admet les trois sommets du triangle comme points de rebroussement.

Pour $\omega = \frac{\pi}{2}$ le lieu s'abaisse au degré 3, puisque $\nu = 1$; on a une cubique passant par ABC, y admettant des tangentes déterminées et rencontrant en outre les trois

côtés du triangle ABC en trois points faciles à construire. Comme cette cubique passe par les points cycliques, elle est anallagmatique. Le raisonnement fait plus haut pour déterminer les points communs à deux lieux de foyers semble d'ailleurs établir qu'elle n'admet pas de point double, n'est jamais unicursale.

Enfin, si le point P vient sur un des côtés du triangle ABC, le lieu se décompose en deux points du troisième degré dont chacune est le lieu géométrique des foyers des coniques d'un faisceau tangentiel.

On obtiendrait une discussion du même genre en s'appuyant sur ce résultat connu : « Si l'on mène, d'un point fixe, toutes les tangentes possibles aux courbes d'un système (μ, ν), le lieu des points de contact de ces tangentes est une courbe de l'ordre $\mu + \nu$ ayant au point fixe un point multiple d'ordre μ. »

Il est à peine nécessaire de remarquer que, tout ce qui précède s'appliquant dès que $\nu = 2$, on obtiendrait de même le lieu des centres des coniques inscrites au triangle ABC et tangentes à deux rayons homologues de deux faisceaux homographiques ayant même centre P. Si les rayons doubles de l'homographie sont réels, on aura des coniques bitangentes en deux points réels; au cas de l'angle droit correspond le cas de l'involution. Quand les rayons doubles de l'homographie sont réels, ils peuvent devenir parallèles à un ou deux côtés du triangle ABC, l'un d'eux pouvant même passer par un des sommets du triangle.

Pour terminer, je me bornerai à la remarque suivante : au lieu de rendre réels les points doubles de l'homographie, on peut rendre imaginaires deux côtés du triangle ABC et l'on est amené à étudier ce problème : lieu des centres et des foyers des coniques S admettant un point A comme foyer et une droite BC comme tangente. Par

application du principe de correspondance de Chasles, on trouve facilement que le lieu du foyer devient alors une conique.

RÉALISATION ET USAGE DES FORMES IMAGINAIRES EN GÉOMÉTRIE.

Conférences données par M. Maximilien MARIE au Collège Stanislas, à Sainte-Barbe, à l'École Sainte-Geneviève et à l'École Monge ([1]).

26. *Détermination de la courbe la plus générale du troisième degré quarrable algébriquement.* — Les trois asymptotes de cette courbe doivent la couper chacune en trois points situés à l'infini, par conséquent elle doit avoir trois diamètres rectilignes, respectivement conjugués des cordes parallèles à ses trois asymptotes; ces diamètres seront, d'ailleurs, les médianes du triangle des asymptotes; la courbe doit, en outre, avoir un point double, lequel ne pourra se trouver qu'au point de rencontre des trois diamètres.

Son équation, rapportée à l'une des médianes, prise pour axe des x, au point double, pris pour origine, et à la parallèle à l'asymptote parallèle aux cordes conjuguées de l'axe des x, prise pour axe des y, est

$$y = \frac{ax}{3m}\sqrt{\frac{x+3m}{x-m}},$$

a désignant la moitié du côté du triangle des asymptotes qui est parallèle à l'axe des y, et m le tiers de la médiane correspondant à ce côté pris pour base.

([1]) *Voir* t. X, p. 172.

La quadratrice est

$$\frac{a}{6m}(x+3m)\sqrt{(x-m)(x+3m)}.$$

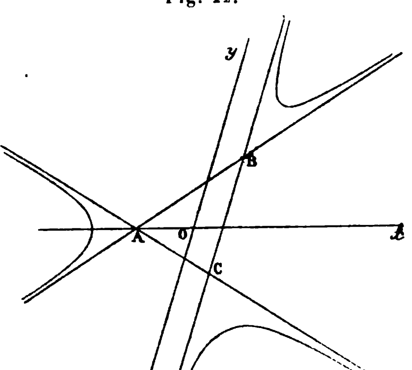
La courbe représentée par l'équation

$$y=\frac{ax}{3m}\sqrt{\frac{x+3m}{x-m}}$$

a la figure ci-jointe.

Je lui ai donné le nom de *trèfle,* à cause de sa forme : toutes ses conjuguées, qui sont du sixième degré, sauf

Fig. 22.



le folium de Descartes, sont également quarrables algébriquement. On savait depuis longtemps que le folium était quarrable algébriquement, mais on n'avait pas l'explication du fait. On vérifiera aisément que les trois asymptotes de cette courbe la coupent aussi chacune en trois points situés à l'infini; seulement deux d'entre elles sont imaginaires.

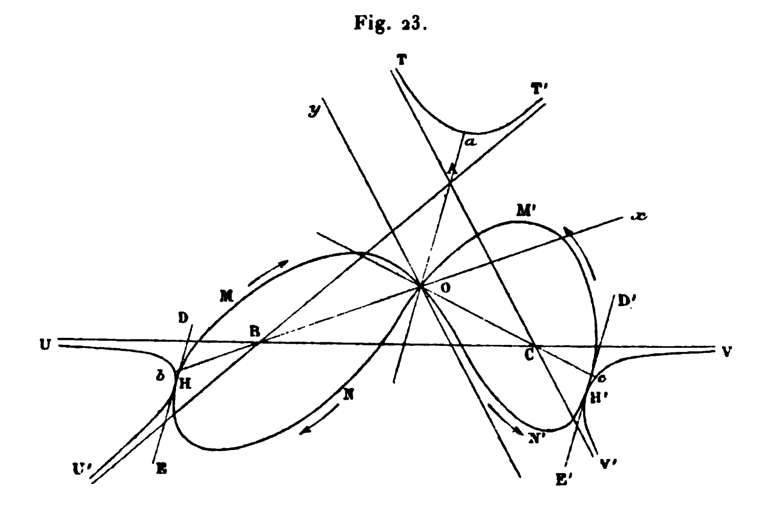
Cet exemple est très propre à faire toucher du doigt bien des choses que j'ai énoncées comme évidentes, parce qu'elles le sont en effet, mais qui paraissent avoir été peu comprises.

La démonstration, entre autres, de ce théorème que la formation d'un nouveau point double dans une courbe algébrique entraîne une réduction de deux unités dans le nombre des périodes de la quadratrice, cette démonstration d'un fait, pourtant si imprévu, n'a excité aucun intérêt, parce que l'analyse pure ne peut pas fournir, par elle-même, une notion exacte de la continuité et que les analystes cultivent généralement très peu la Géométrie.

Il est facile de montrer combien étaient mal fondées les préventions avec lesquelles ma démonstration a été reçue.

Menons au trèfle T*a*T'U*b*U'V*c*V' deux tangentes

Fig. 23.



parallèles DE, D'E', dont la direction soit celle d'une droite comprise dans l'intérieur de l'angle A, par exemple, du triangle BAC des asymptotes; une parallèle à ces deux tangentes et comprise entre elles ne coupera la courbe qu'en un seul point réel; les deux tangentes DE, D'E' comprendront donc entre elles une conjuguée

du trèfle; cette conjuguée sera fermée de toutes parts, ce qui était prévu, les trois asymptotes de la courbe réelle étant réelles. Soit C la caractéristique de cette conjuguée ou le coefficient angulaire commun de DE, D′E′; la conjuguée C passera au point double O; les éléments du lieu en ce point O seront fournis par l'équation

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \pm \frac{a}{3m}\sqrt{3}\sqrt{-1};$$

les coefficients angulaires des tangentes à la conjuguée C, au point O, seront donc, d'après une formule connue,

$$\pm \frac{a}{m\sqrt{3}} + \frac{\frac{2a^2}{3m^2}}{\mp \frac{a}{m\sqrt{3}} - C}.$$

En conséquence, les branches de la conjuguée considérée se couperont au point O sous un angle et elles formeront une boucle en forme de huit; cette conjuguée aura une forme telle que celle qu'indique la figure: si l'Algèbre entendait la continuité autrement que moi, si elle la comprenait, par exemple, comme l'ont comprise MM. Cauchy et Puiseux, dans leur théorie de la série de Taylor; ou si l'Algèbre considérait le chemin ONHMO comme fermé, sous le prétexte que le point mobile $[x, y]$, parti de O, serait revenu en O, c'est-à-dire que la fonction y et sa variable x seraient en même temps revenues à leurs valeurs initiales, mais sans que les dérivées initiales et finales de tous les ordres, de la fonction y, fussent les mêmes au départ et à l'arrivée, l'intégrale

$$\int \frac{ax}{3m}\sqrt{\frac{x+3m}{x-m}}$$

admettrait pour période le produit par $\sqrt{-1}$ de l'aire

de la boucle HMONH; elle admettrait de même pour période le produit par $\sqrt{-1}$ de l'aire de la boucle OM'H'N'O; mais, cette intégrale étant algébrique n'a pas de périodes; donc l'Algèbre entend la continuité comme je l'ai entendue partout dans la théorie de la série de Taylor, comme dans la théorie des intégrales.

Maintenant, pourquoi la quadratrice du trèfle est-elle algébrique, quoique ses conjuguées soient toutes fermées, sauf celles dont les cordes réelles sont parallèles aux trois directions asymptotiques et qui sont des foliums? C'est parce que les deux boucles de l'une quelconque d'entre elles, même des trois qui sont des foliums, entourent des aires égales, comme on le vérifierait aisément, puisqu'on a la formule de quadrature et que c'est le produit par $\sqrt{-1}$ de la différence de leurs aires qui forme la période; parce que la continuité exige que les deux boucles soient parcourues dans le sens indiqué par les flèches, ou dans le sens contraire.

Quant à la raison pour laquelle les deux aires ONHMO et ON'H'M'O sont égales, dans le cas actuel, elle est facile à donner : si l'on déformait infiniment peu la courbe, de manière, d'une part, à supprimer le point double, qui serait alors remplacé par un petit anneau réel, et, de l'autre, à faire en sorte que les trois asymptotes cessassent d'être d'inflexion, en premier lieu, la conjuguée ONHMON'H'M'O se segmenterait en deux anneaux séparés, compris, l'un entre la branche UU' et l'anneau réel, qui aurait remplacé le point double, l'autre compris entre ce même anneau réel et la branche VV'; en second lieu, les aires enveloppées par les deux anneaux de la conjuguée cesseraient d'être égales; mais, en troisième lieu, la quadratrice de la courbe ne comportant que deux périodes elliptiques, la différence des deux aires en question, lorsqu'elle réexisterait, ne pour-

rait être que l'aire correspondant à l'une des trois périodes cycliques.

La réapparition du point double, non accompagnée de l'annulation des trois périodes cycliques, aurait alors pour effets, d'abord, de réduire à néant la période elliptique réelle; en second lieu, de réduire à une seule apparence les deux figures de la période ultracyclique imaginaire; en troisième lieu, de supprimer, par soustraction, la partie commune, elliptique, des deux représentations de la période ultracyclique imaginaire; enfin de ne laisser subsister, à la place des deux figures de la période ultracyclique imaginaire, qu'une forme accessoire de l'une des périodes cycliques.

Sur la rectification des courbes planes.

Les intégrales rectificatrices de l'enveloppe réelle et de l'enveloppe imaginaire réalisée d'un même lieu ont les mêmes périodes, au facteur $\sqrt{-1}$ près.

La période réelle de la rectificatrice d'une hyperbole est la différence entre la longueur totale de cette hyperbole et la longueur totale de ses asymptotes (les extrémités ayant mêmes abscisses); la période imaginaire de la même rectificatrice est le produit par $\sqrt{-1}$ de la différence entre la longueur totale de l'hyperbole supplémentaire et la longueur totale des asymptotes communes.

Ces deux derniers théorèmes s'étendent aux courbes de tous les ordres, en y considérant les différents cycles fermés, composés de branches convenablement groupées des deux enveloppes et de leurs asymptotes communes.

Les démonstrations de ces théorèmes se trouvent dans

le Tome II de ma *Théorie des fonctions de variables imaginaires;* elles n'ont pas été données aux Conférences.

27. *Précis d'une théorie rationnelle des fonctions circulaires directes et inverses.* — Si l'on pose

$$S = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}},$$

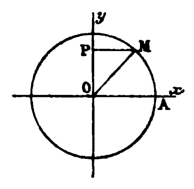
y sera par définition le sinus de S et S l'arc dont le sinus est y; $x = \sqrt{1-y^2}$ sera le cosinus de S et S l'arc dont le cosinus est $x = \sqrt{1-y^2}$; $\frac{y}{x}$ sera la tangente de S, $\frac{x}{y}$ en sera la cotangente, $\frac{1}{x}$ la sécante et $\frac{1}{y}$ la cosécante.

On aura évidemment

$$\sin^2 S + \cos^2 S = 1, \qquad \tang S = \frac{\sin S}{\cos S}, \qquad \ldots\ldots$$

x et y étant les coordonnées d'un point quelconque du cercle $x^2 + y^2 = 1$ ou de l'une de ses conjuguées, il sera

Fig. 24.



toujours facile, par la théorie des aires, de savoir ce que sera S, quand même x et y seraient imaginaires.

Supposons d'abord y réel et moindre que 1, x sera aussi réel et moindre que 1; le point $[x, y]$ appartien-

dra au cercle : soit M ce point,

$$\begin{aligned}\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} &= \int_0^y \frac{(1-y^2+y^2)\,dy}{\sqrt{1-y^2}}\\ &= \int_0^y \frac{y^2\,dy}{\sqrt{1-y^2}} + \int_0^y dy\sqrt{1-y^2}\\ &= -\int \frac{-y\,dy}{\sqrt{1-y^2}}\,y + \int_0^y dy\sqrt{1-y^2}\\ &= \left[-y\sqrt{1-y^2}\right]_0^y + 2\int_0^y dy\sqrt{1-y^2}\\ &= 2\,\text{aire OAMP} - 2\,\text{aire OPM}\\ &= 2\,\text{aire secteur AOM} + 2k\pi = S.\end{aligned}$$

Si y est imaginaire sans partie réelle, x sera réel et plus grand que 1, le point $[x, y]$ appartiendra à la conjuguée à abscisses réelles du cercle : soit M ce point, $2\int_0^y dy\sqrt{1-y^2}$ sera imaginaire sans partie réelle, et représentera le produit par $\sqrt{-1}$ de l'aire OAMP; d'un

Fig. 25.

autre côté, $-y\sqrt{1-y^2}$ représentera le double du produit par $\sqrt{-1}$ de l'aire du triangle OMP; par conséquent $\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$ ou S représentera le double du produit par $\sqrt{-1}$ de l'aire du secteur AOM, et l'on pourra y ajouter un nombre entier de fois 2π, parce que, avant de faire parcourir l'arc AM au point $[x, y]$, on pourra

lui faire parcourir, autant de fois que l'on voudra, la circonférence ABCDA, dans un sens ou dans l'autre.

Fig. 26.

Si y et x ont respectivement pour valeurs $\alpha' + \beta'\sqrt{-1}$ et $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, le point $[x, y]$ appartiendra à la conjuguée $C = \frac{\beta'}{\beta}$ du cercle : soit M ce point, α et α' seront les coordonnées du point N milieu de la corde réelle MNM' de la conjuguée, c'est-à-dire OQ et QN, β sera égal à $-$ NR et β' à $+$ RM, de sorte que x et y auront respectivement pour valeurs

$$x = \mathrm{OQ} - \mathrm{NR}\sqrt{-1},$$
$$y = \mathrm{QN} + \mathrm{RM}\sqrt{-1};$$

mais la figure donne les analogies

$$\frac{\mathrm{QN}}{\mathrm{BT}} = \frac{\mathrm{ON}}{\mathrm{OB}} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{RM}}{\mathrm{OT}} = \frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{OB}},$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{QN} = \sin(2\,\mathrm{AOB})\cos(2\,\mathrm{BOM}\sqrt{-1})$$

et

$$\mathrm{RM}\sqrt{-1} = \cos(2\,\mathrm{AOB})\sin(2\,\mathrm{BOM}\sqrt{-1});$$

d'où

$$y = \sin(2\,\mathrm{AOB})\cos(2\,\mathrm{BOM}\sqrt{-1}) + \cos(2\,\mathrm{AOB})\sin(2\,\mathrm{BOM}\sqrt{-1});$$

d'un autre côté, si l'on cherchait la valeur de $\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$, on trouverait

$$S = 2(\text{AOB} + \text{BOM}\sqrt{-1}) + 2k\pi;$$

on en conclut

$$\begin{aligned} y = \sin S = \quad & \sin(2\,\text{AOB} + 2\,\text{BOM}\sqrt{-1}) \\ = \quad & \sin(2\,\text{AOB})\cos(2\,\text{BOM}\sqrt{-1}) \\ & + \cos(2\,\text{AOB})\sin(2\,\text{BOM}\sqrt{-1}); \end{aligned}$$

on trouverait de même

$$\begin{aligned} x = \cos S = \quad & \cos(2\,\text{AOB} + 2\,\text{BOM}\sqrt{-1}) \\ = \quad & \cos(2\,\text{AOB})\cos(2\,\text{BOM}\sqrt{-1}) \\ & - \sin(2\,\text{AOB})\sin(2\,\text{BOM}\sqrt{-1}). \end{aligned}$$

La formule

$$S = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

donne

$$\frac{dS}{dy} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{\cos S},$$

d'où

$$\frac{dy}{dS} = D(\sin S) = \cos S;$$

d'un autre côté,

$$\frac{dS}{dx} = \frac{dS}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos S}\,\frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\cos S}\,\frac{-1}{\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}} = -\frac{1}{y} = -\frac{1}{\sin S},$$

d'où

$$\frac{dx}{dS} = D(\cos S) = -\sin S.$$

Il en résulte par la formule de Maclaurin

$$\sin S = S - \frac{S^3}{1.2.3} + \ldots,$$

$$\cos S = 1 - \frac{S^2}{1.2} + \ldots,$$

quel que soit S.

28. *Précis d'une théorie rationnelle des fonctions exponentielle et logarithmique.* — Si l'on pose

$$S = \int_1^x \frac{dx}{x},$$

S sera l'aire de l'hyperbole équilatère $y = \frac{1}{x}$, comptée du sommet A jusqu'à un point quelconque d'une conjuguée quelconque et s'appellera le *logarithme de x*.

Si $\varphi(x)$ désigne une fonction de x assujettie seulement à prendre la valeur 1 pour $x = 1$, on aura identiquement

$$\int_1^x \frac{dx}{x} + \int_1^x \frac{\varphi'(x)dx}{\varphi(x)} = \int_1^x \frac{\varphi(x)\,dx + x\,\varphi'(x)dx}{x\,\varphi(x)} = \int_1^x \frac{d[x\,\varphi(x)]}{x\,\varphi(x)},$$

c'est-à-dire

$$L(x) + L[\varphi(x)] = L[x\varphi(x)],$$

$\varphi(x)$ pouvant prendre une valeur quelconque lorsque x n'est pas égal à 1. On en conclut

$$L(ab) = L(a) + L(b),$$
$$L\left(\frac{a}{b}\right) = L(a) - L(b),$$
$$L(a^m) = m\,La,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Le demi-axe OA de l'hyperbole est $\sqrt{2}$; par conséquent, l'aire de la conjuguée circulaire est 2π et la période de l'intégrale $\int \frac{dx}{x}$ est $2\pi\sqrt{-1}$, c'est-à-dire que

$$\int_1^x \frac{dx}{x} = \int_A^M \frac{dx}{x} = \text{aire } a\,\text{AM}m + 2k\pi\sqrt{-1}$$
$$= L(x) + 2k\pi\sqrt{-1}.$$

Si M' désigne le point de l'hyperbole diamétralement

opposé à M,

$$\int_A^{M'} \frac{dx}{x} = \int_A^M \frac{dx}{x} + \int_M^{M'} \frac{dx}{x};$$

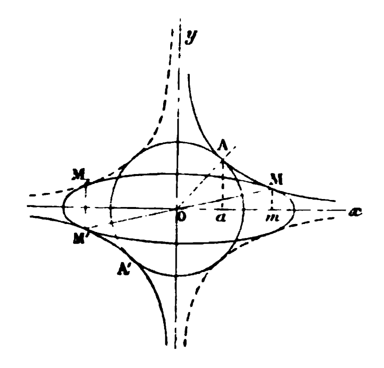
mais

$$\int_M^{M'} \frac{dx}{x} = -\pi\sqrt{-1},$$

par conséquent,

$$\int_1^{-x} \frac{dx}{x} = L(x) + (2k+1)\pi\sqrt{-1}.$$

Fig. 27.



Si M_1 désigne le point de l'hyperbole supplémentaire symétrique de M par rapport à l'axe des y,

$$\int_A^{M_1} \frac{dx}{x} = \int_A^M \frac{dx}{x} + \int_M^{M_1} \frac{dx}{x};$$

mais

$$\int_M^{M_1} \frac{dx}{x} = -\frac{\pi}{2}\sqrt{-1};$$

en effet, lorsque le point mobile

$$(x = \alpha + \beta\sqrt{-1},\ y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1})$$

parcourt la conjuguée C du lieu $xy = 1$, $\frac{\beta'}{\beta}$ conserve la

valeur C; mais

$$\alpha' + \beta'\sqrt{-1} = \frac{1}{\alpha + \beta\sqrt{-1}} = \frac{\alpha - \beta\sqrt{-1}}{\alpha^2 + \beta^2}$$
$$= \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} - \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}\sqrt{-1},$$

de sorte que

$$\beta' = -\frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2}$$

et que, par conséquent,

$$\frac{\beta'}{\beta} = -\frac{1}{\alpha^2 + \beta^2}$$

conserve une valeur constante C, ou que $\alpha d\alpha + \beta d\beta$ reste constamment nul. Il en résulte que

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{d\alpha + d\beta\sqrt{-1}}{\alpha + \beta\sqrt{-1}} = \int \frac{(\alpha - \beta\sqrt{-1})(d\alpha + d\beta\sqrt{-1})}{\alpha^2 + \beta^2}$$
$$= -C\int(\alpha\, d\alpha + \beta\, d\beta) - C\sqrt{-1}\int(\beta\, d\alpha + \alpha\, d\beta)$$

reste imaginaire sans partie réelle. Or la partie imaginaire de $\int_{M}^{M_1} \frac{dx}{x}$ est $-\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}$, car, l'ordonnée y du point M_1 de l'enveloppe imaginaire des conjuguées du lieu étant imaginaire sans partie réelle, l'expression $\frac{y^2}{2C}$ de l'aire du triangle à introduire à la limite M_1, pour rapporter le lieu au même axe des x et à une parallèle aux cordes réelles de la conjuguée MM_1, serait réelle.

Il en résulte

$$\int_1^{x\sqrt{-1}} \frac{dx}{x} = L(x) - (2k - \tfrac{1}{2})\pi\sqrt{-1},$$

et, de la même manière,

$$\int_1^{x\sqrt{-1}} \frac{dx}{x} = L(x) + (2k + \tfrac{1}{2})\pi\sqrt{-1}.$$

Comme S croît en progression arithmétique, lorsque x croît en progression géométrique et que, d'ailleurs, $\frac{dS}{dx} = \frac{1}{x}$ part de la valeur 1, lorsque $x = 1$ et $S = 0$, il en résulte que les deux progressions sont, pour x,

$$1 : (1 + \alpha) : (1 + \alpha)^2 : \ldots : (1 + \alpha)^n : \ldots,$$

et pour S,

$$0 . \alpha . 2\alpha . \ldots . n\alpha . \ldots,$$

α pouvant être réel ou imaginaire.

Si l'on veut déterminer la base du système, il faut supposer α réel et prendre $n\alpha = 1$, d'où $n = \frac{1}{\alpha}$ et la base est

$$(1 + \alpha)^n = (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.$$

Les logarithmes dont il s'agit dans ce qui précède sont donc les logarithmes népériens; et, en conséquence, on peut poser

$$x = e^S,$$

pourvu qu'il soit entendu que les exposants S se comporteront, dans toutes les opérations, comme s'ils étaient réels.

L'équation

$$S = \int_1^x \frac{dx}{x}$$

donne

$$\frac{dS}{dx} = \frac{1}{x},$$

d'où

$$\frac{dx}{dS} = x = e^S;$$

toutes les dérivées de x par rapport à S se réduisent donc à e^S, et ont la valeur 1, pour $S = 0$; il en résulte,

par la formule de Maclaurin,

$$e^{S} = 1 + \frac{S}{1} + \frac{S^2}{1.2} + \ldots$$

Remarque. — Il n'est pas étonnant que les fonctions circulaires, directes et inverses, se ramènent aux fonctions exponentielles et logarithmiques, puisque les unes ont leur origine dans la quadratrice du cercle et de ses conjuguées, qui sont des hyperboles équilatères, et les autres dans la quadratrice de l'hyperbole équilatère et de ses conjuguées, dont l'une est un cercle.

SUR LES FONCTIONS ELLIPTIQUES.

Le second Volume de ma *Théorie des fonctions de variables imaginaires* contient la théorie élémentaire des fonctions elliptiques, établie d'après les mêmes principes que les deux précédentes.

GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE.

Le temps n'a permis de traiter que bien imparfaitement les questions, analogues aux précédentes, que comporte la Géométrie à trois dimensions.

Nous ne ferons guère non plus, ici, qu'indiquer les solutions.

On trouvera les explications complémentaires qui seraient jugées utiles dans les deux premiers Volumes de la *Théorie des fonctions de variables imaginaires;* mais le lecteur pourrait toujours y suppléer aisément.

1. J'appelle conjuguées d'une surface représentée par une équation

$$f(x, y, z) = 0$$

les lieux des points

$$x_1 = \alpha + \beta, \quad y_1 = \alpha' + \beta', \quad z_1 = \alpha'' + \beta''$$

correspondant à toutes les solutions

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}, \quad z = \alpha'' + \beta''\sqrt{-1}$$

de l'équation proposée, où les parties imaginaires β, β' et β'' seraient comme des constantes

$$C, \quad C' \quad \text{et} \quad C'',$$

c'est-à-dire, telles que

$$\frac{\beta}{C} = \frac{\beta'}{C'} = \frac{\beta''}{C''}.$$

2. La situation dans l'espace du point $[x_1, y_1, z_1]$, qui représente une solution imaginaire, reste la même quelle que soit la transformation de coordonnées qu'on fasse subir au lieu considéré et, par suite, à la solution représentée.

En effet, si les formules de transformation, résolues par rapport aux nouvelles coordonnées, sont

$$\begin{aligned} x' &= a + mx + ny + pz, \\ y' &= a' + m'x + n'y + p'z, \\ z' &= a'' + m''x + n''y + p''z, \end{aligned}$$

les valeurs des nouvelles coordonnées x', y', z' qui correspondent à

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}, \quad z = \alpha'' + \beta''\sqrt{-1}$$

sont

$$\begin{aligned} x' &= a + m\alpha + n\alpha' + p\alpha'' + (m\beta + n\beta' + p\beta'')\sqrt{-1}, \\ y' &= a' + m'\alpha + n'\alpha' + p'\alpha'' + (m'\beta + n'\beta' + p'\beta'')\sqrt{-1}, \\ z' &= a'' + m''\alpha + n''\alpha' + p''\alpha'' + (m''\beta + n''\beta' + p''\beta'')\sqrt{-1}, \end{aligned}$$

de sorte que les coordonnées x_1, y_1, z_1 du point représentatif de la première solution étant

$$x_1 = \alpha + \beta, \qquad y_1 = \alpha' + \beta', \qquad z_1 = \alpha'' + \beta''$$

et les coordonnées x'_1, y'_1, z'_1 du point représentatif de la seconde solution étant

$$\begin{aligned} x'_1 &= a + m\,(\alpha + \beta) + n\,(\alpha' + \beta') + p\,(\alpha'' + \beta''), \\ y'_1 &= a' + m'(\alpha + \beta) + n'(\alpha' + \beta') + p'(\alpha'' + \beta''), \\ z'_1 &= a'' + m''(\alpha + \beta) + n''(\alpha' + \beta') + p''(\alpha'' + \beta'') \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} x'_1 &= a + m x_1 + n y_1 + p z_1, \\ y'_1 &= a' + m' x_1 + n' y_1 + p' z_1, \\ z'_1 &= a'' + m'' x_1 + n'' y_1 + p'' z_1, \end{aligned}$$

il est clair que les deux points (x_1, y_1, z_1) et (x'_1, y'_1, z_1) coïncident, puisque leurs coordonnées sont reliées entre elles par les formules de la transformation effectuée.

Le mode de construction adopté, pour obtenir les coordonnées du point représentatif d'une solution, est d'ailleurs le seul qui assure la fixité dans l'espace de ce point, puisque, par exemple, pour assurer la fixité du point dans l'espace, il faudrait, au moins, assurer celle de sa projection sur le plan des xy, si l'on ne faisait changer que les directions des axes des x et des y, dans l'ancien plan des xy et que, pour cela, il faudrait, d'après ce qu'on a vu en Géométrie plane, représenter la solution

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \qquad y = \alpha' + \beta'\sqrt{-1}$$

par le point

$$x_1 = \alpha + \beta, \qquad y_1 = \alpha' + \beta'.$$

3. Une droite réelle

$$\frac{x-d}{C} = \frac{y-d'}{C'} = \frac{z-d''}{C''}$$



n'est capable que de solutions du système [C, C', C″] ; de sorte que la conjuguée [C, C', C″] d'un lieu $f(x, y, z) = 0$ est le lieu des intersections idéales, réalisées, de ce lieu et de la suite des droites représentées par les équations $\frac{x-d}{C} = \frac{y-d'}{C'} = \frac{z-d''}{C''}$, où d, d' et d'' seraient variables à volonté.

Ces droites sont les *cordes réelles* de la conjuguée, elles joignent deux à deux ses points imaginaires conjugués.

4. En rendant l'un des axes de coordonnées parallèle aux cordes réelles d'une conjuguée, on rendrait en même temps réelles les deux autres coordonnées de tous ses points.

5. Il en résulte que, par un choix convenable d'axes, on peut toujours ramener l'ordonnée z, par exemple, d'une conjuguée à être une fonction de deux autres variables x et y, réelles.

6. Les conjuguées d'une surface réelle lui sont généralement inscrites ou circonscrites et la courbe de contact, pour chacune d'elles, est la courbe de contact avec la même surface réelle du cylindre qui lui serait circonscrit parallèlement aux cordes réelles de la conjuguée en question. Une surface réelle est donc l'enveloppe de ses conjuguées.

Les conjuguées d'un cône réel sont les cônes, de même sommet, ayant pour directrices, dans un plan quelconque, les conjuguées de la section du cône par ce plan.

Les conjuguées d'un cylindre réel sont les cylindres ayant pour directrices, dans un plan quelconque, les

conjuguées de la section du cylindre par ce plan et leurs génératrices parallèles à celles du cylindre proposé.

7. Les conjuguées des surfaces du second degré sont d'autres surfaces du second degré, aisées à définir dans tous les cas.

8. Les conjuguées d'un lieu $f(X, Y, Z) = 0$ ont généralement une seconde enveloppe imaginaire, lieu des points du lieu où les rapports deux à deux des trois dérivées partielles f'_x, f'_y, f'_z sont réels.

En effet, les éléments du lieu $f(X, Y, Z) = 0$ aux environs d'un de ses points (x, y, z) sont définis par l'équation

$$dz = \left(\frac{dz}{dx}\right) dx + \left(\frac{dz}{dy}\right) dy$$

ou

$$dz = -\frac{f'_x}{f'_z} dx - \frac{f'_y}{f'_z} dy,$$

c'est-à-dire

$$dz = (m + n\sqrt{-1})\, dx + (p + q\sqrt{-1})\, dy,$$

si $m + n\sqrt{-1}$ et $p + q\sqrt{-1}$ sont respectivement les valeurs de $-\frac{f'_x}{f'_z}$ et $\frac{f'_y}{f'_z}$, au point (x, y, z).

Si l'on fait

$$dx = d\alpha + d\beta\sqrt{-1},$$
$$dy = d\alpha' + d\beta'\sqrt{-1},$$
$$dz = d\alpha'' + d\beta''\sqrt{-1},$$

l'équation précédente donne

$$d\alpha'' = m\, d\alpha - n\, d\beta + p\, d\alpha' - q\, d\beta'$$

et

$$d\beta'' = m\, d\beta + n\, d\alpha + p\, d\beta' + q\, d\alpha';$$

d'où

$$d\alpha'' + d\beta'' = (m+n)\,d\alpha + (m-n)\,d\beta + (p+q)\,d\alpha' + (p-q)\,d\beta',$$

c'est-à-dire

$$dz_1 = \frac{(m+n)\,d\alpha + (m-n)\,d\beta}{d\alpha + d\beta}\,dx_1 + \frac{(p+q)\,d\alpha' + (p-q)\,d\beta'}{d\alpha' + d\beta'}\,dy_1$$

ou encore

$$dz_1 = \frac{m+n+(m-n)\dfrac{d\beta}{d\alpha}}{1+\dfrac{d\beta}{d\alpha}}\,dx_1 + \frac{p+q+(p-q)\dfrac{d\beta'}{d\alpha'}}{1+\dfrac{d\beta'}{d\alpha'}}\,dy_1.$$

Pour que le point $[x, y, z]$ appartînt à l'enveloppe des conjuguées, il faudrait que tous ces éléments fussent compris dans un même plan, qui serait le plan tangent à l'enveloppe au point $[x, y, z]$; pour cela, il faudrait que dz_1 ne dépendît que de dx_1 et de dy_1, et, par conséquent, fût indépendant de $\frac{d\beta}{d\alpha}$ et de $\frac{d\beta'}{d\alpha'}$. Cela exigerait les deux conditions

$$\frac{m+n}{1} = \frac{m-n}{1} \quad \text{et} \quad \frac{p+q}{1} = \frac{p-q}{1},$$

c'est-à-dire $n = 0$ et $q = 0$.

Ainsi, tout point de l'une ou l'autre enveloppe est nécessairement tel qu'en ce point

$$\frac{f'_x}{f'_z} \quad \text{et} \quad \frac{f'_y}{f'_z}$$

soient réels.

Mais chaque conjuguée ne touche l'enveloppe imaginaire qu'en quelques points et non plus suivant une courbe. En effet, les solutions des trois équations

$$f(x, y, z) = 0, \qquad \frac{f'_x}{f'_z} = \text{réel}, \qquad \frac{f'_y}{f'_z} = \text{réel},$$

où l'on ferait $x=\alpha+\beta C\sqrt{-1}$, $y=\alpha'+\beta C'\sqrt{-1}$, $z=\alpha''+\beta C''\sqrt{-1}$, seraient déterminées, puisque α, α', α'' et β seraient liés entre eux par quatre conditions.

Exemples. — L'enveloppe imaginaire des conjuguées ellipsoïdales d'un hyperboloïde à une nappe

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

est l'hyperboloïde à deux nappes supplémentaires

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,$$

lequel est fourni par les solutions de la forme

$$x=\beta\sqrt{-1}, \qquad y=\beta'\sqrt{-1}, \qquad z=\beta''\sqrt{-1}$$

de l'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

L'enveloppe imaginaire des conjuguées du lieu

$$(x-a-b\sqrt{-1})^2+(y-a'-b'\sqrt{-1})^2 + (z-a''-b''\sqrt{-1})^2=(r+r'\sqrt{-1})^2$$

est la sphère

$$(x-a-b)^2+(y-a'-b')^2+(z-a''-b'')^2=(r+r')^2.$$

9. Les conjuguées du lieu

$$(M+N\sqrt{-1})x+(P+Q\sqrt{-1})y + (R+S\sqrt{-1})z+D+E\sqrt{-1}=0$$

sont tous les plans qui passent par la droite représentée par les équations

$$Mx+Py+Rz+D=0 \qquad \text{et} \qquad Nx+Qy+Sz+E=0.$$

10. Un plan réel ne peut couper que les conjuguées dont les cordes réelles lui sont parallèles.

(*A suivre.*)

CONCOURS POUR LES BOURSES DE LICENCE (PARIS, 1889).

SOLUTION PAR M. LE CAPITAINE BARISIEN.

1° *Construire la courbe définie par l'équation*

$$y = \frac{(x^2 - x + 1)^3}{x^2(x-1)^2}, \tag{1}$$

2° *Si l'on coupe cette courbe par une parallèle à l'axe des x et si l'on désigne par a l'abscisse de l'un des points d'intersection, les abscisses des cinq autres points d'intersection seront*

$$\frac{1}{a}, \quad 1-a, \quad 1-\frac{1}{a}, \quad \frac{1}{1-a}, \quad \frac{a}{a-1}.$$

Distinguer sur la figure les points qui correspondent aux formules précédentes, en supposant que a soit la plus grande des abscisses des points d'intersection.

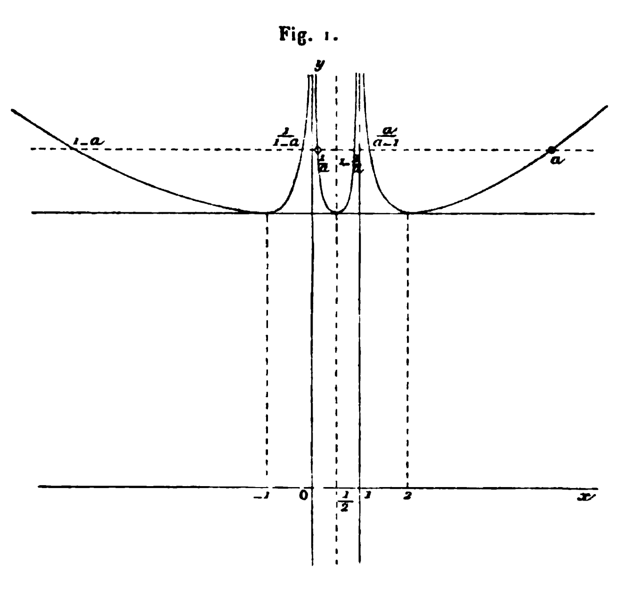
3° *La résolution de l'équation* (1), *où l'on regarde y comme un nombre donné et x comme l'inconnue, peut, de diverses manières, être ramenée à la résolution d'une équation du troisième degré et d'une équation du second degré.*

4° *Lieu de la projection du point d'intersection des tangentes à la courbe* (1), *en des points dont les abscisses sont inverses l'une de l'autre, sur la droite qui joint ces deux points.*

I. La courbe représentée par l'équation (1) est symétrique par rapport à la droite $x = \frac{1}{2}$. Elle a pour asymptotes les droites $x = 0$ et $x = 1$ et deux branches paraboliques : elle est située tout entière au-dessus de

la droite $y = \frac{27}{4}$ et a trois points de contact avec cette droite (*fig.* 1).

Fig. 1.



II. On remarque que la valeur y de (1) ne change pas lorsqu'on change x en $\frac{1}{x}$ ou en $1 - x$, ou en $1 - \frac{1}{x}$ et aussi en leurs inverses $\frac{1}{1-x}$, $\frac{x}{x-1}$; ce qui indique bien que, si l'une des abscisses d'intersection par une parallèle à l'axe des x est a, les autres sont

$$\frac{1}{a}, \quad 1 - a, \quad 1 - \frac{1}{a}, \quad \frac{1}{1-a}, \quad \frac{a}{a-1}.$$

Si a est la plus grande abscisse de ces points d'intersection, c'est forcément la valeur positive la plus grande. Donc $\frac{1}{a}$ est la plus petite valeur positive, $\left(1 - \frac{1}{a}\right)$ est la deuxième valeur positive, $\frac{a}{a-1}$ la troisième. La plus

grande valeur négative est $(1 - a)$ et la plus petite est $\frac{1}{1-a}$.

III. Ces abscisses d'intersection, étant deux à deux inverses l'une de l'autre, montrent que l'équation (1), du sixième degré en x, doit être réciproque.

En effet, si l'on écrit l'équation (1) sous la forme

$$(2) \qquad yx^2(x^2 + 1 - 2x) = [(x^2 + 1) - x]^3,$$

et si l'on pose

$$x + \frac{1}{x} = z,$$

d'où

$$(3) \qquad x^2 + 1 = zx,$$

en portant cette valeur de $(x^2 + 1)$ dans (2), on en déduit

$$(4) \qquad (z - 1)^3 - y(z - 2) = 0.$$

On est donc ramené à la résolution de l'équation du troisième degré (4) et à celle du deuxième degré (3).

Un autre moyen d'arriver à ce résultat consiste à poser

$$(5) \qquad x(x - 1) = t;$$

(1) devient alors

$$(6) \qquad (t + 1)^3 - yt^2 = 0,$$

et l'on a à résoudre (6), puis (5).

On peut aussi poser

$$(7) \qquad x(x - 1) = \frac{1}{u}.$$

Il faut alors résoudre l'équation du troisième degré

$$(u + 1)^3 - uy = 0.$$

IV. D'après ce que nous avons vu précédemment, la droite joignant deux points tels que les abscisses soient réciproques ne peut être qu'une parallèle à l'axe des x.

Il suffit donc de chercher les tangentes relatives aux points ayant pour abscisses a et $\frac{1}{a}$.

Le coefficient angulaire de la tangente à la courbe (1) est

$$\frac{(2x-1)(x^2-x+1)^2(x-2)(x+1)}{x^3(x-1)^3}.$$

L'équation de la tangente au point dont les coordonnées sont

$$x = a, \qquad y = \frac{(a^2-a+1)^3}{a^2(a-1)^2}$$

est donc

$$(8)\quad \begin{cases} Y - \dfrac{(a^2-a+1)^3}{a^2(a-1)^2} \\ \quad = \dfrac{(a^2-a+1)^2(2a-1)(a-2)(a+1)}{a^3(a-1)^3}(X-a). \end{cases}$$

Celle de la tangente au point ayant pour abscisse $\frac{1}{a}$ est

$$(9)\quad \begin{cases} Y - \dfrac{(a^2-a+1)^3}{a^2(a-1)^2} \\ \quad = -\dfrac{(a^2-a+1)^2(2a-1)(a-2)(a+1)}{a(a-1)^3}\left(X-\dfrac{1}{a}\right). \end{cases}$$

En retranchant (8) et (9), on obtient

$$(10)\qquad X = \frac{2a}{a^2+1}.$$

Pour avoir le lieu demandé, il suffit d'éliminer a entre (10) et

$$(11)\qquad Y = \frac{(a^2-a+1)^3}{a^2(a-1)^2}.$$

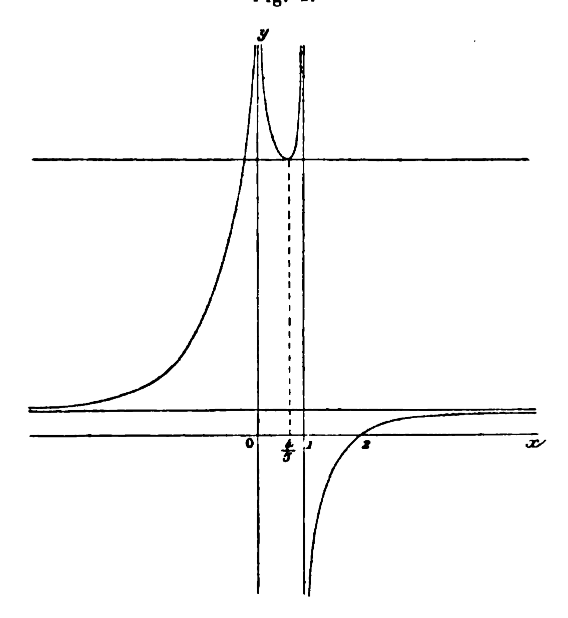
De (10), on tire

$$a^2 + 1 = \frac{2a}{X}.$$

En portant dans (11), il vient pour l'équation du lieu

$$Y = \frac{(X-2)^3}{2X^2(X-1)}.$$

Fig. 2.



C'est une courbe du quatrième degré ayant pour asymptotes les trois droites

$$X = 0, \qquad X = 1, \qquad Y = \tfrac{1}{2}.$$

Elle est dessinée sur la *fig.* 2.

TANGENTES COMMUNES A DEUX CONIQUES;

PAR M. J.-S. COLLIN,
Ancien élève de l'École Polytechnique,
Professeur à l'École Albert-le-Grand (Arcueil).

La recherche des tangentes communes à deux coniques se fait habituellement par l'emploi des coordonnées tangentielles (SALMON, *Géométrie analytique*, traduction Resal, p. 485, et PICQUET, *Géométrie analytique*, p. 458 et 509); nous allons l'exposer d'une manière plus élémentaire en faisant intervenir uniquement l'équation aux coefficients angulaires des tangentes.

Soient donc les deux coniques

$$f(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$
$$f_1(x,y) = A_1x^2 + 2B_1xy + C_1y^2 + 2D_1x + 2E_1y + F_1 = 0,$$

et désignons par φ et φ_1 les parties homogènes du second degré de f et f_1, et par $f'_x, f'_{1x}, \ldots$, les *demi*-dérivées.

PROBLÈME I. — *Trouver l'équation des tangentes communes aux deux coniques* $f = 0$ et $f_1 = 0$.

Cela revient *évidemment* à trouver le lieu des points par chacun desquels on peut mener aux deux coniques une tangente commune, c'est-à-dire deux tangentes parallèles. Or, si (α, β) est un point de ce lieu, les faisceaux de tangentes issues de ce point aux deux coniques seront respectivement

$$f(\alpha,\beta)f(x,y) - (xf'_\alpha + yf'_\beta + f'_\gamma)^2 = 0,$$
$$f_1(\alpha,\beta)f_1(x,y) - (xf'_{1\alpha} + yf'_{1\beta} + f'_{1\gamma})^2 = 0,$$

où $\gamma = 1$; et par suite les équations aux coefficients angulaires m de ces tangentes seront elles-mêmes

$$f(\alpha, \beta)\varphi\,(1, m) - (f'_\alpha + m f'_\beta)^2 = 0,$$
$$f_1(\alpha, \beta)\varphi_1(1, m) - (f'_{1\alpha} + m f'_{1\beta})^2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$m^2[C f(\alpha, \beta) - f'^2_\beta]$$
$$+ 2m[B f(\alpha, \beta) - f'_\alpha f'_\beta] + A f(\alpha, \beta) - f'^2_\alpha = 0,$$
$$m^2[C_1 f_1(\alpha, \beta) f'^2_{1\beta}]$$
$$+ 2m[B_1 f(\alpha, \beta) - f'_{1\alpha} f'_{1\beta}] + A_1 f_1(\alpha_1, \beta) - f'^2_{1\alpha} = 0,$$

ou, par abréviation,

$$\mathcal{A} m^2 + 2\mathcal{B} m + \mathcal{C} = 0,$$
$$\mathcal{A}_1 m^2 + 2\mathcal{B}_1 m + \mathcal{C}_1 = 0.$$

Mais, si le point (α, β) est un point du lieu, ces deux équations doivent avoir une racine commune, ce qui impose

$$(\mathcal{A}\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}\mathcal{A}_1)^2 - 4(\mathcal{A}\mathcal{B}_1 - \mathcal{B}\mathcal{A})(\mathcal{B}\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}\mathcal{B}_1) = 0,$$

ou bien, ce qui revient identiquement au même,

$$(\mathcal{A}\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}\mathcal{A}_1 - 2\mathcal{B}\mathcal{B}_1)^2 - 4(\mathcal{B}^2 - \mathcal{A}\mathcal{C})(\mathcal{B}_1^2 - \mathcal{A}_1\mathcal{C}_1) = 0.$$

Telle est donc l'équation du lieu des points (α, β), c'est-à-dire l'équation des tangentes communes, à condition d'y remplacer α, β par les coordonnées courantes x, y.

Remarque I. — Si l'on désigne comme d'ordinaire par $A'_1, \ldots, F'_1$ $A'_1, \ldots, F'_1$ les coefficients de $A, \ldots, F$, $A, \ldots, F_1$ dans les développements respectifs des discriminants Δ et Δ_1 de f et f_1, on a

$$\mathcal{A} = F'x^2 - 2D'x + A',$$
$$\mathcal{B} = -F'xy + E'x + D'y - B',$$
$$\mathcal{C} = F'y^2 - 2Ey + C;$$
$$\mathcal{A}_1 = F'_1 x^2 - 2D'_1 x + A'_1,$$
$$\mathcal{B}_1 = -F'_1 xy + E'_1 x + D'_1 y - B'_1,$$
$$\mathcal{C}_1 = F'_1 y^2 - 2E'_1 y + C'_1;$$

d'où

$$\mathcal{A}\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}\mathcal{A}_1 - 2\mathcal{B}\mathcal{B}_1 = x^2(F'C_1 + C'F'_1 - 2E'E'_1) + \ldots;$$

et ainsi cette expression, en apparence du quatrième degré, n'est en réalité que du second. Cette même expression est d'ailleurs le premier membre de l'équation que l'on trouverait immédiatement en cherchant le lieu des points par où l'on peut mener à l'ensemble des deux coniques f et f_1 des tangentes formant un faisceau harmonique : avec Salmon nous la représenterons par F.

Remarque II. — On a, d'autre part,

$$\begin{aligned}\mathcal{B}^2 - \mathcal{A}\mathcal{C} &= (Bf - f'_x f'_y)^2 - (Cf - f'^2_y)(Af - f'^2_x) \\ &= (B^2 - AC)f^2 \\ &\quad + f(Af'^2_y + Cf'^2_x - 2Bf'_x f'_y) \\ &= (B^2 - AC)f^2 + f \\ &\qquad \times [(AC - B^2)(f - F) + AE^2 + CD^2 - 2BDE] \\ &= -f\Delta,\end{aligned}$$

et de même par analogie on aurait

$$\mathcal{B}_1^2 - \mathcal{A}_1\mathcal{C}_1 = -f_1\Delta_1.$$

Conclusion. — L'équation aux tangentes communes peut donc s'écrire également sous la forme connue

$$F^2 = 4\Delta\Delta_1 ff_1,$$

qui n'est que du quatrième degré, et l'on voit ainsi que :

1° Deux coniques ne peuvent avoir plus de quatre tangentes;

2° Les huit points de contact de deux coniques et de leurs tangentes communes sont tous sur la conique $F = 0$.

Remarque. — Le principe de cette solution pourrait être employé pour la recherche de l'équation aux

asymptotes et aux sécantes communes à deux coniques, et peut aussi bien servir pour deux courbes quelconques.

Problème II. — *Déterminer les points d'intersection des tangentes communes.*

Ces points ne sont autres que ceux d'où l'on peut mener aux coniques deux tangentes communes; donc pour ces points l'on a généralement

$$\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{A}_1} = \frac{\mathcal{B}}{\mathcal{B}_1} = \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{C}_1},$$

et par suite ces points sont les points communs aux trois courbes

$$\mathcal{A}\mathcal{B}_1 - \mathcal{B}\mathcal{A}_1 = 0, \qquad \mathcal{B}\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}\mathcal{B}_1 = 0, \qquad \mathcal{A}\mathcal{C}_1 - \mathcal{C}\mathcal{A}_1 = 0.$$

Ainsi qu'on le voit presque immédiatement, ces courbes sont des cubiques, et l'on vérifierait aisément qu'elles n'ont que six points communs à distance finie, ce que l'on pouvait prévoir, car les quatre tangentes communes ne peuvent se rencontrer en plus de six points.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE EN 1891.

Composition en Mathématiques.

On donne une parabole P; on porte, à partir de chacun de ses points, et dans les deux sens, sur une parallèle à une direction fixe Δ, des longueurs égales à la distance de ce point au foyer de la parabole :

1° Trouver le lieu des extrémités de ces longueurs; montrer qu'il se compose de deux paraboles P_1 et P_2, et donner la raison de ce dédoublement.

2° Démontrer que les axes des paraboles P_1 et P_2 sont perpendiculaires l'un à l'autre, qu'ils pivotent autour d'un même point indépendant de la direction Δ, et que, quelle que soit cette direction, la somme des carrés des paramètres des deux paraboles est constante.

3° Trouver et construire le lieu décrit par les sommets des paraboles P_1 et P_2, lorsqu'on fait varier la direction Δ.

On prendra comme axes de coordonnées l'axe et la tangente au sommet de la parabole donnée, on désignera par p son paramètre, et par θ l'angle de Δ avec l'axe des x.

Épure.

D'un cylindre de révolution supposé plein, limité par deux plans de profil, on enlève la portion située à l'intérieur d'un hyperboloïde de révolution à une nappe dont l'axe est vertical. Représenter par ses projections le solide obtenu.

La distance entre les plans de profil est de 23^{cm}.

Le centre de l'hyperboloïde se projette horizontalement à 13^{cm} du plan de profil de droite, à 10^{cm} au-dessus du bord inférieur de la feuille, et à 21^{cm} au-dessous de sa projection verticale : les génératrices rectilignes font un angle de 45° avec le plan horizontal : le rayon du cercle de gorge est de 3^{cm}.

Le cylindre a 6^{cm} de rayon; son axe est de front et sa pente est de 3^{cm} de base pour 1^{cm} de hauteur; on s'élève sur cet axe en allant de droite à gauche et il rencontre l'axe de l'hyperboloïde à 1^{cm} au-dessous du plan du cercle de gorge.

On indiquera seulement les constructions nécessaires pour déterminer : 1° un point quelconque de l'intersection et la tangente en ce point; 2° les points remarquables de l'intersection et les tangentes en ces points.

Les constructions, les tangentes et les parties enlevées seront en trait rouge continu : la représentation du solide sera seule en noir, trait plein pour les parties vues, points ronds pour les parties cachées.

Composition de Trigonométrie.

On donne les trois côtés d'un triangle

$$a = 12428^{m},76, \qquad b = 28394^{m},52, \qquad c = 34236^{m},84.$$

Calculer les trois angles et la surface.

Composition de Physique et de Chimie.

Physique. — I. Lunette astronomique.

II. Mesure de la tension de la vapeur d'eau aux températures élevées par la méthode de Regnault.

Chimie. — Action du chlore : sur l'ammoniaque, sur l'acide sulfureux, sur le bicarbure d'hydrogène.

Composition française.

« Il y a, dit Sénèque, des gens qui regardent la douleur comme le plus grand des maux, d'autres qui ne l'appellent même pas un mal. Celui-ci considère les richesses comme le premier des biens, celui-là soutient qu'elles ont été inventées pour le malheur des humains. »

Que faut-il penser de cette diversité de jugements?

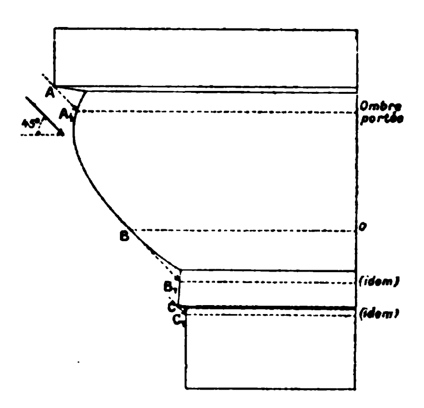
Composition de langues vivantes.

L'officier qui commande une colonne détachée ne doit jamais désespérer; fût-il cerné, il ne doit jamais capituler : en pleine campagne, il n'y a pour de braves gens qu'une manière de se rendre, c'est, comme François Ier et le roi Jean, au milieu de la mêlée et sous les coups. Capituler, c'est chercher à sauver tout hors l'honneur ; mais, lorsqu'on fait comme François Ier, on peut du moins dire comme lui : *Tout est perdu, fors l'honneur!* On peut citer de grands exemples, tels que celui du maréchal Mortier, à Krems, et un grand nombre d'autres qui remplissent nos Annales, pour prouver que des colonnes armées ont trouvé moyen de se faire passage en cherchant toutes leurs ressources dans leur courage. Quiconque préfère la mort à l'ignominie se sauve et vit avec honneur; au contraire, celui qui préfère la vie meurt en se couvrant de honte.

NAPOLÉON, 1809.

Lavis.

Exécution à l'encre de Chine, à teintes plates, ou à teintes



fondues (à volonté), le lavis du quart de rond droit, dont le trait est donné ci-dessus (2 heures $\frac{1}{2}$).

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE SPÉCIALE MILITAIRE EN 1891.

Composition française (3ʰ).

Le Syndic de Chambéry remet au général Montesquiou les clefs de la ville (24 septembre 1792).

Le 22 septembre 1792, les Français pénétrèrent sans combat dans la Savoie : « Ce ne fut rien autre chose qu'un mutuel élan de fraternité », écrit Michelet ; « deux frères longtemps séparés se retrouvent, s'embrassent ; voilà cette simple et grande histoire. » Les Savoisiens saluaient en la France une sœur aînée : « Nous ne sommes pas un peuple conquis, mais un peuple délivré », disaient-ils.

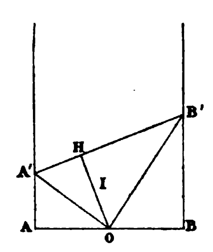
Vous ferez parler le Syndic de Chambéry.

Mathématiques (de $8^h 45^m$ à 11^h).

I. Dans un triangle BAC rectangle en A on connaît la hauteur h abaissée sur l'hypoténuse et la médiane m issue du sommet B. Déterminer l'hypoténuse par le calcul. Discussion; construction du triangle.

II. On donne deux droites parallèles, une perpendiculaire commune $AB = 2a$, et le milieu O de AB. On fait tourner un angle droit A'OB' autour de son sommet O. Démontrer :

1° Que le produit $AA' \times BB'$ est constant;



2° Que A'B' est constamment égale à $AA' + BB'$;

3° Que la droite A'B' reste tangente à un cercle fixe.

4° Par le milieu I de la hauteur OH on mène une parallèle à chacun des côtés du triangle A'OB', et l'on considère les points où elle rencontre les deux autres côtés. Démontrer que les six points ainsi obtenus sont situés sur une même circonférence.

5° Minimum du rayon de cette circonférence.

Calcul logarithmique (de $7^h 30^m$ à $8^h 30^m$).

On donne dans un triangle

$$A = 112°28'47'',3, \qquad b = 26734, \qquad c = 96879.$$

Calculer B, C et a.

Épure (2 heures et demie).

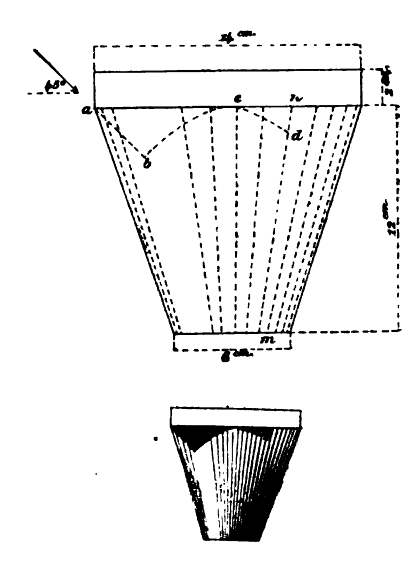
Un tétraèdre SABC, dont l'angle trièdre S est trirectangle, a sa base ABC sur le plan horizontal. AB est sur la ligne de terre (A vers la gauche) et a pour longueur 140^{mm}. La projection horizontale du sommet S est un point s dont les distances aux points A et B sont $As = 105^{mm}$ et $Bs = 49^{mm}$.

Construire ce tétraèdre, puis son intersection avec la sphère ayant S pour centre et passant par le centre de la sphère inscrite au tétraèdre.

Dans la mise à l'encre, on représentera la partie du volume du tétraèdre extérieure à la sphère S.

Lavis.

Laver soit à teintes plates superposées, soit à teintes fondues la projection verticale d'un tronc de cône droit à bases circulaires parallèles, posé par sa petite base sur le plan horizontal.



et surmonté d'un parallélépipède rectangle dont la base inférieure est circonscrite à la base supérieure du tronc, et dont une face latérale est de front.

Les rayons lumineux sont parallèles à une droite dont les deux projections font des angles de 45° avec la partie gauche de la ligne de terre.

Le parallélépipède porte sur le tronc une ombre limitée par la droite *ab* et par un segment d'ellipse *bcd* que l'on arrête au point de perte *d* sur la ligne de séparation d'ombre et de lumière *mn* du tronc.

Pour le lavis à teintes plates superposées, on se servira des lignes de teintes indiquées sur le *croquis* n° 1.

Les parties claires et les parties foncées sont indiquées sur le *croquis* n° 2.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE EN 1891.

Mathématiques.

Soit (E) une ellipse qui, rapportée à ses axes, a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

et soient x_0, y_0 les coordonnées d'un point M du plan de cette ellipse; on considère le cercle (C) passant par le point M et les points de contact P, Q des tangentes à l'ellipse issues du point M.

1° Le cercle (C) rencontre l'ellipse en deux autres points P′, Q′; prouver que les tangentes à l'ellipse en ces deux points se coupent en un point M′ situé sur le cercle; montrer que, par M, M′ et les deux foyers réels, on peut faire passer un cercle; de même par M, M′ et les deux foyers imaginaires.

2° Soient I, I′, I″ les points où se coupent respectivement les droites PQ, P′Q′, les droites PQ′, P′Q, enfin les droites PP′, QQ′; on suppose que le point M reste fixe et que l'ellipse (E) se déforme en gardant les mêmes foyers : on demande les lieux décrits par les points I, I′, I″; on propose enfin de montrer que tout cercle passant par les points I′, I″ est orthogonal au cercle décrit sur MM′ comme diamètre.

Physique.

I. Dans une boîte rectangulaire de 4^{dm} de longueur, une face est formée par une glace dépolie carrée de 1^{dm} de côté; au centre de la face opposée est percé un petit trou circulaire. On met, à égale distance du trou et de la glace, un dessin transparent dont l'ombre se forme sur la glace quand on expose le trou en face d'un mur blanc vivement éclairé.

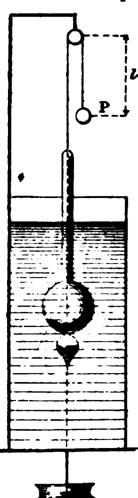
On demande quels changements seront produits dans l'éclairement et dans les dimensions de l'ombre par l'introduction d'une lentille achromatique convergente sur l'axe de la boîte, dans l'une des positions suivantes :

1° Entre le dessin et le trou;

2° Entre le trou et le mur.

Le diamètre de la lentille est égal à $\frac{1}{5}$ de décimètre, et sa distance focale à 1^{dm}.

II. Une éprouvette cylindrique pleine d'eau peut tourner d'un mouvement uniforme autour de son axe de figure supposé vertical; une potence liée à l'éprouvette supporte sans frottement une poulie de dimensions négligeables, placée exactement sur l'axe de rotation. Un poids P (25^{gr}) est attaché à un bout d'un fil non pesant qui passe sur la poulie et vient s'attacher par l'autre bout à un aréomètre dont la tige a une section de 1^{cq}. Section droite de l'éprouvette : 10^{cq}.



Au repos, lorsque l'équilibre est établi, la partie du fil comprise entre la poulie et le poids P a une longueur $l = 30^{cm}$.

Quel est le déplacement vertical de l'aréomètre quand tout l'appareil tourne avec une vitesse angulaire ω, ce qui projette le poids P latéralement?

On admet que l'aréomètre reste exactement centré et que la surface libre de l'eau reste horizontale.

$$g = 980 \text{ (C.G.S.)}.$$

CORRESPONDANCE.

Extrait d'une Lettre de M. Gomez Teixeira à M. Rouché.

Dans une Note *Sur la formule de Stirling*, qui a été insérée dans les *Comptes rendus*, t. CX, p. 513; 1890,

vous démontrez d'une manière bien simple la formule

$$(2)\qquad \frac{\varphi(n)}{\varphi(n+p)} = e^{\frac{\theta p}{12(n+p)n}},$$

où θ représente un nombre compris entre 0 et 1, et où l'on a

$$(1)\qquad \varphi(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}}}.$$

Ensuite, au moyen de cette formule, vous trouvez la formule de Stirling, qui donne le produit $\Gamma(n+1)$, quand n est un nombre très grand. Vous supposez, dans votre analyse, que n est un nombre positif *entier*.

En étudiant votre démonstration, je viens de remarquer qu'on peut la modifier de manière à considérer le cas où n représente un nombre quelconque, rationnel ou irrationnel. Je remarque premièrement que votre démonstration de la formule (2) a lieu quand n est fractionnaire, ainsi que la démonstration, basée sur la formule de Wallis, que vous donnez de l'égalité

$$\lim_{p=\infty} \varphi(p) = \sqrt{2\pi}.$$

Ensuite je modifie l'analyse que vous employez pour déduire de (2) la formule de Stirling de la manière suivante.

Je trouve premièrement au moyen de la formule (1)

$$\lim_{p=\infty} \frac{\varphi(n+p)}{\varphi(p)} = \lim_{p=\infty} \frac{\Gamma(n+p+1)e^{-p}p^{p+\frac{1}{2}}}{\Gamma(p+1)e^{-(n+p)}(n+p)^{n+p+\frac{1}{2}}},$$

et ayant égard aux égalités

$$\Gamma(n+p+1) = n(n+1)\ldots(n+p)\Gamma(n),$$
$$\Gamma(p+1) = 1.2.3\ldots p,$$

j'écris cette formule d'abord de la manière suivante

$$\lim_{p=\infty} \frac{\varphi(n+p)}{\varphi(n)} = \lim_{n=\infty} \frac{n(n+1)\ldots(n+p)\Gamma(n)e^{-p}p^{p+\frac{1}{2}}}{p!\, e^{-(n+p)}(n+p)^{n+p+\frac{1}{2}}},$$

et ensuite, ayant égard à la définition de Gauss de la fonction $\Gamma(n)$,

$$\Gamma(n) = \lim_{p=\infty} \frac{p!\, p^n}{n(n+1)\ldots(n+p)},$$

je l'écris de la manière suivante

$$\lim_{p=\infty} \frac{\varphi(n+p)}{\varphi(p)} \lim_{p=\infty} \frac{p^{n+p+\frac{1}{2}}}{e^{-n}(n+p)^{+p+\frac{1}{2}}}.$$

Mais nous avons

$$\lim_{p=\infty} \left(\frac{n}{p}+1\right)^{n+p+\frac{1}{2}} = e^n.$$

Donc on aura

$$\lim_{p=\infty} \frac{\varphi(n+p)}{\varphi(p)} = 1,$$

et, par conséquent,

$$\lim_{p=\infty} \varphi(n+p) = \lim_{p=\infty} \varphi(p) = \sqrt{2\pi}.$$

Si l'on remarque maintenant que la formule (2) donne

$$\lim_{p=\infty} \frac{\varphi(n)}{\varphi(n+p)} = e^{\frac{\theta}{12n}} \qquad (0 < \theta < 1),$$

et par conséquent

$$\varphi(n) = e^{\frac{\theta}{12n}} \lim_{p=\infty} \varphi(n+p),$$

on trouve

$$\varphi(n) = e^{\frac{\theta}{12n}}\sqrt{2\pi},$$

et l'égalité (1) donne ensuite la formule de Stirling

$$\Gamma(n+1) = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} e^{\frac{\theta}{12n}}.$$

Pour plus de clarté, je crois devoir reproduire ici la démonstration que j'ai donnée dans les *Comptes rendus* et à laquelle se rapporte la lettre de M. Texeira.

La relation bien connue

$$\log(n+1) - \log n = \frac{2}{2n+1}\left[1 + \frac{\theta}{12n(n+1)}\right],$$

où n désigne un nombre entier positif quelconque, et θ un nombre compris entre o et 1, peut s'écrire

$$\frac{\theta}{12n(n+1)} = -1 + (n+\tfrac{1}{2})[\log(n+1) - \log n].$$

Elle devient

$$\frac{\theta}{12n(n+1)} = \log\varphi(n) - \log\varphi(n+1),$$

quand on pose

(1) $$\varphi(n) = \frac{1.2.3\ldots n}{e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}}}.$$

On conclut de là

$$\log\varphi(n) > \log\varphi(n+1)$$

et

$$\log\varphi(n) - \frac{1}{12n} < \log\varphi(n+1) - \frac{1}{12(n+1)};$$

en d'autres termes, des deux fonctions

$$\varphi(n), \quad \varphi(n)e^{-\frac{1}{12n}},$$

la première est décroissante et la seconde croissante, lorsque l'entier n croît. Si donc on désigne par p un nombre entier

positif quelconque, on a les inégalités

$$\varphi(n) > \varphi(n+p),$$
$$\varphi(n)e^{-\frac{1}{12n}} < \varphi(n+p)e^{-\frac{1}{12(n+p)}},$$

que l'on peut remplacer par l'égalité

$$(2) \qquad \frac{\varphi(n)}{\varphi(n+p)} = e^{\frac{\theta p}{12n(n+p)}},$$

dans laquelle θ désigne un nombre compris entre o et 1.

Il est bien aisé de déduire de cette relation la formule célèbre de Stirling pour l'évaluation approchée du produit $1.2.3\ldots n$ lorque n est un grand nombre.

En effet, la relation (2), appliquée au cas où n est égal à p, montre immédiatement que le rapport

$$\frac{\varphi(p)}{\varphi(2p)}$$

a pour limite l'unité, lorsque p croît indéfiniment. On a donc, pour $p=\infty$,

$$\lim \varphi(p) = \lim \frac{\varphi(p)^2}{\varphi(2p)}$$

ou, d'après (1),

$$\lim \varphi(p) = \lim \sqrt{4 \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2p-2}{2p-1} \cdot \frac{2p}{2p-1}},$$

et enfin, en vertu du théorème de Wallis,

$$\lim \varphi(p) = \sqrt{2\pi}.$$

Dès lors, si dans la formule (2) on laisse n fixe en faisant croître p indéfiniment, on obtient

$$\frac{\varphi(n)}{\sqrt{2\pi}} = e^{\frac{\theta}{12n}},$$

c'est-à-dire, d'après la définition de $\varphi(n)$,

$$1.2.3\ldots n = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} e^{\frac{\theta}{12n}}.$$

C'est la formule de Stirling, qui donne deux limites

$$\sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}, \qquad \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} . e^{\frac{1}{12n}},$$

entre lesquelles est compris le produit $1.2.3\ldots n$. (E. R.)

BIBLIOGRAPHIE.

Resal (H.), Membre de l'Institut. — *Exposition de la théorie des surfaces;* 1 vol. in-8°, de XIII-171 pages, avec figures dans le texte. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1891. Prix : 4fr,50.

La théorie analytique des surfaces ne figure guère dans la littérature mathématique didactique qu'à titre d'application des principes de l'Analyse, ce qui n'est pas assez, vu son importance. Nous ne parlons pas, bien entendu, de l'ouvrage magistral (¹) où M. Darboux, grâce aux ressources de l'Analyse la plus élevée, fouille, dans ses moindres détails, ce vaste champ de connaissances jusqu'aux plus extrêmes limites qu'ait pu, quant à présent, atteindre l'esprit humain. Un tel livre va bien au delà des besoins courants de l'étudiant, candidat à tel ou tel examen, ou simplement amateur. M. Resal, que son expérience de l'enseignement de la Mécanique a pénétré de l'importance des principes fondamentaux de la théorie des surfaces à ce point de vue spécial, s'est trouvé amené à en faire pour ses élèves un exposé d'ensemble; c'est celui-ci qu'il nous livre aujourd'hui sous la forme d'un petit volume que vient d'imprimer avec son soin ordinaire la maison Gauthier-Villars. On y retrouve les qualités d'élégance et de clarté qui distinguen toutes les productions du savant académicien. Aucune partic essentielle de la théorie n'est d'ailleurs omise, l'auteur passant successivement en revue les propriétés générales relatives à la courbure et à la cambrure des lignes tracées sur une surface, celles des lignes de courbure, des asymptotiques, des géodési-

(¹) *Leçons sur la théorie générale des surfaces,* 3 vol. in-8°. Paris, Gauthier-Villars.

ques, etc., voire même les notions fondamentales relatives à l'application des surfaces les unes sur les autres et aux surfaces minima. Cet excellent petit livre constituera certainement la meilleure préparation à la lecture des importants travaux dont la théorie des surfaces a été l'objet en cette dernière moitié du siècle, et particulièrement à celle du grand Traité de M. Darboux qui les résume si admirablement. Notons, à titre de détail, l'heureuse substitution faite par M. Resal, dans l'étude des courbes gauches, du terme de *cambrure* à celui de *torsion*, dont l'usage doit être limité à celui que l'on en fait dans son acception mécanique. M. d'Ocagne.

SUR UN CERCLE REMARQUABLE QUI PASSE PAR DEUX POINTS FIXES D'UNE CONIQUE;

Par M. GENESE,
Professeur à Aberystwyth (province de Galles).

Soient AB *une corde fixe d'une conique,* C *son pôle,* P *un point variable de la courbe; par* C *on mène une droite antiparallèle à* AB *par rapport à l'angle* APB *rencontrant* PA, PB *en* Q, Q'. *Alors les points* A, B, Q', Q *sont sur un même cercle. Ce cercle est invariable.*

Nommons α, β, γ les perpendiculaires abaissées du point P sur Bb, bA, AB. La conique a pour équation

$$\frac{\alpha\beta}{\gamma^2} = k^2 \qquad \text{(une constante)}.$$

Or

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\sin \mathrm{PB}b}{\sin \mathrm{PBA}} = \frac{\sin(180^\circ - \mathrm{CBQ'})}{\sin(180^\circ - \mathrm{AQC})} = \frac{\sin \mathrm{CBQ'}}{\sin \mathrm{CQA}};$$

de même

$$\frac{\beta}{\gamma} = \frac{\sin \mathrm{CAQ}}{\sin \mathrm{CQ'B}}.$$

Donc

$$k^2 = \frac{\sin CBQ'}{\sin CQ'B} \times \frac{\sin CAQ}{\sin CQA} = \frac{CQ'}{CB} \times \frac{CQ}{CA}.$$

On voit maintenant que la puissance de C par rapport au cercle ABQ'Q a une valeur constante. De là, en pro-

Fig. 1.

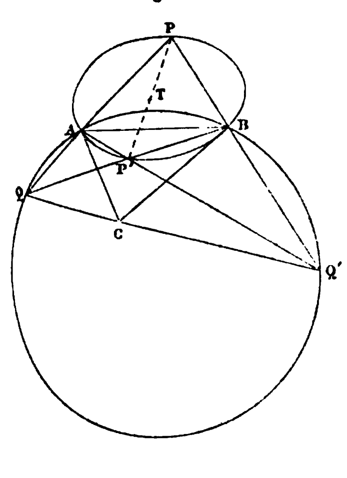
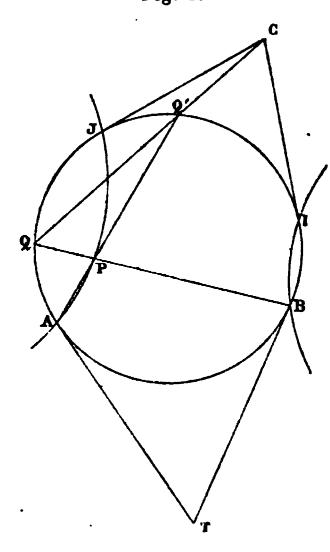


Fig. 2.



longeant la droite BC, on trouve encore un point fixe du cercle. Donc le cercle est complètement déterminé.

C. Q. F. D.

Inversement, la conique est déterminée par le cercle ABQ'Q *et le point* C. On mène la sécante QCQ'; le lieu du point (P) d'intersection des droites QA, Q'B est la conique. Les droites QB, Q'A se rencontrent en P', un point de la même courbe.

Les droites QQ', PP' sont homologues par rapport au cercle, et, puisque QQ' passe par un point fixe, il en est

de même avec PP′. Nommons T ce point fixe de la droite PP′; le point T est le pôle de la droite AB par rapport au cercle.

On peut vérifier les théorèmes précédents par la méthode de la projection. Que la conique et le cercle se rencontrent encore aux points I, J, et projetons de façon à rejeter *ij*, la projection de IJ, à l'infini. On obtient deux cercles. En se servant de petites lettres pour désigner les projections des lettres majuscules, les angles *apb*, *aqb* sont constants, et, par suite, l'angle *qbq′* ($= qaq'$) est constant. Il faut alors que *c* soit le centre du cercle *qab*; autrement, *qq′* toucherait un cercle concentrique, au lieu de passer par un point fixe. Puis, l'angle *pap′* étant droit, *pp′* passe par le centre (*t*) du cercle *pap′b*. De plus, *c* étant le pôle de *ab* par rapport au cercle *t*, les deux cercles se coupent orthogonalement et *t* est pôle de *ab* par rapport au cercle *c*.

Enfin, *c*, *t* sont les pôles de la droite à l'infini *ij*; donc C, T, dans la figure originale, sont les pôles de IJ aussi bien que de AB (*fig.* 2).

On voit immédiatement que le point T jouit de la propriété suivante : TPP′ *étant une sécante variable de la conique, la somme (avec une certaine convention) des angles* APB, AP′B *est invariable.* (En effet, dans la *fig.* 1, c'est la différence qui est constante.) M. Gaston Tarry a remarqué qu'il y a deux points qui jouissent de cette propriété. Une analyse assez compliquée m'a montré qu'il n'y a que deux points réels qui en jouissent, et que T est un des points remarqués par M. Tarry.

REMARQUES SUR LE PROBLÈME DE MÉCANIQUE PROPOSÉ A L'AGRÉGATION EN 1889;

PAR M. MARCHAND.

Les équations de Lagrange permettent évidemment de résoudre analytiquement toutes les questions que l'on traite habituellement par les formules du mouvement relatif. Voici en particulier comment elles peuvent remplacer les formules de Rivals et de Coriolis pour la mise en équations du problème de l'agrégation.

Désignant par ξ, η, ζ les coordonnées par rapport aux axes fixes, par x, y, z les coordonnées par rapport aux axes mobiles adoptés par M. de Saint-Germain, les formules de Lagrange s'écriront

$$\begin{aligned} \xi &= \varphi(x, y, z, t), \\ \eta &= \psi(x, y, z, t), \qquad \mathrm{T} = \frac{m}{2}(\xi'^2 + \eta'^2 + \zeta'^2), \\ \zeta &= \varpi(x, y, z, t), \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x'}\right) - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x} = \mathrm{X} + \mathrm{N}\cos a,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y'}\right) - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y} = \mathrm{Y} + \mathrm{N}\cos b,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial z'}\right) - \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial y} = \mathrm{Y} + \mathrm{N}\cos c.$$

On est ramené à exprimer T ou, ce qui revient au même, le carré de la vitesse du point mobile, en fonction de x, y, z, x', y', z'. Le carré de la vitesse étant la somme des carrés de ses projections sur les trois axes mobiles, on aura

$$\mathrm{T} = \frac{m}{2}[(x' + qz - ry)^2 + (y' + rx - pz)^2 + (z' + py - qx)^2].$$

Comme, dans le problème actuel,

$$m = 1, \qquad p = \frac{\omega\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, \qquad q = 0, \qquad r = \frac{\omega}{\sqrt{3}},$$

il vient

$$\mathrm{T} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{dx}{dt} - \frac{\omega y}{\sqrt{3}}\right)^2 \right.$$
$$\left. + \left(\frac{dy}{dt} + \frac{\omega x}{\sqrt{3}} - \frac{\omega\sqrt{2}}{\sqrt{3}}z\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} + \frac{\omega\sqrt{2}}{\sqrt{3}}y\right)^2\right],$$

et les équations de Lagrange donnent

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt} - \frac{\omega y}{\sqrt{3}}\right) - \frac{\omega}{\sqrt{3}}\left(\frac{dy}{dt} + \frac{\omega x}{\sqrt{3}} - \frac{\omega\sqrt{2}}{\sqrt{3}}z\right) = \mathrm{X} + \mathrm{N}\cos a,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt} + \frac{\omega x}{\sqrt{3}} - \frac{\omega\sqrt{2}}{\sqrt{3}}z\right)$$
$$+ \frac{\omega}{\sqrt{3}}\left(\frac{dx}{dt} - \frac{\omega y}{\sqrt{3}}\right) - \frac{\omega\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left(\frac{dz}{dt} + \frac{\omega\sqrt{2}}{\sqrt{3}}y\right) = \mathrm{Y} + \mathrm{N}\cos b,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dt} + \frac{\omega\sqrt{2}}{\sqrt{3}}y\right) + \frac{\omega\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left(\frac{dy}{dt} + \frac{\omega x}{\sqrt{3}} - \frac{\omega\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x\right) = \mathrm{Z} + \mathrm{N}\cos c.$$

Il n'y a qu'à réduire pour retrouver les formules (2) de M. de Saint-Germain.

REMARQUES SUR LE PROBLÈME DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES DE L'AGRÉGATION DE 1889;

PAR M. MARCHAND.

Si l'on transforme l'énoncé par le principe de dualité, à trois surfaces inscrites dans un cône C correspondront trois surfaces passant par la même courbe plane. Si cette courbe plane devient le cercle imaginaire de l'infini, l'énoncé est remplacé par le suivant :

On donne deux sphères A, A'; on considère une

sphère variable S touchant les deux sphères données en des points pour lesquels α et α' sont les plans tangents.

1° La droite $\alpha\alpha'$ d'intersection des plans tangents est située dans un plan fixe, que l'on sait être le plan radical de A et A';

2° La droite qui joint les points de contact des plans tangents α et α' passe par l'un des centres de similitude;

3° Démontrer que l'enveloppe du plan polaire d'un point fixe P par rapport à la sphère S se compose de deux quadriques bitangentes;

4° Trouver le lieu de la droite d'intersection des plans tangents communs à ces deux quadriques bitangentes lorsque le point P décrit une droite isotrope.

La quatrième Partie ne pouvant avoir lieu pour des éléments réels parait peu intéressante dans le cas de la sphère. Restent les trois premières parties dont les deux premières expriment des théorèmes bien connus.

La solution du problème du concours général nous apprend que l'enveloppe du plan polaire d'un point fixe par rapport à toutes les sphères tangentes à deux sphères fixes se compose de deux quadriques bitangentes.

Laissant de côté la démonstration analytique de cette proposition, je me bornerai à signaler quelques-unes de ses conséquences géométriques. Il est évident d'abord que les sphères tangentes à deux sphères fixes A et A' se divisent en deux groupes : le premier groupe s'obtient en considérant les rayons des sphères comme de même signe; le second en considérant les rayons des sphères comme de signes contraires, la théorie des cycles s'étendant évidemment aux sphères aussi bien qu'aux cercles. Je ne considérerai que l'un de ces groupes dans tout ce qui suit.

Si P est le point fixe, pour que son plan polaire le contienne, il faut que la sphère S, par rapport à laquelle

on prend le plan polaire, passe par P. Comme S est tangente déjà à A et A′ et que P peut être assimilé à une sphère de rayon nul, la sphère S engendrera une cyclide de Dupin ayant le point P comme point double. Le cône lieu des tangentes en P à la cyclide étant de révolution, on voit que le cône enveloppe des plans du lieu passant par P est du second degré et de révolution; la première partie de la proposition s'accorde bien avec ce qui a été dit que l'enveloppe était une quadrique; la seconde montre que P est une des focales de la quadrique.

Je cherche le cylindre circonscrit à l'enveloppe parallèlement à une direction D, c'est-à-dire les plans polaires qui soient parallèles à D; ils correspondent évidemment aux sphères ayant leurs centres dans un plan Q mené par P perpendiculairement à D.

Les sphères tangentes à A et A′ et ayant leurs centres dans le plan Q ont leurs centres situés sur une conique admettant A et A′ comme foyers dans l'espace. Ces sphères enveloppent une cyclide de Dupin, et, comme le cylindre parallèle à D doit être du second degré, on est conduit à ce théorème :

« On considère toutes les sphères S appartenant à l'un des modes de génération d'une cyclide de Dupin et un point P dans le plan des centres des sphères S. L'enveloppe des plans polaires du point P par rapport aux sphères S est un cylindre du second degré. »

Le tore n'étant qu'un cas particulier de la cyclide, le même théorème lui est applicable.

Si l'on applique la transformation par rayons vecteurs réciproques de manière à obtenir toujours une cyclide de Dupin, on généralisera facilement cette dernière proposition. En effet, à une sphère et aux plans tangents menés par un point P, on fera correspondre une sphère et les sphères tangentes passant par le pôle d'inversion

et par le point transformé de P. Comme un cercle se transforme en un cercle, les points de contact d'une sphère avec toutes les sphères passant par deux points fixes seront dans un même plan, lequel se substituera, dans l'énoncé, au plan polaire.

On obtiendra donc sans aucune difficulté un nouvel énoncé dans lequel interviendront des sphères passant par deux points fixes situés tous deux dans le plan des centres des sphères S qui constituent un des modes de génération de la cyclide de Dupin.

SUR LES FONCTIONS SYMÉTRIQUES;

PAR M. WORONTZOFF.

Soit

$$U = F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Phi(a_0, a_1, \ldots, a_n)$$

une fonction symétrique rationnelle et entière des racines de l'équation

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0.$$

On sait que

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{du}{dx_k} = -\sum_{r=1}^{r=n} (n-r+1) a_{r-1} \frac{du}{da_r}.$$

Nous nous proposons ici de généraliser ce théorème. Comme

$$\frac{dx_k}{da_r} = -\frac{x_k^{n-r}}{f'(x)_k},$$

où

$$f'(x_k) = a_0(x_k - x_1)(x_k - x_2)\ldots(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})\ldots(x_k - x_n)$$
$$= na_0 x_k^{n-1} + (n-1)a_1 x_k^{n-2} + \ldots + a_{n-2}x_k + a_{n-1}$$
$$= \left(\frac{-1}{x_k}\right)(a_1 x_k^{n-1} + 2a_2 x_k^{n-2}) + \ldots + (n-1)a_{n-1}x_k + na_n,$$

....

on a

$$(1)\quad \begin{cases} A_0 \dfrac{du}{da_0} + A_1 \dfrac{du}{da_1} + \ldots + A_r \dfrac{du}{da_r} + \ldots + A_n \dfrac{du}{da_n} \\ = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} - \frac{1}{f'(x_k)}(A_0 x_k^n + A_1 x_k^{n-1} + \ldots + A_r x_k^{n-r} + \ldots + A_n)\frac{du}{dx_k} \end{cases}$$ [1].

Posons, pour abréger,

$$x_1^m + x_2^m + \ldots + x_n^m = S_m,$$
$$-(n-r-m+1)a_{r+m-1} + \sum_{c=1}^{c=m} a_{r+m-c}S_{c-1}$$
$$= -\sum_{c=1}^{c=r} a_{r-c}S_{m+c-1} = \sum_{k=1}^{k=n} x_k^m \frac{da_r}{dx_k} = H_{(r)}^{(m)},$$

---

(1) Soit, par exemple, $U = S_q$, alors de la formule (1) on déduit

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{a_0 x_k^{n+q-1}}{f'(x_k)} = \sum_q x_1^{q_1} x_2^{q_2} \ldots x_n^{q_n} = -\frac{a_0}{q}\frac{ds_q}{da_0}\left(= \ldots = -\frac{a_r}{q+r}\frac{ds_{q+r}}{da_r}\right)$$
$$= \sum (-1)^i i! \frac{a_0^{-i} a_1^{\alpha} a_2^{\beta} \ldots a_n^{\lambda}}{\alpha!\, \beta! \ldots \lambda!}$$

(*Nouvelles Annales*, p. 382; 1888), où la somme $\sum_q x_1^{q_1} \ldots x_n^{q_n}$ se rapporte à toutes les solutions entières positives de l'équation

$$q_1 + \ldots + q_n = q.$$

d'où

$$\mathrm{H}_0^{(m)} = 0, \qquad \mathrm{H}_r^{(0)} = -(n-r+1)a_{r-1}, \qquad \mathrm{H}_r^{(1)} = ra_r,$$

$$\mathrm{H}_r^{(2)} = (r+1)a_{r+1} - \frac{a_r a_1}{a_0}, \qquad \ldots.$$

Maintenant, en prenant successivement dans l'égalité (1),

$$\mathrm{A}_0 = a_0, \quad \mathrm{A}_1 = a, \quad \ldots, \quad \mathrm{A}_r = a_r, \quad \ldots, \quad \mathrm{A}_n = a_n,$$

$$\mathrm{A}_0 = 0, \quad \mathrm{A}_1 = -na_0, \quad \ldots,$$

$$\mathrm{A}_r = -(n-r+1)a_{r-1}, \quad \ldots, \quad \ldots, \quad \mathrm{A}_n = -a_{n-1},$$

$$\mathrm{A}_0 = 0, \quad \mathrm{A}_1 = a_1, \quad \mathrm{A}_r = ra_r, \quad \ldots, \quad \mathrm{A}_n = na_n,$$

ou

$$\mathrm{A}_0 = -na_0, \quad \mathrm{A}_1 = -(n-1)a_1, \quad \ldots,$$

$$\mathrm{A}_r = -(n-r)a_r, \quad \ldots, \quad \mathrm{A}_n = 0,$$

$$\mathrm{A}_0 = 0, \quad \mathrm{A}_1 = 2a_2 - \frac{a_1^2}{a_0}, \quad \ldots,$$

$$\mathrm{A}_r = (r-1)a_{r+1} - \frac{a_r a_1}{a_0}, \quad \ldots,$$

ou

$$\mathrm{A}_0 = a_1, \quad \mathrm{A}_1 = 2a_2, \quad \ldots, \quad \mathrm{A}_r = (r+1)a_{r+1}, \quad \ldots,$$

$$\ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots$$

$$\mathrm{A}_0 = 0, \quad \mathrm{A}_1 = \mathrm{H}_1^{(m)}, \quad \ldots, \quad \mathrm{A}_r = \mathrm{H}_r^{(m)}, \quad \ldots,$$

ou

$$\mathrm{A}_0 = -a_0 \mathrm{L}_{m-1}, \quad \mathrm{A}_1 = \mathrm{H}_1^{(m)} - a_1 \mathrm{S}_{m-1}, \quad \ldots,$$

$$\mathrm{A}_r = \mathrm{H}_r^{(m)} - a_r \mathrm{S}_{m-1}, \quad \ldots,$$

et en remarquant que

$$\mathrm{H}_1^{(m)} x_k^{n-1} + \mathrm{H}_2^{(m)} x_k^{n-2} + \ldots + \mathrm{H}_{n-1}^{(m)} x_k + \mathrm{H}_n^{(m)}$$

$$= a_1 x_k^{n+m-2} + 2a_2 x_k^{n+m-3} + \ldots + na_n x_k^{m-1},$$

on trouve respectivement les formules suivantes

$$a_0 \frac{du}{da_0} + a_1 \frac{du}{da_1} + \ldots + a_{n-1} \frac{du}{da_{n-1}} + a_n \frac{du}{da_n} = 0,$$

et

$$\sum_{k=1}^{k=n} \frac{du}{dx_k} = -\left[na_0\frac{du}{da_1} + (n-1)a_1\frac{du}{da_2} + \ldots \right.$$
$$\left. + 2a_{n-2}\frac{du}{da_{n-1}} + a_{n-1}\frac{du}{da_n}\right],$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} x_k\frac{du}{dx_k} = a_1\frac{du}{da_1} + 2a_2\frac{du}{da_2} + \ldots$$
$$+ (n-1)a_{n-1}\frac{du}{da_{n-1}} + na_n\frac{du}{da_n}$$
$$= -\left[na_0\frac{du}{da_0} + (n-1)a_1\frac{du}{da_1} + \ldots \right.$$
$$\left. + 2a_{n-2}\frac{du}{da_{n-2}} + a_{n-1}\frac{du}{da_{n-1}}\right],$$

$$\sum_{k=1}^{k=n} x_k^2\frac{du}{dx_k} = \left(2a_2 - \frac{a_1^2}{a_0}\right)\frac{du}{da_1} + \left(3a_3 - \frac{a_2 a_1}{a_0}\right)\frac{du}{da_2} + \ldots$$
$$+ \left(na_n - \frac{a_{n-1}a_1}{a_0}\right)\frac{du}{da_{n-1}} + \left(-\frac{a_n a_1}{a_0}\right)\frac{du}{da_n}$$
$$= a_1\frac{du}{da_0} + 2a_2\frac{du}{da_1} + \ldots$$
$$+ (n-1)a_{n-1}\frac{du}{da_{n-2}} + na_n\frac{du}{da_{n-1}},$$

. . . .

$$\sum_{k=1}^{k=n} x_k^m\frac{du}{dx_k} = \sum_{k=1}^{k=n} x_k^m\left(\frac{du}{da_1}\frac{da_1}{dx_k} + \frac{du}{da_2}\frac{da_2}{dx_k} + \ldots + \frac{du}{da_n}\frac{da_n}{dx_k}\right)$$
$$= \sum_{r=1}^{r=n} \mathrm{H}_r^{(m)}\frac{du}{da_r} = \sum_{r=0}^{r=n-1}(\mathrm{H}_r^{(m)} - a_r\mathrm{S}_{m-1})\frac{du}{da_r}.$$

Exemples. — 1° Si l'on pose $\mathrm{U} = \mathrm{S}_i$, $i > 0$, on a

$$a_1\frac{ds_i}{da_0} + 2a_2\frac{ds_i}{da_1} + \ldots$$
$$+ (n-1)a_{n-1}\frac{ds_i}{da_{n-2}} + na_n\frac{ds_i}{da_{n-1}} = i\mathrm{S}_{i+1};$$

2° Soit $u = \frac{a_q}{a_0}$, on obtient, pour $m > 1$,

$$\frac{1}{a_0}\sum_{r=1}^{r=n} \mathrm{H}_r^{(m)} \frac{da_q}{da_r} + \frac{\mathrm{H}_q^{(m)}}{a_0} = (-1^q)\sum x_1^m x_2 x_3 \ldots x_q,$$

$$\mathrm{H}_q^{(m)} = (-1)^q a_0 \sum x_1^m x_2 \ldots x_q.$$

RÉALISATION ET USAGE DES FORMES IMAGINAIRES EN GÉOMÉTRIE.

CONFÉRENCES DONNÉES PAR M. MAXIMILIEN MARIE
au Collège Stanislas, à Sainte-Barbe, à l'École Sainte-Geneviève et à l'École Monge (¹).

---

11. La section complète d'un lieu $f(x, y, z) = 0$ par un plan réel se compose de la section, par ce plan, de la surface réelle et des sections effectives, par ce même plan, de toutes les conjuguées du lieu dont les cordes réelles lui sont parallèles.

Les sections par le plan considéré des conjuguées du lieu qu'il peut couper sont, dans ce plan, les conjuguées de la section de la surface réelle, si elle est effectivement coupée; et la section de la surface réelle est l'enveloppe réelle des sections des conjuguées que le plan coupe.

Ces dernières sections ont le plus souvent une autre enveloppe, imaginaire; mais cette seconde enveloppe n'est généralement pas la section par le plan considéré de l'enveloppe imaginaire des conjuguées du lieu proposé.

(¹) *Voir* t. X, p. 276.

Ainsi, par exemple, l'enveloppe imaginaire des conjuguées du lieu

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$$

est l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

représenté par les solutions de la forme

$$x=\beta\sqrt{-1},\qquad y=\beta'\sqrt{-1},\qquad z=\beta''\sqrt{-1}$$

de l'équation; mais, si l'on coupe le lieu par un plan $z=h$, les conjuguées de la section ont pour enveloppe imaginaire l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b}=1+\frac{h^2}{c^2}$$

qui n'appartient pas à la surface enveloppe imaginaire des conjuguées du lieu.

Cela tient à ce que celles des cordes réelles de la surface enveloppe imaginaire des conjuguées du lieu, qui seraient parallèles au plan sécant, ne seront généralement pas dans ce plan, ou ne s'y trouveront qu'en nombre limité.

Ainsi, dans l'exemple, les cordes réelles de la surface enveloppe imaginaire, qui seraient parallèles au plan $z=h$, seraient comprises dans le plan $z=0$, deux points imaginaires conjugués de la surface enveloppe imaginaire étant les extrémités d'un même diamètre de la surface.

En un point $x=\beta\sqrt{-1}$, $y=\beta'\sqrt{-1}$, $z=h$ de l'enveloppe imaginaire des conjuguées de la section

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1-\frac{h^2}{c^2},$$

$\frac{f'_x}{f'_y}$ est bien réel, mais ni $\frac{f'_x}{f'_z}$ ni $\frac{f'_y}{f'_z}$ ne le sont : en effet,

$$\frac{f'_x}{f'_y} = \frac{\frac{\beta\sqrt{-1}}{a^2}}{\frac{\beta'\sqrt{-1}}{b^2}}$$

est bien réel, mais

$$\frac{f'_x}{f'_z} = \frac{\frac{\beta\sqrt{-1}}{a^2}}{\frac{h}{c^2}} \quad \text{et} \quad \frac{f'_y}{f'_z} = \frac{\frac{\beta'\sqrt{-1}}{b^2}}{\frac{h}{c^2}}$$

ne le sont pas.

12. Lorsqu'un plan sécant réel donne, dans la surface réelle, une section comprenant, entre autres branches, un anneau fermé, si le plan se déplace parallèlement à lui-même, cet anneau se réduit à un point au moment où le plan devient tangent à la nappe fermée de la surface réelle, et est ensuite remplacé par un anneau d'enveloppe imaginaire des conjuguées de la section.

13. Le plan tangent à une conjuguée (C, C', C'') d'un lieu $f(X, Y, Z) = 0$ en un point (x, y, z) de cette conjuguée est la conjuguée (C, C', C'') de l'onglet de plans

$$X f'_x + Y f'_y + Z f'_z + T f'_t = 0.$$

14. Si le premier membre de l'équation d'un lieu est décomposé en groupes de termes homogènes et représenté par

$$\varphi(X, Y, Z) + \psi(X, Y, Z) + \chi(X, Y, Z) + \ldots,$$

l'équation générale des plans asymptotes à la surface

réelle et à ses conjuguées est

$$\varphi'_\alpha X + \varphi'_\beta Y + \varphi'_\gamma Z + \psi(\alpha, \beta, \gamma) = 0,$$

α, β, γ formant une solution réelle ou imaginaire de l'équation

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = 0.$$

Les conjuguées des cônes asymptotes des surfaces du second degré sont les cônes asymptotes des conjuguées de ces surfaces.

15. Le contour apparent d'une surface $f(X, Y, Z) = 0$, par rapport au plan des xy et parallèlement à l'axe des z, a pour équations

$$f(x, y, z) = 0 \quad \text{et} \quad f'_z(x, y, z) = 0,$$

qui, par l'élimination de z, fourniraient l'équation

$$F(X, Y) = 0$$

du contour apparent proprement dit.

Le lieu $F(X, Y) = 0$, construit dans le plan des $[X, Y]$, se composera en général d'une courbe réelle et de toutes ses conjuguées. La courbe réelle formera le contour apparent proprement dit de la surface réelle représentée par l'équation $f(X, Y, Z) = 0$; mais les conjuguées de cette courbe $F(X, Y) = 0$ ne seront pas les contours apparents des conjuguées de la surface $f(X, Y, Z) = 0$, parce que dans les solutions correspondantes des équations

$$f(x, y, z) = 0 \quad \text{et} \quad f'_z(x, y, z) = 0,$$

le rapport $\frac{\beta'}{\beta}$ des parties imaginaires de x et de y sera bien constant, mais non pas les rapports $\frac{\beta''}{\beta}$ et $\frac{\beta''}{\beta'}$ (¹).

16. Toutes celles des conjuguées d'une même surface qui la touchent en un même point (ce sont celles dont les cordes réelles sont parallèles au plan tangent en ce point) y ont pour indicatrices les conjuguées de l'indicatrice de la surface réelle au même point.

Les autres questions relatives à la courbure des surfaces imaginaires se résolvent par les mêmes méthodes que l'on emploie pour les surfaces réelles.

17. *De la cubature des surfaces, et des périodes des intégrales doubles.* — On trouvera, dans le second Volume de la *Théorie des fonctions de variables imaginaires,* tous les théorèmes préliminaires qui permettent d'établir l'équivalence des chemins qui peuvent se substituer les uns aux autres sans que la valeur de l'intégrale double soit altérée.

Ces propositions ne présentent d'autre intérêt que celui de rendre possible la démonstration *a priori* d'un

---

(¹) Si l'on coupait un lieu $f(X, Y, Z) = 0$ par une série de plans réels, parallèles entre eux et à l'axe des z, les points critiques de chaque section seraient les points d'intersection, par les plans considérés, du contour apparent de la surface $f(X, Y, Z) = 0$, par rapport au plan des $[X, Y]$; et pour instituer, relativement aux intégrales doubles, une méthode analogue à celle que Cauchy a fondée pour les intégrales simples, il faudrait faire jouer au contour apparent de la surface à cuber le même rôle factice que Cauchy avait attribué aux contours apparents, par rapport à l'axe des x, des courbes à quarrer.

J'ai réalisé cette idée en 1872, dans un Mémoire qui a paru, vers 1874, dans le XLIVᵉ Cahier du *Journal de l'École Polytechnique* et que l'on trouvera dans le troisième Volume de ma *Théorie des fonctions de variables imaginaires.*

fait que l'on peut regarder comme évident : c'est qu'une intégrale double est déterminée, à des constantes près, par ses limites, tandis qu'elle serait complètement indéterminée si elle variait d'une manière continue avec le chemin superficiel suivi pour rejoindre les limites.

Nous omettons ici ces théorèmes et nous réduisons toute la théorie à sa plus simple expression.

La quadratrice de la section d'un lieu $f(X, Y, Z) = 0$ par un plan réel admet : 1°, comme périodes réelles, ω, ω', ω'', ... les aires des anneaux fermés de la section de la surface réelle, lorsqu'elle existe et qu'elle est effectivement coupée par le plan réel considéré ; 2°, comme périodes imaginaires, $\omega_1\sqrt{-1}$, $\omega'_1\sqrt{-1}$, $\omega''_1\sqrt{-1}$ les produits par $\sqrt{-1}$ des aires des anneaux fermés des sections faites dans les conjuguées du lieu dont les cordes réelles sont parallèles au plan sécant, mais les aires de tous ceux de ces anneaux fermés qui sont compris entre les deux mêmes branches de la section réelle sont égales ; 3°, comme périodes généralement mixtes, $\omega_2 + \omega_3\sqrt{-1}$, $\omega'_2 + \omega'_3\sqrt{-1}$, ... les valeurs de l'intégrale quadratrice, acquises dans le parcours des anneaux fermés de l'enveloppe imaginaire des conjuguées de la section ; 4° enfin, comme périodes cycliques, $\pi d^2\sqrt{-1}$, $\pi d'^2\sqrt{-1}$, $\pi d''^2\sqrt{-1}$, ... les produits par $\sqrt{-1}$ des aires des parties elliptiques évanouissantes des conjuguées dont les cordes réelles sont parallèles aux asymptotes de la section.

18. Si l'on a coupé le lieu par une série de plans parallèles entre eux et distants les uns des autres de la quantité dh et que Ω soit l'une des périodes de la quadratrice de la section, $\Omega\, dh$ sera un élément d'une des périodes de la cubatrice de la surface et, pour obtenir cette période, il faudra prendre l'intégrale $\int \Omega\, dh$, entre

deux valeurs de h pour lesquelles Ω s'annule, c'est-à-dire entre deux plans tangents au lieu $f(X, Y, Z) = 0$.

19. Si la période considérée est l'aire d'un anneau fermé de la section réelle, elle engendrera un volume enveloppé par une nappe de la surface réelle, fermée dans tous les sens parallèles au plan sécant; et, si cette nappe se ferme encore dans un nouveau sens, non parallèle au plan sécant, la période engendrée sera le volume enfermé par une nappe sphéroïdale de la surface réelle.

20. Si la période considérée est le produit par $\sqrt{-1}$ de l'aire d'un anneau fermé de conjuguée de la section et si cet anneau engendre une nappe fermée de conjuguée de la surface proposée, la période engendrée sera le produit par $\sqrt{-1}$ du volume enfermé dans la nappe fermée de la conjuguée en question.

21. *Toutes les conjuguées fermées d'une même surface, inscrites dans la même nappe de la surface réelle, enveloppent des volumes égaux.* — En effet, comparons d'abord entre elles celles de ces conjuguées dont les cordes réelles sont parallèles à un même plan parallèle à l'axe des z : d'une part, les sections faites dans toutes ces conjuguées par un même plan quelconque, parallèle au plan considéré, auront toutes même aire et, d'autre part, ces sections s'évanouiront toutes dans les mêmes plans; car les courbes de contact de toutes ces conjuguées avec la surface réelle ne seront autre chose que les courbes de contact, avec cette même surface réelle, de tous les cylindres qui lui seraient inscrits parallèlement aux cordes réelles de toutes les conjuguées considérées, c'est-à-dire à toutes les droites parallèles à un même plan. Or, toutes ces courbes se couperont aux mêmes points de

la surface réelle, lesquels seront les points de contact avec cette surface réelle de ses plans tangents parallèles au plan considéré; de sorte que, déjà, toutes les conjuguées en question envelopperont des volumes égaux et, en particulier, égaux au volume enveloppé par la conjuguée dont les cordes réelles seraient parallèles à l'axe des z.

Mais un plan parallèle à l'axe des z pourra être dirigé parallèlement aux cordes réelles d'une conjuguée quelconque, non comprise parmi les précédentes, et le volume enveloppé par cette nouvelle conjuguée fermée sera encore égal au volume enfermé par la conjuguée dont les cordes réelles seraient parallèles à l'axe des z.

La démonstration du théorème énoncé s'étend donc à toutes les conjuguées.

Il en résulte que le produit par $\sqrt{-1}$ du volume enveloppé par l'une quelconque des conjuguées fermées d'une surface réelle $f(x,y,z)=0$, inscrites dans la même nappe réelle de cette surface, est l'une des périodes de l'intégrale cubatrice de cette surface.

Ces propositions se trouvaient déjà dans mon Mémoire de 1853 et Cauchy les énonce dans son Rapport de 1854 sur ce Mémoire.

22. Si la période considérée correspond au parcours d'un anneau fermé de l'enveloppe imaginaire des conjuguées de la section faite dans la surface par le plan réel qui se déplace parallèlement à lui-même, cette période s'annulera lorsque le plan sécant deviendra tangent soit à la surface réelle et à l'enveloppe imaginaire des conjuguées de cette surface, si elles coexistent, soit à celle qui subsistera seule. D'ailleurs l'intégrale $\int \Omega \, dh$, évaluée entre deux valeurs de h pour lesquelles le plan mobile deviendrait tangent, soit à la surface réelle, soit à l'enveloppe imaginaire de ses conjuguées, fournira une pé-

riode, généralement imaginaire, de l'intégrale cubatrice du lieu considéré.

Ainsi, par exemple, si l'on rapporte un hyperboloïde à deux nappes à trois de ses diamètres conjugués, dont l'un, l'axe des z, soit le diamètre transverse, l'équation de la surface sera

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} - \frac{z^2}{c'^2} = -1.$$

Si l'on coupe la surface par un plan $z = h$, compris entre les plans tangents

$$z = -c' \qquad \text{et} \qquad z = +c',$$

la section totale aura pour équation

$$\frac{a^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = \frac{h^2}{c'^2} - 1,$$

et cette équation représentera une infinité d'hyperboles ayant pour enveloppe imaginaire une courbe qui, réalisée, sera l'ellipse

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = 1 - \frac{h^2}{c'^2};$$

la période, réelle dans ce cas, de la quadratrice de la section sera

$$\Omega = \pi a' b' \sin(\mathrm{XOY}),$$

et la période de la cubatrice du lieu, engendrée par cette période superficielle, sera

$$\int_{-c'}^{+c'} \pi a' b' \sin(xoy)\, dh \sin(\mathrm{Z}, \mathrm{XOY}),$$

c'est-à-dire le volume de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} = 1$$

ou

$$\frac{4}{3}\pi abc,$$

a, b, c désignant les axes de l'hyperboloïde proposé; car tous les ellipsoïdes, tels que $\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} + \frac{z^2}{c'^2} = 1$, seront équivalents, en volume, comme on le sait.

De sorte que, dans ce cas particulier, le fait, analogue à celui de l'équivalence en volume des conjuguées fermées d'une même surface, inscrites dans une même nappe de cette surface, se présente de lui-même relativement aux lieux des enveloppes imaginaires des sections faites dans la surface par des plans parallèles de direction arbitraire; dans le cas particulier qui vient d'être examiné, les nappes fermées, lieux de ces enveloppes, entourent des volumes égaux.

Cette proposition pourrait être généralisée. Elle n'est pas indiquée dans ma *Théorie des fonctions de variables imaginaires,* où la question des intégrales doubles a été prise à un tout autre point de vue.

23. Enfin, si la période considérée est une des périodes cycliques de la quadratrice de la section faite dans la surface par le plan mobile, c'est-à-dire le produit par $\sqrt{-1}$ de l'aire d'une ellipse indéfiniment allongée dans un sens et indéfiniment aplatie dans l'autre, elle s'annulera dans deux plans, et l'intégrale correspondante

$$\int \pi\, d^2 dh$$

évaluée entre ces deux plans prendra une valeur numérique qui sera le produit par $\sqrt{-1}$ du volume fini d'un ellipsoïde ayant un axe infini, un axe fini et un axe infiniment petit.

J'ai donné le nom de *périodes sphériques* à ce genre de périodes de l'intégrale cubatrice d'une surface.

Soit

$$\varphi(x, y, z) + \psi(x, y, z) + \chi(x, y, z) + \ldots = 0$$

l'équation de la surface la plus générale de degré m, décomposée en groupes de termes homogènes, de sorte que φ, ψ, χ, ... soient des polynômes homogènes de degrés m, $m-1$, $m-2$, ...

Soient d'ailleurs

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{1}$$

les équations d'une direction asymptotique, de sorte que

$$\varphi(\alpha, \beta, 1) = 0,$$

et

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z}{1}$$

soient les équations d'une parallèle à cette direction : si l'on veut avoir les intersections de cette parallèle avec la surface, on pourra remplacer dans l'équation proposée x, y et z par

$$x_0 + \alpha\rho, \quad y_0 + \beta\rho \quad \text{et} \quad \rho,$$

ce qui donnera

$$\begin{aligned}\rho^m\varphi(\alpha, \beta, 1) &+ \rho^{m-1}[(x_0\varphi'_\alpha + y_0\varphi'_\beta + \psi(\alpha, \beta, 1)]\\ &+ \frac{\rho^{m-2}}{1.2}[x_0^2\varphi''_{\alpha^2} + 2x_0y_0\varphi''_{\alpha\beta} + y_0^2\varphi''_{\beta^2}\\ &\qquad + 2x_0\psi'_\alpha + 2y_0\psi'_\beta + 2\chi(\alpha, \beta, 1)] + \ldots = 0;\end{aligned}$$

mais le terme en ρ^m disparaîtra de lui-même, $\varphi(\alpha, \beta, 1)$ étant nul par hypothèse.

Si l'on veut exprimer que la droite

$$\frac{x - x_0}{\alpha} = \frac{y - y_0}{\beta} = \frac{z}{1}$$

est elle-même une asymptote, il faudra poser

$$x_0\varphi'_\alpha + y_0\varphi'_\beta + \psi(\alpha, \beta, 1) = 0,$$

ce qui donnera une relation entre les coordonnées x_0, y_0 de la trace sur le plan des xy d'une asymptote paral-

lèle à la direction $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{1}$, d'où l'on voit que les asymptotes parallèles à une même direction asymptotique sont généralement dans un même plan.

Si l'on voulait déterminer les asymptotes, parallèles à la même direction, qui rencontrent la surface en trois points situés à l'infini, il faudrait poser la nouvelle condition

$$x_0 \varphi''_{\alpha^2} + 2 x_0 y_0 \varphi''_{\alpha\beta} + y_0^2 \varphi''_{\beta^2} + 2 x_0 \psi'_{\alpha} + 2 y_0 \psi'_{\beta} + 2\chi(\alpha, \beta, 1) = 0;$$

d'où l'on voit, comme cela avait été annoncé, que, parmi toutes les asymptotes parallèles à une même direction, il y en aura généralement deux, et deux seulement, qui rencontreront la surface en trois points situés à l'infini, ou, ce qui revient au même, que, si un plan quelconque se déplace parallèlement à lui-même, chacune des périodes cycliques de la quadratrice de la section de la surface par ce plan mobile s'annulera deux fois et deux fois seulement. (*A suivre.*)

ERRATA.

Page 217, lignes 10 et 22, *remplacez* les limites inférieures des intégrales par 0, 1, 2, 3, ..., *n*.

Page 230, ligne 20, *au lieu de n, lisez x*.

» lignes 22 et 27, *au lieu de p, lisez* μ.

» ligne 28, *au lieu de* p^2, *lisez* μ^2 et *au lieu de* $-4aqp$, *lisez* $-4aq\mu$.

MULTIPLICATION DES DÉTERMINANTS (¹);

PAR M. E. CARVALLO,
Examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

1. PROBLÈME. *Représenter le produit de deux déterminants d'ordres m et n par un déterminant d'ordre $m+n$.* — Considérons les déterminants des deux systèmes

$$(1)\qquad \begin{cases} y_1 = a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + a_1^3 x_3, \\ y_2 = a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + a_2^3 x_3, \\ y_3 = a_3^1 x_1 + a_3^2 x_2 + a_3^3 x_3, \end{cases}$$

$$(2)\qquad \begin{cases} y_4 = a_4^4 x_4 + a_4^5 x_5, \\ y_5 = a_5^4 x_4 + a_5^5 x^5. \end{cases}$$

On a, d'après la définition que j'ai donnée des déterminants (¹),

$$(1')\qquad [y_1 y_2 y_3] = \frac{[y_1 y_2 y_3]}{[x_1 x_2 x_3]} [x_1 x_2 x_3],$$

$$(2')\qquad [y_4 y_5] = \frac{[y_4 y_5]}{[x_4 x_5]} [x_4 x_5],$$

et en opérant la *multiplication extérieure* sur les deux membres de ces égalités,

$$(3)\qquad [y_1 y_2 y_3 y_4 y_5] = \frac{[y_1 y_2 y_3]}{[x_1 x_2 x_3]} \frac{[y_4 y_5]}{[x_4 x_5]} [x_1 x_2 x_3 x_4 x_5].$$

Cette formule exprime que le produit des deux déterminants $\frac{[y_1 y_2 y_3]}{[x_1 x_2 x_3]}$, $\frac{[y_4 y_5]}{[x_4 x_5]}$, définis par les systèmes (1)

(¹) Cet article fait suite à celui que j'ai publié récemment (*Nouv. Ann.*, 3ᵉ série, t. X; mai 1891).

et (2), est égal au déterminant unique du cinquième ordre $\frac{[y_1 y_2 y_3 y_4 y_5]}{[x_1 x_2 x_3 x_4 x_5]}$ qu'on obtient en regardant (1) et (2) comme formant un système unique de cinq fonctions y à cinq variables x.

Remarque. — Si dans les seconds membres du système (2), par exemple, on introduit des termes en x_1, x_2, x_3, ceux-ci donneront dans la formule (2′) de nouveaux termes en $[x_1 x_2]$, ..., etc.; mais, dans la multiplication de (1′) et (2′), ces termes disparaîtront. La formule (3) subsiste. On peut donc, dans le déterminant $\frac{[y_1 y_2 y_3 y_4 y_5]}{[x_1 x_2 x_3 x_4 x_5]}$ de cette formule, introduire des éléments arbitraires dans les colonnes 1, 2, 3 des lignes 4, 5 [1].

2. Problème. *Représenter le produit de deux déterminants de même ordre par un déterminant de même ordre.* — Soient A et B les valeurs des déterminants des deux systèmes

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} y_1 &= a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + a_1^3 x_3,\\ y_2 &= a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + a_2^3 x_3,\\ y_3 &= a_3^1 x_1 + a_3^2 x_2 + a_3^3 x_3,\end{aligned}\right.$$

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} z_1 &= b_1^1 y_1 + b_1^2 y_2 + b_1^3 y_3,\\ z_2 &= b_2^1 y_1 + b_2^2 y_2 + b_2^3 y_3,\\ z_3 &= b_3^1 y_1 + b_3^2 y_2 + b_3^3 y_3.\end{aligned}\right.$$

---

[1] L'expression du théorème avec ces éléments arbitraires λ et dans la notation usuelle est celle-ci :

$$\begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 & 0 & 0\\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 & 0 & 0\\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 & 0 & 0\\ \lambda_4^1 & \lambda_4^2 & \lambda_4^3 & a_4^4 & a_4^5\\ \lambda_5^1 & \lambda_5^2 & \lambda_5^3 & a_5^4 & a_5^5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3\\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3\\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_4^4 & a_4^5\\ a_5^4 & a_5^5 \end{vmatrix}.$$

On a, d'après ma définition des déterminants,

$$[y_1 y_2 y_3] = \mathrm{A}.[x_1 x_2 x_3], \qquad [z_1 z_2 z_3] = \mathrm{B}.[y_1 y_2 y_3],$$

et par suite

(3) $$[z_1 z_2 z_3] = \mathrm{B}.\mathrm{A}.[x_1 x_2 x_3].$$

Cette formule montre que le produit B.A est égal à la valeur C du déterminant obtenu en exprimant les z en fonction des x. Il suffit de remplacer, dans les formules (2), les y par leurs valeurs (1). L'élément qui est à la ligne p et à la colonne q de ce nouveau déterminant C est visiblement le coefficient de x_q dans l'expression de z_p. C'est

(4) $$c_p^q = b_p^1 a_1^q + b_p^2 a_2^q + b_p^3 a_3^q.$$

Remarques. — 1° La méthode s'étend au produit de plusieurs déterminants.

2° Elle ne suppose pas qu'on ait le même nombre de variables dans les formules (1) et (2). Si, par exemple, les formules (1) donnent seulement y_1, y_2 en fonction de x_1, x_2, x_3; si, de plus, les formules (2) donnent z_1, z_2, z_3 en fonction de y_1, y_2, la méthode montre que le déterminant C est nul.

3° Le théorème s'exprime intuitivement par la formule $\frac{[z_1 z_2 z_3]}{[x_1 x_2 x_3]} = \frac{[z_1 z_2 z_3]}{[y_1 y_2 y_3]} \, \frac{[y_1 y_2 y_3]}{[x_1 x_2 x_3]}$. On reconnaît le théorème des fonctions de fonctions pour les dérivées et les déterminants fonctionnels.

3. Déterminants réciproques. — Je suppose que dans le système (2) (n° 2), b_p^q soit égal au déterminant mineur de l'élément a_q^p. Le déterminant B est alors appelé le *réciproque* du déterminant A [1]. La formule (4) offre alors

[1] Salmon, *Leçons d'Algèbre supérieure.*

deux cas. Si $q = p$, $c_p^p = b_p^1 a_1^p + b_p^2 a_2^p + b_p^3 a_3^p$ représente le développement du déterminant A suivant les éléments de la colonne p. Si q est différent de p, c_p^q est le développement du même déterminant où l'on a remplacé la colonne p par la colonne q. Ce nouveau déterminant est nul comme ayant deux colonnes identiques. Ainsi, le déterminant C se réduit aux éléments de la première diagonale et l'on a

$$(5) \qquad z_1 = \mathrm{A}x_1, \qquad z_2 = \mathrm{A}x_2, \qquad z_3 = \mathrm{A}x_3.$$

On en conclut $\mathrm{C} = \mathrm{A}^3$. Plus généralement, s'il s'agit de déterminants d'ordre n, on a $\mathrm{C} = \mathrm{A}^n$, et, en remplaçant C par sa valeur BA,

$$(6) \qquad \mathrm{B} = \mathrm{A}^{n-1}.$$

D'autre part, si l'on porte les valeurs (5) dans les formules (2), on obtient

$$(2') \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{A}x_1 = b_1^1 y_1 + b_1^2 y_2 + b_1^3 y_3, \\ \mathrm{A}x_2 = b_2^1 y_1 + b_2^2 y_2 + b_2^3 y_3, \\ \mathrm{A}x_3 = b_3^1 y_1 + b_3^2 y_2 + b_3^3 y_3. \end{array} \right.$$

Ainsi, des formules (1) *on déduit les formules* (2'). Je peux opérer de même sur les formules (2'). Si je représente par des lettres d les éléments du déterminant D, réciproque de B, j'aurai, en appliquant la même règle,

$$(1') \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mathrm{B}y_1 = d_1^1 \mathrm{A}x_1 + d_1^2 \mathrm{A}x_2 + d_1^3 \mathrm{A}x_3, \\ \mathrm{B}y_2 = d_2^1 \mathrm{A}x_1 + d_2^2 \mathrm{A}x_2 + d_2^3 \mathrm{A}x_3, \\ \mathrm{B}y_3 = d_3^1 \mathrm{A}x_1 + d_3^2 \mathrm{A}x_2 + d_3^3 \mathrm{A}x_3. \end{array} \right.$$

En comparant ces égalités (1') aux égalités (1), on en conclut

$$d_p^q \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}} = a_p^q,$$

et, en remplaçant B par sa valeur A^{n-1},

(7) $$d_p^q = A^{n-2} a_p^q.$$

Les formules (6) et (7) s'énoncent respectivement ainsi :

1° Le réciproque d'un déterminant A d'ordre n a pour valeur A^{n-1};

2° Le réciproque du réciproque d'un déterminant A d'ordre n a pour éléments ceux de A multipliés par A^{n-2}.

SUR UNE GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DES PROJECTIONS;

Par M. E. CARVALLO,
Examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

1. Il s'agit d'une conséquence immédiate du théorème des projections. Elle est bien connue, très employée en Mécanique pour évaluer le travail d'une force, et pourtant elle est généralement omise dans les cours de Mathématiques spéciales. Serait-elle donc de peu d'usage en Trigonométrie et en Géométrie analytique? Je veux montrer ici qu'au contraire, dans les deux cas, elle peut rendre de grands services et simplifier beaucoup les démonstrations. Il me suffira de prendre un exemple simple dans chacune de ces matières. Voici d'abord l'énoncé :

2. Théorème. — *Si deux segments* A *et* B *sont les résultantes de plusieurs autres*, $A_1, A_2, A_3, \ldots, B_1, B_2, B_3, \ldots$, *le produit des valeurs algébriques de ces segments par le cosinus de l'angle des axes sur lesquels ils sont comptés est égal à la somme des produits qu'on*



obtient en combinant toutes les composantes du premier segment avec toutes les composantes du second.

Ce théorème est une conséquence si évidente et si bien connue du théorème des projections que je me dispense de le démontrer. On le représente commodément par la formule

$$(A_1 + A_2 + \ldots) \mid (B_1 + B_2 + \ldots) = \Sigma A_i \mid B_j, \qquad (i, j = 1, 2, \ldots),$$

en désignant par $A_1 + A_2, \ldots$ la résultante A, et par $A \mid B$ le produit des deux segments par le cosinus de leur angle. Cette formule est très mnémonique, étant identique à celle de la multiplication algébrique d'une somme par une somme.

3. Première application. — *Distance d'un point à l'origine.* — Soient X, Y, Z les vecteurs qui forment les trois composantes de OM sur les trois axes Ox, Oy, Oz; soient x, y, z leurs valeurs algébriques, λ, μ, ν les angles des axes yOz, zOx, xOy. On a

$$\begin{aligned}\overline{OM}^2 = OM \mid OM &= (X + Y + Z) \mid (X + X + Z) \\ &= X \mid X + Y \mid Y + Z \mid Z + 2Y \mid Z + 2Z \mid X + 2X \mid Y \\ &= x^2 + y^2 + z^2 \\ &\quad + 2yz \cos\lambda + 2zx \cos\mu + 2xy \cos\nu.\end{aligned}$$

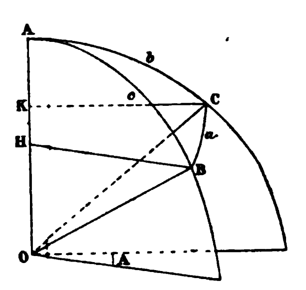
4. Deuxième application. — *Formule fondamentale de la Trigonométrie sphérique*

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

Soient le triangle sphérique ABC, O le centre de la sphère. Je dois évaluer $\cos a = OB \mid OC$. Pour cela, je décompose le segment OB en deux autres, OH et HB,

savoir :

OH $=\cos c$ suivant OA,
HB $=\sin c$ suivant la perpendiculaire à OA, dans le plan AOB.



Je décompose de même OC suivant OK et KC. J'aurai

$$\begin{aligned}\cos a &= \mathrm{OB} \mid \mathrm{OC}\\ &= (\mathrm{OH}+\mathrm{HB}) \mid (\mathrm{OK}+\mathrm{KC})\\ &= \mathrm{OH} \mid \mathrm{OK} + \mathrm{OH} \mid \mathrm{KC} + \mathrm{HB} \mid \mathrm{OK} + \mathrm{HB} \mid \mathrm{KC}\\ &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \mathrm{A}.\end{aligned}$$

C. Q. F. D.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1891).

Mathématiques élémentaires.

On donne une sphère S et deux droites D, D′, tangentes à cette sphère.

1° Par un point quelconque de la droite D on mène les droites G et G′ qui touchent la sphère S et rencontrent la droite D′; démontrer que les points de contact des droites G et G′ avec la sphère S décrivent deux cercles C et C′.

2° Démontrer que les droites G, qui touchent la sphère S en des points situés sur le cercle C, sont tangentes à une infinité de sphères Σ.

3° Trouver combien il y a de sphères Σ tangentes à un plan donné Q. Discuter le problème et trouver le lieu des traces des droites G sur le plan Q.

Mathématiques spéciales.

Étant donnés un triangle ABC et deux points P et Q situés dans son plan, on considère les coniques S qui touchent le côté CA en A et passent par les points P et Q; on considère de même les coniques S' qui touchent le côté CB en B et passent par les points P et Q.

1° Soient M et N les points d'intersection d'une conique S avec les droites CP et CQ; M' et N' les points d'intersection d'une conique S' avec les mêmes droites. Démontrer que la droite MN passe par un point fixe A_1 et la droite M'N' par un point fixe B_1, quand les coniques S et S' varient.

2° En substituant le triangle CA_1B_1 au triangle CAB dans la définition des deux séries de coniques, on obtiendra deux nouveaux points A_2, B_2 et ainsi de suite; trouver l'équation de la droite A_nB_n et chercher sa position limite quand n devient infini.

3° On suppose que les coniques S et S' varient de manière que les deuxièmes tangentes menées du point C à ces courbes soient conjuguées harmoniques par rapport aux droites CP et CQ; trouver, dans cette hypothèse, le lieu du point d'intersection des polaires d'un point donné H par rapport à ces coniques.

4° Lorsque les coniques S et S' varient en restant tangentes, trouver le lieu de leur point de contact.

Composition sur l'Analyse et ses applications géométriques.

Étant donnée l'équation

$$F(x, y, z, p, q) = 0,$$

dans laquelle z désigne une fonction des deux variables indépendantes x et y et où l'on a posé

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \qquad q = \frac{\partial z}{\partial y},$$

définir ce que l'on entend : 1° par intégrale complète, intégrale générale, intégrale singulière ; 2° par caractéristiques. Montrer comment on peut déduire l'intégrale singulière soit d'une intégrale complète, soit de l'équation différentielle.

Application.

1° Étant donnée l'équation

$$m^2 pq + 2xyz - xy(px + qy) = 0,$$

dans laquelle m désigne une ligne donnée, trouver une intégrale complète ;

2° Déduire de cette intégrale complète la surface intégrale S qui passe par la droite D dont les équations sont

$$y = 0, \qquad x = z.$$

Déterminer directement, en intégrant leurs équations différentielles, les caractéristiques dont le lieu est la surface S ;

3° Étudier cette surface dans le voisinage de l'origine ; déterminer sa forme générale à l'aide des sections faites par des plans passant par l'axe des y.

4° Trouver les lignes suivant lesquelles la surface S touche la surface représentée par l'intégrale singulière.

Composition de Mécanique rationnelle.

Un trièdre trirectangle OXYZ tourne avec une vitesse constante ω autour de son arête OZ, qui est dirigée en sens contraire de la pesanteur ; il entraîne avec lui un paraboloïde P qui, rapporté aux axes OX, OY, OZ, aurait pour équation

$$x^2 - y^2 = 2pz.$$

Un point M de masse 1, de poids g, assujetti à se mouvoir sur la surface de P, est attiré vers le sommet O du paraboloïde par une force égale à $\frac{2g}{p}$ MO ; en outre, MA, MB étant les perpendiculaires abaissées de M sur les génératrices rectilignes de P qui passent au sommet O, le point M est encore sollicité par deux forces dirigées suivant les *segments* AM, BM, et égales, la première à $\frac{3g}{p}$ AM, la seconde à $\frac{3g}{p}$ BM.

La position du mobile M sera définie par les valeurs des paramètres λ, μ, qui figurent dans les équations

$$\frac{x^2}{\lambda - p} + \frac{y^2}{\lambda + p} = \lambda - 2z, \qquad \frac{x^2}{\mu + p} + \frac{y^2}{\mu - p} = \mu + 2z$$

des paraboloïdes homofocaux à P et passant par le point M.

Cela posé, on demande :

1° De former l'équation aux dérivées partielles dont, suivant le théorème de Jacobi, il suffirait de connaître une intégrale complète pour en déduire, par de simples différentiations, les équations du mouvement du point M;

2° De trouver cette intégrale complète et les équations du mouvement quand on suppose $\omega = 0$;

3° D'intégrer l'équation de la trajectoire et d'indiquer la forme de cette ligne quand, ω étant toujours nul, on a, à l'instant initial,

$$x = y = p\sqrt{\frac{3}{2}},$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{3 + 3\sqrt{3}}{8}\sqrt{pg},$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{9 + \sqrt{3}}{8}\sqrt{pg}.$$

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE EN 1891.

Géométrie analytique.

On donne deux axes rectangulaires Ox, Oy, et, sur l'axe des x, un point A dont l'abscisse est a. On considère le faisceau des ellipses pour lesquelles le point O est un sommet d'axe non focal et la parallèle à l'axe des y menée par le point A une directrice.

1° Démontrer que la condition nécessaire et suffisante pour que deux ellipses du faisceau considéré passent par un point donné P est que ce point soit à l'intérieur du cercle qui a le point O pour centre et OA pour rayon.

2° Démontrer que ce cercle a un double contact, réel ou imaginaire, avec chacune des ellipses du faisceau.

3° Limiter les régions du plan dans lesquelles doit être situé un point P :

1° Pour qu'une seule des deux ellipses du faisceau qui passent par ce point ait avec le cercle un double contact réel;

2° Pour que chacune des deux ellipses du faisceau qui passent par ce point ait avec le cercle un double contact réel;

3° Pour qu'aucune des deux ellipses du faisceau qui passent par ce point n'ait avec le cercle un double contact réel;

4° Lieu des pieds des normales menées par le point O à toutes les ellipses du faisceau.

Physique.

I. Une pompe aspirante et foulante, de capacité C, est reliée, par le tube d'aspiration, à un réservoir de volume A contenant un gaz sous pression H_0, et, par le tube de refoulement, à un réservoir de capacité B contenant le même gaz sous pression P_0. Le piston est au début au bas de sa course et la machine ne possède pas d'espace nuisible.

Calculer les pressions successives : H_1, H_2, ..., H_n, P_1, P_2, ..., P_n, dans les deux récipients lorsqu'on fait fonctionner la pompe.

II. Deux prismes A et B, d'indices n_1 et n_2 dont les arêtes sont parallèles et opposées, se touchent par une face.

Écrire, *sans démonstration,* les équations qui règlent la marche à travers cet appareil d'un rayon lumineux simple, situé dans un plan perpendiculaire aux arêtes.

A quoi se réduisent ces équations si le rayon incident et le rayon émergent sont, respectivement, perpendiculaires aux faces d'entrée et de sortie?

Chimie.

I. Comment établit-on par synthèse la composition des gaz suivants :

Acide chlorhydrique ; acide sulfureux ; acide carbonique.

Dire si la composition de ces gaz répond aux lois de Gay-Lussac.



II. On prend dans l'eudiomètre 100^{cc} d'un mélange d'oxyde de carbone et d'hydrogène. On y ajoute 50^{cc} d'oxygène pur et l'on fait détoner. Il se dépose de l'eau sur les parois de l'eudiomètre et il reste 50^{cc} de gaz acide carbonique pur.

Quelles sont les proportions de gaz oxyde de carbone et de gaz hydrogène dans le mélange primitif?

Calcul trigonométrique.

1° Calculer les angles d'un triangle isoscèle dont la base et la hauteur sont dans le rapport de 1 à 0,65243724;

2° Calculer la base et la surface de ce triangle sachant que le rayon du cercle circonscrit est de 35275^{m},17.

Épure.

Placer la ligne de terre parallèlement aux grands côtés du cadre à 0^{m},10 du grand côté inférieur. Porter sur cette ligne, à partir du petit côté gauche du cadre, 0^{m},19. Le point obtenu est la projection horizontale de l'axe vertical d'une surface gauche de révolution. Le cercle de gorge, qui a 0^{m},03 de rayon, est projeté verticalement à 0^{m},08 au-dessus de la ligne de terre. La droite de front, qui engendre la surface gauche, est projetée en avant de la ligne de terre et a sa trace horizontale à 0^{m},03 du petit côté gauche du cadre, de sorte que sa pente est $\frac{1}{2}$.

Par la trace horizontale de cette génératrice, on fait passer un cercle de 0^{m},04 de rayon, dont le centre est à 0^{m},05 en avant de la ligne de terre et est plus rapproché de l'axe de la surface gauche que ne l'est la trace horizontale de la génératrice.

Ce cercle est la base d'un cylindre dont les génératrices sont parallèles à la génératrice de front donnée de la surface gauche de révolution.

Représenter, par ses projections et ses contours apparents, la portion du cylindre, supposé plein et opaque, comprise entre le plan horizontal de projection et le plan horizontal situé à 0^{m},16 au-dessus de celui-ci, et extérieure à la surface gauche.

L'extérieur de la surface gauche est la portion de l'espace où n'est pas situé l'axe de révolution.

On n'indiquera à l'encre rouge que les constructions nécessaires pour déterminer un point *quelconque* de la courbe d'intersection des deux surfaces et la tangente en ce point, les points extrêmes, les points situés sur les contours apparents, les asymptotes.

On exposera succinctement, sur une feuille à part, le procédé suivi pour chacune des déterminations précédentes.

Titre extérieur. — Cylindre limité par une surface gauche.

Ce titre, en lettres dessinées, est de rigueur. Le cadre a $0^m,45$ sur $0^m,27$.

CONCOURS GÉNÉRAL DE 1891.

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES.

Mathématiques.

On donne une quadrique Q et une sphère S de rayon nul ayant pour centre le point P; soit Σ une quelconque des quadriques passant par l'intersection de la quadrique Q et de la sphère S.

1° Démontrer que le cône, ayant pour sommet le point P et pour base la section de la surface Σ par un plan touchant la quadrique Q en un point quelconque M, a pour un de ses axes de symétrie la droite PM.

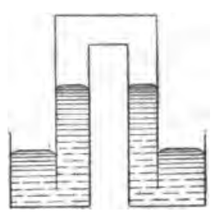
2° Trouver le nombre des quadriques Σ qui se réduisent à de véritables cônes et les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'un de ces cônes devienne un véritable cylindre ou un système de deux plans réels.

3° La quadrique Q et le point P étant donnés, examiner si la propriété énoncée au numéro premier peut subsister, quand on remplace la sphère-point S par une quadrique convenablement choisie.

Physique.

I. Chaleur spécifique des gaz.

II. A l'intérieur d'un vase cylindrique en forme de cloche, fixé à sa partie supérieure, flotte un cylindre semblable dont le bord est relevé en forme de gouttière; l'espace compris



entre les deux cylindres est rempli partie par de l'air, partie par du mercure; et le système se trouve ainsi en équilibre pour une pression atmosphérique donnée.

Quel sera l'effet produit par une variation de la pression extérieure, et comment pourrait-on faire de l'appareil un baromètre inscripteur?

III. Démontrer que, si l'on observe l'image d'un objet donnée par un système optique quelconque symétrique autour d'un axe, le grossissement reste le même, quand, le système demeurant fixe, on échange les positions de l'œil et de l'objet.

Chimie.

I. Analogies et différences physiques et chimiques du brome et de l'iode. Leurs principaux composés.

II. On chauffe $12^{gr},400$ de phosphore avec un excès d'hydrate de baryte dissous dans l'eau. On admet qu'il ne se produit ni hydrogène libre, ni acide phosphorique et que le gaz dégagé se compose de $\frac{9}{10}$ de phosphure d'hydrogène gazeux et de $\frac{1}{10}$ de vapeurs d'hydrogène phosphoré liquide. Après dissolution du phosphore, le liquide est traité par un courant d'acide carbonique en excès et filtré. A cette dissolution, on

ajoute de l'acide sulfurique dilué tant qu'il se forme un précipité; on filtre de nouveau, on lave et l'on sèche le précipité.

Dans la dernière liqueur filtrée, on fait passer un courant de chlore en excès, puis on évapore et l'on calcine en s'arrêtant avant la volatilisation du produit solide.

On demande :

1° Le poids du précipité donné par l'acide sulfurique;

2° La nature et le poids du produit contenu dans le liquide séparé de ce précipité;

3° Le poids de chlore utilisé par cette dissolution;

4° La nature et le poids du produit obtenu après évaporation et calcination.

On donne l'équivalent du baryum : Ba = 68,5.

PHILOSOPHIE.

On donne dans un plan deux cercles dont les centres sont les points O et O′ et qui se coupent aux points A et B; par le point A, on mène, dans le plan des cercles donnés, une droite quelconque qui coupe le premier cercle aux points A et C et le second aux points A et C′. On forme le triangle BCC′. Soit I le centre du cercle inscrit dans le triangle BCC′ et soient E et E′ les centres des cercles exinscrits à ce même triangle, le premier dans l'angle C, le second dans l'angle C′.

1° Trouver le lieu décrit par chacun des points I, E, E′ quand la droite ACC′ tourne autour du point A.

2° Mener la droite ACC′ de façon que l'aire du triangle BCC′ soit la plus grande possible.

3° Mener la droite ACC′ de façon que l'aire du triangle IEE′ soit la plus grande possible.

4° Dans quel cas la position de la droite ACC′, pour laquelle l'aire du triangle BCC′ est la plus grande possible, est-elle aussi celle pour laquelle l'aire du triangle IEE′ est la plus grande possible?

SECONDE.

I. Quelles sont les valeurs des inconnues x, y, z qui vérifient l'équation

$$x - 2y + 4z = 7,$$

sachant qu'elles doivent satisfaire au système

$$3x + 8z = 7y,$$
$$x + 5y = 3z,$$
$$3x + 25z = 129y?$$

II. Soit P le parallélépipède ABCDA'B'C'D', les points A et A' étant opposés, ainsi que B et B', etc. Par chacun des sommets on fait passer le plan parallèle au plan déterminé par les secondes extrémités des trois arêtes aboutissant à ce sommet. Ainsi par A on fait passer le plan parallèle au plan BDC', et ainsi des autres :

1° Donner une construction des sommets du solide R limité par ces plans, en supposant connus les sommets du parallélépipède P.

2° Inversement déduire les sommets du parallélépipède P des sommets supposés connus du solide R.

3° Quelles particularités présente le polyèdre R quand P est un rhomboèdre, ou un parallélépipède rectangle ou un cercle?

4° Calculer le rapport du volume du polyèdre R au parallélépipède P.

Nota. — Le rhomboèdre est un parallélépipède dont les faces sont des losanges égaux.

TROISIÈME.

I. Calculer le nombre des multiples du nombre entier B contenus dans la suite

$$A(B+1),\quad A(B+2),\quad \ldots,\quad A \times nB;$$

A et n sont des nombres entiers donnés.

Appliquer au cas où

$$A = 750, \qquad B = 1200, \qquad n = 80.$$

II. 1° Étant donné un triangle ABC, construire un point M tel que ses distances aux côtés soient proportionnelles aux nombres donnés α, β, γ. Nombre des solutions. Examen du cas où α, β, γ sont égaux entre eux et du cas où ces nombres sont inversement proportionnels aux longueurs des côtés correspondants.



2° Si l'on suppose connus les points comme M correspondant à un même triangle, construire les sommets de ce triangle.

3° Étant donné arbitrairement un point M dans le plan du triangle ABC, construire tous les points dont les distances aux côtés de ABC sont proportionnelles aux distances du point M à ces côtés. Discuter le nombre des solutions.

4° Étant données les longueurs a, b, c des côtés du triangle ABC et les nombres α, β, γ, établir la formule générale donnant la distance au côté BC d'un des points qui, comme M, satisfont à 1°.

CONCOURS POUR LES BOURSES DE LICENCE EN 1890.

I. En désignant par m un nombre entier positif, on considère deux polynômes $\varphi(x)$, $\psi(x)$ entiers en x, de degré inférieur à m, et tels que l'on ait identiquement

$$(1-x)^m\varphi(x)+x^m\psi(x)=1.$$

1° Démontrer que l'on a identiquement

$$\begin{gathered}\psi(x)=\varphi(1-x),\\ \varphi(x)=\psi(1-x),\\ (1-x)\varphi'(x)-m\varphi(x)=\alpha x^m-1.\end{gathered}$$

Dans cette dernière égalité, α désigne une constante et $\varphi'(x)$ la dérivée de $\varphi(x)$: en déduire, à l'aide du théorème de Rolle, que le polynôme $\varphi(x)$ ne peut pas avoir deux racines négatives.

2° Déterminer en fonction de m la constante α et les coefficients du polynôme $\varphi(x)$; démontrer que ce polynôme a au plus une racine réelle.

II. Étant donnés deux axes rectangulaires Ox, Oy, on considère un losange PQP'Q' ayant les deux sommets P, P' sur l'axe des x et les deux sommets Q, Q' sur l'axe des y. On supposera $OP=p$, $OQ=q$.

1° Par un point M, de coordonnées x, y, passent deux coniques inscrites dans le losange; former l'équation du second degré en m, qui admet pour racines les coefficients angulaires des tangentes en M à ces deux coniques.

2° Trouver le lieu des points M où se coupent sous un angle donné deux coniques inscrites dans le losange.

3° Déduire de l'équation aux coefficients angulaires que ce dernier lieu doit se composer d'hyperboles.

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE EN 1890.

CONCOURS PRINCIPAL.

Géométrie analytique (4h).

On considère les coniques en nombre infini qui passent par deux points A et B et qui sont telles que, pour chacune d'elles, la droite AB soit l'un des deux diamètres conjugués égaux. On demande de déterminer :

1° Le lieu des foyers;

2° Le lieu des sommets de ces coniques.

Calcul (1h).

Résoudre le triangle :

$$a = 2946^{m},255, \qquad c = 1602^{m},309, \qquad C = 22°37'11'',52.$$

Résultats :

$A = 45°31'',23,$ $\qquad B = 112°22'17'',25,$

$b = 3852^{m},45;$ $\qquad S = 2182751^{mq},46$

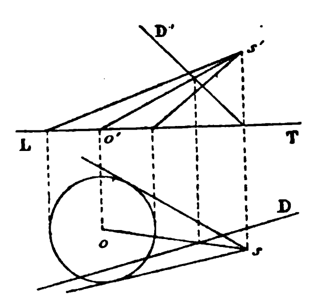
ou

$A' = 134°59'28'',77,$ $\qquad B' = 22°23'19'',71,$

$b' = 1586^{m},79,$ $\qquad S' = 899054^{mq},35.$

Dessin graphique (3h).

Étant donné un cône oblique à base circulaire, on mène par un point de son axe SO une droite D et, par cette droite, deux plans quelconques.



Construire l'intersection de ces plans avec la surface dudit cône.

Physique et Chimie (3h).

I. Définition et mesure de la température. Thermomètre à mercure, thermomètre à air, pyromètres.

II. Propriétés, fabrication et principaux usages industriels de l'acide sulfurique.

CONCOURS SUPPLÉMENTAIRE (1).

Géométrie analytique.

Discuter l'équation

$$y = \frac{x^2 + x + 1}{x - 2}.$$

Rapporter cette courbe à ses axes, sachant que les axes primitifs des coordonnées sont rectangulaires.

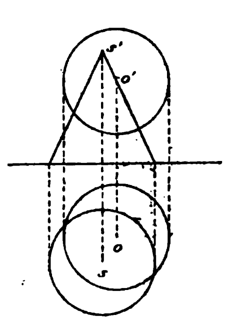
(1) Ce Concours, réservé aux candidats admissibles et non admis à l'École Polytechnique, ainsi qu'aux élèves de l'École des Mines de Saint-Étienne renvoyés après une première année d'études, n'aura plus lieu à l'avenir.

Construire la courbe représentée en coordonnées polaires par l'équation

$$\omega = \rho(\rho + 1)(\rho + 2).$$

Dessin.

Intersection d'une sphère avec un cône de révolution droit.



L'épure servant de composition de dessin devra être passée à l'encre de Chine.

Calcul.

Résoudre le triangle

$$A = 45^\circ, \qquad b = 1926^{m},397, \qquad c = 801^{m},154.$$

Résultats :

$$B = 112^\circ 23' 4'',20, \qquad C = 22^\circ 36' 55'',80.$$
$$a = 1473^{m},17, \qquad S = 545653^{mq},32.$$

Physique et Chimie.

I. Préparation et propriétés du phosphore. Ses principaux composés avec les autres métalloïdes.

II. Détermination des indices de réfraction.

III. Réglage et mise en service d'une balance de précision. Exécution d'une double pesée.

AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (CONCOURS DE 1890).

Calcul (5h).

x et y étant les coordonnées d'un point d'un plan, tracer la courbe définie par l'équation

$$y = \frac{\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{12} - 2x\right)}{\operatorname{tang} x}.$$

Déterminer :

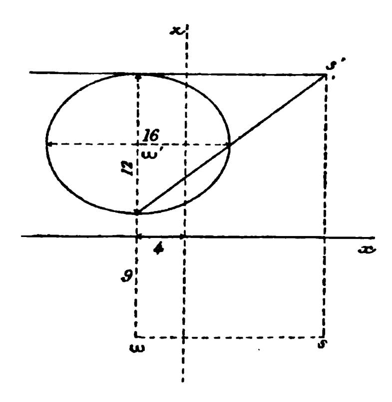
1° Les coordonnées des points de contact des tangentes parallèles à l'axe des x;

2° Les coordonnées des autres points où ces tangentes rencontrent la courbe.

(On donnera les résultats avec toute la précision que comporte l'emploi des Tables de logarithmes à sept décimales.)

Géométrie descriptive (5h).

Représenter le solide commun à un ellipsoïde de révolution et à un cône de révolution.



Données :

Ellipsoïde. — Son centre a pour coordonnées

$$x = -4^{cm}, \quad y = 9^{cm}, \quad z = 8^{cm}.$$

L'axe de révolution est vertical et il a pour longueur

$$2b = 12^{\text{cm}};$$

le diamètre de l'équateur a pour longueur

$$2a = 16^{\text{cm}}.$$

Cône. — Son axe est dans le plan de front qui passe par l'axe de l'ellipsoïde.

Les génératrices situées dans ce plan sont :

1° La tangente au point le plus haut de l'ellipse méridienne de l'ellipsoïde;

2° La droite qui joint le sommet le plus bas de cette méridienne au sommet le plus à droite.

L'angle au sommet du cône est l'angle aigu formé par ces deux génératrices.

Nota. — On placera la ligne de terre parallèlement aux plus petits côtés de la feuille et à égale distance de chacun d'eux.

Les candidats joindront à l'épure, sur une feuille séparée, une légende expliquant les constructions employées.

NOTE SUR L'APPLICATION DE TRANSFORMATIONS DE CONTACT A L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE;

PAR M. J. BRILL,
Saint-John's College Cambridge.

---

1. Dans ce qui va suivre je me bornerai à la considération des transformations de contact de l'espace ponctuel à trois dimensions, et je ferai des applications aux équations aux dérivées partielles du second ordre qui contiennent une variable dépendante et deux variables indépendantes.

Considérons, d'abord, le cas où il y a une seule relation entre les coordonnées de points appartenant

aux deux espaces corrélatifs, et supposons que cette relation soit de la forme

$$\Omega(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0.$$

Si l'on suppose que x_1, y_1, z_1 dépendent d'un seul paramètre, le point (x_1, y_1, z_1) décrit une courbe, et la surface correspondante de l'autre espace enveloppe une surface. L'équation de cette dernière surface sera une intégrale particulière d'une équation aux dérivées partielles du second ordre. Cette équation sera de la même forme pour toutes les surfaces du premier espace qui correspondent à des courbes du deuxième espace. De l'autre part, si l'on fait le point (x, y, z) décrire des courbes, on obtiendra des surfaces dans l'autre espace dont les équations satisfont à une autre équation aux dérivées partielles du second ordre. En plusieurs cas ces deux équations seront de la même forme. Nous parlerons pour convenance des surfaces dont les équations satisfont à ces deux équations différentielles comme surfaces des types (A) et (B) respectivement.

Imaginons, par exemple, que l'on considère la transformation de contact la plus simple et la meilleure connue, la méthode de transformation par polaires réciproques. On obtient l'équation générale des surfaces développables

$$rt - s^2 = 0.$$

Si l'on considère la transformation donnée par l'équation

$$(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 = a^2,$$

qui transforme une surface en une surface parallèle, on obtient l'équation générale des surfaces canaux

$$a^2(rt - s^2) + a\sqrt{1 + p^2 + q^2} \times [(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t] + (1 + p^2 + q^2)^2 = 0.$$

Considérons maintenant le cas où il existe deux relations entre les coordonnées de points appartenant aux deux espaces corrélatifs

$$\Omega_1(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0,$$
$$\Omega_2(x, y, z, x_1, y_1, z_1) = 0.$$

Dans ce cas, si l'on fait le point (x_1, y_1, z_1) décrire une courbe, la courbe correspondante de l'autre espace décrit une surface dont l'équation satisfait à une équation différentielle du second ordre. Par exemple, si l'on considère la transformation donnée par les équations

$$z + z_1 + xx_1 = 0, \qquad y - y_1 = 0,$$

on obtient l'équation générale des surfaces gauches à plan directeur

$$q^2 r - 2pqs + p^2 t = 0.$$

Dans ce cas aussi nous parlerons des surfaces appartenant au premier ou au deuxième espace, qui correspondent à des courbes de l'autre espace, comme surfaces du type (A) ou du type (B) respectivement.

2. Maintenant je me propose de montrer comment on peut faire usage d'une transformation de contact pour obtenir une intégrale de quelqu'une des équations différentielles associées du second ordre, qui satisfait à des conditions aux limites données. On peut indiquer les espèces de conditions aux limites auxquelles on peut faire l'application de cette méthode comme il suit. On peut demander d'obtenir une surface qui satisfait à l'équation différentielle donnée et (a) qui passe par deux courbes données, (b) qui touche deux surfaces données, et (c) qui passe par une courbe donnée et touche une surface donnée. Pour les autres formes de conditions

aux limites on aurait besoin en général d'une autre espèce de transformation.

Supposons, d'abord, que l'on demande une intégrale de l'équation différentielle appartenant au premier espace, qui satisfait à des conditions aux limites de l'espèce (*a*). On doit chercher une surface du type (A) passant par deux courbes données. Correspondantes à ces deux courbes, on obtiendrait deux surfaces du type (B) dans le second espace. Ces surfaces se couperaient en une courbe. Correspondante à cette troisième courbe, on aurait une surface du type (A) dans le premier espace passant par les deux courbes données.

Considérons maintenant les conditions aux limites de l'espèce (*b*). Les corrélatives des deux surfaces données seraient deux surfaces dans le second espace. La corrélative dans le premier espace de la courbe en laquelle ces surfaces se coupent serait une surface du type (A) touchant les deux surfaces données.

On peut obtenir une solution du troisième cas d'après la même manière. A la surface donnée correspond une surface, et à la courbe donnée correspond une surface du type (B). La corrélative de la courbe en laquelle ces deux surfaces se coupent est la surface demandée.

SUR LE MOUVEMENT D'UN CORPS SOLIDE AUTOUR D'UN POINT FIXE;

PAR M. ROBERJOT,
Étudiant à la Faculté des Sciences de Lyon.

Je me propose d'étudier ce mouvement sans employer d'axes particuliers; d'obtenir ainsi les résultats connus

et de donner des équations du mouvement une *interprétation géométrique simple*.

p, q, r désignant les composantes de l'axe instantané de rotation, on a pour la vitesse et l'accélération d'un point du corps solide

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{dx}{dt} = qz - ry, & \dfrac{d^2x}{dt^2} = z\dfrac{dq}{dt} - y\dfrac{dr}{dt} - \omega^2 x + p(px + qx + rz), \\ \dfrac{dy}{dt} = rx - pz, & \dfrac{d^2y}{dt^2} = x\dfrac{dr}{dt} - z\dfrac{dp}{dt} - \omega^2 y + q(px + qy + rz), \\ \dfrac{dz}{dt} = py - qx, & \dfrac{d^2z}{dt^2} = y\dfrac{dp}{dt} - x\dfrac{dq}{dt} - \omega^2 z + r(px + qy + rz). \end{array}\right.$$

Nous poserons

$$A = \Sigma m(y^2 + z^2), \qquad B = \Sigma m(z^2 + x^2), \qquad C = \Sigma m(x^2 + y^2),$$
$$D = \Sigma myz, \qquad E = \Sigma mzx, \qquad F = \Sigma mxy.$$

Force vive totale du système. — Soit T cette force vive, on a

$$2T = \Sigma m\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]$$

ou

$$(2)\quad 2T = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2Dqr - 2Erp - 2Fpq.$$

Moment résultant des quantités de mouvement. — Les composantes α, β, γ de l'axe de ce moment sont

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{lll} \alpha = \Sigma m\left(y\dfrac{dz}{dt} - z\dfrac{dy}{dt}\right) = Aq - Fq - Er & \text{ou} & \alpha = \dfrac{\partial T}{\partial p}, \\ \beta = \Sigma m\left(z\dfrac{dx}{dt} - x\dfrac{dz}{dt}\right) = -Fp + Bq - Dr & \text{ou} & \beta = \dfrac{\partial T}{\partial q}, \\ \gamma = \Sigma m\left(x\dfrac{dy}{dt} - y\dfrac{dx}{dt}\right) = -Ep - Dq + Cr & \text{ou} & \gamma = \dfrac{\partial T}{\partial r}. \end{array}\right.$$

Remarquons que

$$2T = p\alpha + q\beta + r\gamma.$$

Équations générales du mouvement. — Appliquons

le théorème des moments des quantités de mouvement par rapport aux trois axes; désignons par a, b, c les composantes de l'axe des moments des forces appliquées; nous aurons

$$\Sigma m\left(y\frac{d^2z}{dt^2} - z\frac{d^2y}{dt^2}\right) = a,$$

ou

$$\mathrm{A}\frac{dp}{dt} + (\mathrm{C}-\mathrm{B})qr - \mathrm{F}\frac{dq}{dt} - \mathrm{E}\frac{dr}{dt} + \mathrm{F}pr - \mathrm{E}pq - \mathrm{D}q^2 - \mathrm{D}r^2 = a,$$

de même

$$(4)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\alpha}{dt} + q\gamma - r\beta = a, \\ \dfrac{d\beta}{dt} + r\alpha - p\gamma = b, \\ \dfrac{d\gamma}{dt} + p\beta - q\alpha = c. \end{cases}$$

Telles sont les équations du mouvement.

Remarque. — On en tire facilement les relations suivantes

$$(5)\qquad \begin{cases} \alpha\dfrac{d\alpha}{dt} + \beta\dfrac{d\beta}{dt} + \gamma\dfrac{d\gamma}{dt} = p\dfrac{d\alpha}{dt} + q\dfrac{d\beta}{dt} + r\dfrac{d\gamma}{dt} \\ \quad = \alpha\dfrac{dp}{dt} + \beta\dfrac{dq}{dt} + \gamma\dfrac{dr}{dt} \\ \quad = \dfrac{d\mathrm{T}}{dt} = a\alpha + b\beta + c\gamma \\ \quad = ap + bq + cr. \end{cases}$$

On voit que

$$(6)\qquad \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 2\mathrm{T} - h,$$

c'est-à-dire que la différence entre le travail total et le carré de l'axe $\mathrm{OC} = l$ du moment résultant des quan-

tités de mouvement, est constante

(6) $$2T - l^2 = h.$$

Théorèmes de Poinsot. — 1° On a

$$2T = \frac{\omega^2}{\rho^2};$$

ω désignant la vitesse instantanée et ρ la distance au point fixe du point K où l'axe instantané perce l'ellipsoïde d'inertie, il suffit d'écrire que le point K

$$\left(\rho\frac{p}{\omega}, \rho\frac{q}{\omega}, \rho\frac{r}{\omega}\right)$$

est sur l'ellipsoïde d'inertie.

2° Le plan tangent en K à l'ellipsoïde d'inertie est perpendiculaire à l'axe OC; l'équation de ce plan est, en effet,

$$Xf'_x + Yf'_y + Zf'_z + f'_t = 0,$$

où

$$x = \rho\frac{p}{\omega}, \qquad y = \rho\frac{q}{\omega}, \qquad z = \rho\frac{r}{\omega};$$

or

$$f'_x = Ax - Fy - Ez = (Ap - Fq - Er)\frac{\rho}{\omega} = \frac{\rho\alpha}{\omega};$$

donc l'équation du plan

$$\alpha X + \beta Y + \gamma Z = \frac{\omega}{\rho};$$

il est perpendiculaire à OC.

3° La distance de l'origine à ce plan tangent est

$$\delta = \frac{\frac{\omega}{\rho}}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}} = \frac{\omega}{l\rho}.$$

La relation

$$2T = l^2 - h$$

peut donc s'écrire

$$\frac{\omega^2}{\rho^2} = l^2 - h$$

ou

$$\delta^2 - 1 = -\frac{h}{l^2}.$$

Remarque I. — Si, à un moment donné,

$$p = \alpha, \qquad q = \beta, \qquad r = \gamma,$$

les équations du mouvement se réduisent à

$$2T = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = l^2 = \omega^2;$$

on a

$$\delta = \rho = 1.$$

Remarque II. — Si $a = b = c = 0$, les équations se réduisent à

$$\alpha \frac{d\alpha}{dt} + \beta \frac{d\beta}{dt} + \gamma \frac{d\gamma}{dt} = 0$$

ou

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \text{const}.$$

$OC = l$ est constant, et

$$\frac{dT}{dt} = 0 \qquad \text{ou} \qquad T = h, \qquad h = \text{const.},$$

d'où

$$\delta = \frac{\sqrt{h}}{l} = \text{const}.$$

On en déduira, par la méthode de Poinsot, les équations de la polhodie et de l'erpolhodie.

Interprétation géométrique des équations (4) *du mouvement.* — Remarquons que $q\gamma - r\beta$, $r\alpha - p\gamma$ et $p\beta - q\alpha$ sont les composantes de la vitesse du point $C(\alpha, \beta, \gamma)$ considéré comme faisant partie du corps solide; désignons-les par $\frac{\delta\alpha}{\delta t}, \frac{\delta\beta}{\delta t}, \frac{\delta\gamma}{\delta t}$; $\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\beta}{dt}, \frac{d\gamma}{dt}$ sont les com-

posantes de la vitesse du point $C(\alpha, \beta, \gamma)$ considéré comme l'extrémité de l'axe résultant du moment des quantités de mouvement. Les équations (4) du mouvement peuvent donc s'écrire

$$(4')\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dt} + \frac{\delta\alpha}{\delta t} &= a,\\ \frac{d\beta}{dt} + \frac{\delta\beta}{\delta t} &= b,\\ \frac{d\gamma}{dt} + \frac{\delta\gamma}{\delta t} &= c. \end{aligned}\right.$$

Elles expriment que la résultante de la vitesse du point $C(\alpha, \beta, \gamma)$, considéré comme point matériel du corps solide, et de la vitesse du point géométrique $C(\alpha, \beta, \gamma)$, considéré comme extrémité de l'axe résultant du moment des quantités de mouvement, est égale en grandeur et en direction à l'axe résultant OA des moments des forces extérieures.

On peut considérer la courbe S lieu des points C dans le solide et la courbe M lieu des mêmes points dans l'espace, de sorte que les différents points C'_1, C''_1, ... du corps solide viendront coïncider successivement avec les points C', C'', ... de l'espace; en d'autres termes, le cône de sommet O de base S roulera en glissant sur le cône de sommet O et de base M et la vitesse de glissement est (a, b, c).

Si $a = b = c = 0$, on a

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{\delta\alpha}{\delta t}, \qquad \ldots.$$

SUR LA TRANSFORMATION PAR RAYONS VECTEURS RÉCIPROQUES ET SUR UNE GÉNÉRATION MÉCANIQUE DES QUADRIQUES;

PAR M. S.-L. RAVIER,
Élève de l'École Polytechnique.

La transformation pour rayons vecteurs réciproques dans le plan est un cas particulier de la transformation birationnelle du second ordre que voici :

Nous considérons un plan P, une quadrique S, et deux points A, A′ sur cette quadrique.

A chaque point M du plan P nous faisons correspondre le point M′ qui se trouve à l'intersection avec ce même plan de la droite joignant A′ au second point μ distinct de A, où le rayon AM rencontre la surface.

De cette transformation, nous arrivons à celle par rayons vecteurs réciproques lorsque nous substituons à la surface S une sphère, aux points A, A′ les extrémités du diamètre de cette sphère perpendiculaire au plan P.

Que la sphère soit coupée par le plan P ou non, nous aurons toujours, d'ailleurs, la puissance de la transformation en prenant la puissance par rapport à la sphère du point où AA′ rencontre le plan P; cette puissance doit être prise avec son signe. Si l'intersection de la sphère et du plan P est réelle, c'est le cercle qui la constitue qui est le cercle directeur de la transformation.

On peut déduire de ce qui précède les principales propriétés des figures anallagmatiques.

Il est avantageux dans cette étude de supposer le centre de la sphère contenu dans le plan P, et alors on voit apparaître d'une manière lumineuse les propriétés de la courbe appelée seconde déférente par les auteurs

qui ont étudié les figures anallagmatiques. Elle se présente ici comme la projection sur le plan P d'une courbe symétrique par rapport à ce plan, et qui est le lieu des points tels que celui que nous avons appelé μ.

Nous n'avons pas l'intention d'aller plus loin dans cette voie, et nous allons déduire de principes réciproques de ceux qui précèdent la construction d'un système articulé qui permet de faire décrire à l'un de ses points, dans l'espace, une surface du second ordre.

Pour cela, prenons dans un plan P un cercle C de centre O, menons par O une droite quelconque, et prenons sur elle deux points A, A'.

Nous joindrons A à un point M du plan P, A' au point M' déduit du point M par inversion par rapport au cercle C, et je dis que le point μ, intersection de AM et de A'M', décrira une surface du second ordre quand M se déplacera d'une manière quelconque dans le plan P.

En effet, il n'y a jamais, comme le lecteur peut s'en convaincre, qu'un point μ sur une droite AM, et de plus le point A est un point simple de la surface décrite par μ, car toutes les tangentes à la surface en ce point sont contenues dans un même plan qui est, cela est important à remarquer, parallèle au plan P.

D'ailleurs, la section de la surface par le plan P est le cercle C; il en résulte que les points A, A' sont des ombilics de cette surface.

Ce mode de génération ne peut donc être appliqué aux surfaces réglées qui n'ont pas d'ombilics réels, mais il est facile de voir que nous pourrons l'appliquer à un ellipsoïde, un paraboloïde elliptique ou un hyperboloïde à une nappe quelconques, car nous pourrons décrire de cette façon une surface qui :

1° Ait deux mêmes ombilics avec les mêmes plans tangents en ces ombilics (A, A');

2° Ait une même section plane circulaire, parallèle à ces plans tangents (cercle C).

Si l'on veut construire un système articulé basé sur ces principes, et qui permette de décrire une surface du second ordre, ce système se composera de deux parties :

1° Un système articulé permettant de tracer deux figures planes en inversion l'une par rapport à l'autre, on se servira là, soit d'un appareil Peaucellier, soit d'un appareil basé sur ce qui a été dit au commencement de cette Note; remarquons en passant que ce dernier appareil pourrait être substitué en toutes circonstances à l'appareil Peaucellier; il semble d'ailleurs moins simple;

2° D'un autre système articulé appliquant ce qui a été dit en dernier lieu, et relié convenablement au premier.

RÉALISATION ET USAGE DES FORMES IMAGINAIRES EN GÉOMÉTRIE.

Conférences données par M. Maximilien MARIE
au Collège Stanislas, à Sainte-Barbe, à l'École Sainte-Geneviève et à l'École Monge (¹).

Nous allons chercher la nature et la valeur de la période engendrée dans l'intervalle compris entre deux pareils plans limites.

L'équation la plus générale d'une surface ayant des asymptotes parallèles à l'axe des z est

$$(ax + by + c)z^{m-1} + (dx^2 + xy + fy^2 + gx + hy + k)z^{m-2} + \ldots = 0;$$

(¹) *Voir* t. X, p. 329.

si l'on voulait que l'axe des z fût lui-même une asymptote, il faudrait faire $c = 0$; et, si l'on voulait encore que l'axe des z fût une asymptote d'inflexion d'une section plane quelconque de la surface par un plan passant par l'axe des z, il faudrait faire $k = 0$.

L'équation de la surface deviendrait alors

$$(ax + by)z^{m-1} \\ + (dx^2 + exy + fy^2 + gx + hy)z^{m-2} + \ldots = 0.$$

Les traces, sur le plan des xy, des asymptotes parallèles à l'axe des z seraient alors les divers points de la droite $ax + by = 0$.

Si l'on voulait que le lieu de ces traces fût l'axe des x, c'est-à-dire que les asymptotes parallèles à l'axe des z fussent toutes contenues dans le plan des zx, il faudrait faire $a = 0$.

Alors l'équation de la surface, en divisant par b, deviendrait

$$yz^{m-1} + (\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \varepsilon y)z^{m-2} + \ldots = 0.$$

Si l'on coupait cette surface par un plan $x = l$, l'équation de la projection, en vraie grandeur, de la section sur le plan des yz, parallèlement aux x, serait

$$yz^{m-1} + [\gamma y^2 + (\beta l + \varepsilon)y + \alpha l^2 + \delta l]z^{m-2} + \ldots = 0;$$

la période cyclique, relative à l'axe des z de la quadratrice de cette courbe, est

$$\pm 2\pi\sqrt{-1}\,\sin yz\,(\alpha l^2 + \delta l),$$

qui s'annule pour $l_0 = 0$, et $l_1 = -\frac{\delta}{\alpha}$.

Pour obtenir le volume engendré par cette période

cyclique, il faudrait calculer l'intégrale

$$\pm 2\pi\sqrt{-1}.\alpha \sin YZ \int_{l_0}^{l_1} l(l-l_1)\,K\,dl,$$

K désignant l'inverse du rapport d'une longueur, comptée sur l'axe des x, à sa projection sur une perpendiculaire au plan des yz.

Cette intégrale a pour valeur

$$\pm 2\pi\sqrt{-1}.\alpha K \sin YZ \left(\frac{l_1^3}{3}-\frac{l_1^3}{2}\right)$$

ou

$$\pm\sqrt{-1}.\alpha K \sin YZ\, \tfrac{4}{3}\pi\left(\frac{l_1}{2}\right)^3;$$

on voit que c'est le produit par $\sqrt{-1}\,\alpha K \sin yz$ du volume d'une sphère.

Mais le volume cubé est en réalité celui d'un ellipsoïde dont l'un des diamètres, parallèle à l'axe des x, serait l_1, et dont les deux autres, situés dans le plan

$$x=\frac{l_1}{2},$$

auraient, l'un, une valeur nulle, et l'autre, une valeur infinie, de telle sorte, cependant, que le rectangle de ces deux diamètres fût $\frac{l_1^2}{4}$.

On peut, au reste, très aisément, obtenir l'équation même de cet ellipsoïde, en étendant aux surfaces algébriques le théorème qui nous a servi à fonder la théorie des périodes cycliques des quadratrices des courbes algébriques, c'est-à-dire cette proposition que, dans le voisinage de l'une de ses asymptotes, non inflexionnelle, une courbe de degré quelconque tend toujours à se confondre avec une hyperbole du second degré.

Pour les surfaces algébriques, le théorème s'énoncera ainsi :

La nappe d'une surface algébrique de degré quelconque qui se rapproche indéfiniment du plan lieu d'une série d'asymptotes parallèles et non inflexionnelles de la surface, cette nappe tend à se confondre avec un hyperboloïde du second degré ; et celle des conjuguées de la surface, dont les cordes réelles sont parallèles aux mêmes asymptotes, comprend, outre d'autres nappes, une nappe fermée séparée des autres et qui tend à se confondre avec un ellipsoïde indéfiniment aplati et indéfiniment allongé le long du plan lieu des asymptotes considérées, c'est-à-dire un ellipsoïde dont le diamètre, conjugué du plan considéré, tend vers zéro, et dont les deux autres diamètres, contenus dans ce même plan, sont l'un fini et l'autre infini, ce dernier ayant d'ailleurs la direction des asymptotes en question.

En effet, reprenons l'équation de la surface sous la forme déjà employée

$$yz^{m-1} + (\alpha x^2 + \beta xy + \gamma y^2 + \delta x + \varepsilon y)z^{m-2} + \ldots = 0,$$

c'est-à-dire supposons qu'on ait fait le choix d'axes défini précédemment (la direction de l'axe des y est restée quelconque, mais c'est indifférent, puisqu'on cherche ce que devient la surface dans la direction de $y = 0$). Si l'on coupe cette surface par un plan $x = l$, l'équation de la projection de la section sur le plan des yz est

$$yz^{m-1} + (\alpha l^2 + \delta l + \beta ly + \gamma l^2 + \varepsilon l)z^{m-2} + \ldots = 0;$$

dans cette équation, le produit de y devenu nul par z devenu infini tend vers $-(\alpha l^2 + \delta l)$; par conséquent les équations de la section considérée tendent à se ré-

duire à

$$yz + \alpha l^2 + \delta l = 0 \quad \text{avec} \quad x = l;$$

l'équation de la surface, dans les environs de son plan asymptote, $y = 0$, tend donc à se réduire à

$$yz + \alpha x^2 + \delta x = 0,$$

ou

$$yz + \alpha\left(x + \frac{\delta}{2\alpha}\right)^2 = \frac{\delta^2}{4\alpha},$$

qui représente un hyperboloïde à une nappe.

Parmi les ellipsoïdes conjugués de cet hyperboloïde, il y en a un qui appartient à la surface proposée, comme étant une de ses conjuguées : c'est celui dont les cordes réelles ont une direction infiniment voisine de celle des asymptotes de la surface, contenues dans le plan $y = 0$. Ce serait cet ellipsoïde indéfiniment aplati dans le sens des y et indéfiniment allongé dans le sens de l'axe des z dont il faudrait calculer le volume, pour obtenir la période sphérique de la cubatrice de la surface; mais comme tous les ellipsoïdes conjugués de l'hyperboloïde

$$yz + \alpha\left(x + \frac{\delta}{2\alpha}\right)^2 = \frac{\delta^2}{4\alpha}$$

ont même volume, on choisira celui qu'on voudra d'entre eux.

24. On voit, par ce qui vient d'être dit, que la direction des plans sécants, parallèles entre eux, au moyen desquels on découpe la surface à cuber, étant choisie, et par conséquent les m asymptotes de la surface, parallèles à ces plans, étant définies, on trouvera, dans la cubatrice, m périodes sphériques.

Mais, si la direction des plans sécants venait à changer, les asymptotes de la surface, qu'il faudrait faire intervenir, changeraient aussi, et ce serait évidemment une

question très intéressante de savoir si les périodes sphériques de la cubatrice changeraient aussi.

La question n'aurait pas lieu d'être posée au sujet de l'hyperboloïde à une nappe (ni de l'hyperboloïde à deux nappes, mais pour une autre raison), puisqu'on sait que la période unique de la cubatrice d'un hyperboloïde à une nappe est le produit par $\sqrt{-1}$ du volume enveloppé par l'un quelconque des ellipsoïdes, allongés ou non, de cet hyperboloïde.

Mais le fait, évident dans le cas des surfaces du second degré, ne l'est plus du tout dans le cas des surfaces de degrés supérieurs, et la preuve du fait, presque surabondante dans le premier cas, ne se trouverait pas, pour les autres, dans des considérations aussi simples.

Cependant le théorème est général.

Mais je n'en donnerai pas la démonstration en ce moment.

25. *Classification des intégrales doubles cubatrices des surfaces algébriques.* — La nature de la cubatrice d'une surface algébrique dépendra toujours essentiellement de celle de la quadratrice d'une section plane quelconque de cette surface.

Si l'on veut que la cubatrice n'ait aucune période ultrasphérique, il faudra que la quadratrice d'une quelconque de ses sections planes n'ait pas de périodes ultracycliques et, pour cela, si l'on veut que les sections planes de la surface dépendent encore du plus grand nombre possible de paramètres, sous la condition d'être quarrables par les fonctions circulaires ou logarithmiques, il faudra que ces sections présentent chacune $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ points doubles, m désignant le degré de la surface; c'est-à-dire qu'il faudra que la surface

elle-même contienne une courbe double du degré $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$.

26. Si l'on veut que la cubatrice de la surface soit algébrique, il faudra en outre que toutes les sections planes de cette surface soient quarrables algébriquement, c'est-à-dire que les m asymptotes d'une section plane quelconque coupent, chacune, cette section en trois points situés à l'infini, ou en $m-3$ points seulement, à distance finie.

27. Nous allons chercher l'expression analytique des conditions renfermées dans cette dernière condition.

Reprenons pour cela les équations établies au début du n° 23 :

Pour que la période cyclique relative à l'asymptote parallèle à $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{1}$ de la quadratrice d'une section plane mobile parallèle à cette direction, restât toujours identiquement nulle, c'est-à-dire pour que la période sphérique correspondante restât constamment nulle, il faudrait qu'en éliminant x_0, par exemple entre les équations

$$x_0\varphi'_\alpha + y_0\varphi'_\beta + \psi(\alpha, \beta, 1) = 0$$

et

$$x_0^2\varphi''_{\alpha^2} + 2x_0y_0\varphi''_{\alpha\beta} + y_0^2\varphi''_{\beta^2} + 2x_0\psi'_\alpha + 2y_0\psi'_\beta + 2\chi(\alpha, \beta, 1) = 0,$$

on tombât sur une équation identique en y_0.

Ces conditions sont

$$(1) \qquad \varphi''_{\alpha^2}\varphi'^2_\beta - 2\varphi''_{\alpha\beta}\varphi'_\alpha\varphi'_\beta + \varphi''_{\beta^2}\varphi'^2_\alpha = 0,$$

$$(2) \qquad \psi''_{\alpha^2}\varphi'_\beta\psi(\alpha, \beta, 1) - \varphi''_{\alpha\beta}\varphi'_\alpha\psi(\alpha, \beta, 1) - \varphi'_\alpha\varphi'_\beta\psi'_\alpha + \varphi'_{\alpha^2}\psi'_\beta = 0$$

et

$$(3) \quad \varphi''_{\alpha^2}\psi^2(\alpha, \beta, 1) - 2\varphi'_\alpha\psi'_\alpha\psi(\alpha, \beta, 1) + 2\varphi'^2_\alpha\chi(\alpha, \beta, 1) = 0.$$

Si l'on veut que ces trois conditions soient satisfaites, quels que soient α et β, c'est-à-dire si l'on veut que toutes les périodes sphériques de la cubatrice disparaissent, ces trois conditions devront être considérées comme des équations simultanées, aux différentielles partielles, dont les fonctions φ, ψ et χ seraient les inconnues.

Il s'agit d'intégrer ces trois équations.

Occupons-nous d'abord de la première, qui ne contient que la fonction φ. Elle exprime que le cône lieu des parallèles aux asymptotes de la surface, menées par l'origine, est formé de m plans.

En effet, l'équation de ce cône est $\varphi(x, y, z) = 0$, de sorte que $\varphi(x, y, 1) = 0$ est l'équation de la section de ce cône par le plan $z = 1$. Or, pour exprimer que le lieu $\varphi(x, y, z) = 0$ se compose de droites, il faudrait exprimer que $\frac{d^2y}{dx^2}$, en un quelconque de ses points, est nul et c'est précisément ce qu'exprime l'équation (1), car l'équation $\varphi(x, y, 1) = 0$ donne d'abord

$$\varphi'_y \frac{dy}{dx} + \varphi'_x = 0,$$

et ensuite

$$\varphi'_y \frac{d^2y}{dx^2} + \varphi''_{y^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\varphi''_{xy}\frac{dy}{dx} + \varphi''_{x^2} = 0,$$

ou, en remplaçant $\frac{dy}{dx}$ par $-\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}$,

$$\varphi'_y \frac{d^2y}{dx^2} + \varphi''_{y^2}\frac{\varphi'^2_x}{\varphi'^2_y} - 2\varphi''_{xy}\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y} + \varphi''_{x^2} = 0,$$

d'où l'on voit que la condition

$$\varphi''_{y^2}\varphi'^2_x - 2\varphi''_{xy}\varphi_x\varphi'_y + \varphi''_{x^2}\varphi'^2_y = 0$$

revient à $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$.

Ainsi la fonction $\varphi(x, y, z)$ doit être le produit de m facteurs linéaires

$$(A_1\, x + B_1\, y + C_1\, z),$$
$$(A_2\, x + B_2\, y + C_2\, z),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$(A_m x + B_m y + C_m z).$$

En second lieu, l'équation (2) exprime que toutes les asymptotes de la surface sont effectivement contenues dans m plans.

En effet, toutes les asymptotes infiniment peu inclinées les unes sur les autres doivent déjà être parallèles à un même des plans représentés par l'équation $\varphi(x, y, z) = 0$, car une asymptote variable de direction, d'une manière continue, ne pourrait changer de plan directeur qu'en prenant momentanément la direction de l'intersection de son ancien plan directeur avec l'un des $(m - 1)$ autres. De sorte que, si la droite

$$x_0\varphi'_\alpha + y_0\varphi'_\beta + \psi(\alpha, \beta, 1) = 0,$$

lieu des traces sur le plan des xy des asymptotes parallèles à la direction $\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{1}$ ne change pas lorsque α et β varieront infiniment peu ou varieront dans de certaines limites, toutes les asymptotes correspondantes seront dans un même plan.

Or c'est précisément l'invariabilité de la droite

$$x_0\varphi'_\alpha + y_0\varphi'_\beta + \psi(\alpha, \beta, 1) = 0$$

qu'exprime l'équation (2).

En effet, si l'on fait varier, dans l'équation de cette droite, α de $d\alpha$ et β de $d\beta$, elle devient

$$x_0(\varphi'_\alpha + \varphi''_{\alpha^2} d\alpha + \varphi''_{\alpha\beta} d\beta)$$
$$+ y_0(\varphi'_\beta + \varphi''_{\beta^2} d\beta + \varphi''_{\alpha\beta} d\alpha) + \psi(\alpha, \beta, 1) + \psi'_\alpha d\alpha + \psi'_\beta = 0,$$

et si l'on veut exprimer que les deux droites coïncident, il faudra exprimer que les accroissements des coefficients sont proportionnels aux anciennes valeurs de ces coefficients, ce qui donnera

$$\frac{\varphi''_{\alpha^2} d\alpha + \varphi''_{\alpha\beta} d\beta}{\varphi'_\alpha} = \frac{\varphi''_{\beta^2} d\beta + \varphi''_{\alpha\beta} d\alpha}{\varphi'_\beta} + \frac{\psi'_\alpha d\alpha + \psi'_\beta d\beta}{\psi(\alpha, \beta, 1)};$$

en divisant par $d\alpha$ et remplaçant $\frac{d\beta}{d\alpha}$ par $-\frac{\varphi'_\alpha}{\varphi'_\beta}$, ces équations deviennent

$$\frac{\varphi''_{\alpha^2} - \varphi''_{\alpha\beta}\frac{\varphi'_\alpha}{\varphi'_\beta}}{\varphi'_\alpha} = \frac{-\varphi''_{\beta^2}\frac{\varphi'_\alpha}{\varphi'_\beta} + \varphi''_{\alpha\beta}}{\varphi'_\beta} = \frac{\psi'_\alpha - \psi'_\beta\frac{\varphi'_\alpha}{\varphi'_\beta}}{\psi(\alpha, \beta, 1)},$$

c'est-à-dire

$$\frac{\varphi''_{\alpha^2}\varphi'^2_\beta - \varphi''_{\alpha\beta}\varphi'_\alpha\varphi'_\beta}{\varphi'_{\alpha}\varphi'^2_\beta} = \frac{-\varphi''_{\beta^2}\varphi'^2_\alpha + \varphi''_{\alpha\beta}\varphi'_\alpha\varphi'_\beta}{\varphi'_\alpha\varphi'^2_\beta} = \frac{\psi'_\alpha\varphi'_\beta - \psi'_\beta\varphi'_\alpha}{\varphi'_\alpha\psi(\alpha, \beta, 1)}.$$

La première de ces conditions

$$\varphi''_{\alpha^2}\varphi'^2_\beta - \varphi''_{\alpha\beta}\varphi'_\alpha\varphi'_\beta = -\varphi''_{\beta^2}\varphi'^2_\alpha + \varphi''_{\alpha\beta}\varphi'_\alpha\varphi''_\beta$$

n'est autre que la condition (1) déjà traitée; quant à l'autre

$$\frac{\varphi''_{\alpha^2}\varphi'^2_\beta - \varphi''_{\alpha\beta}\varphi'_\alpha\varphi'_\beta}{\varphi'_\alpha\varphi'^2_\beta} = \frac{\psi'_\alpha\varphi'_\beta - \psi'_\beta\varphi'_\alpha}{\varphi'_\beta\psi(\alpha, \beta, 1)},$$

elle se réduit précisément à l'équation (2)

$$[\varphi''_{\alpha^2}\varphi'_\beta - \varphi''_{\alpha\beta}\varphi'_\alpha]\psi(\alpha, \beta, 1) - \varphi'_\alpha[\psi'_\alpha\varphi'_\beta - \psi'_\beta\varphi'_\alpha] = 0.$$

Ainsi les équations (1) et (2) expriment que toutes

les asymptotes de la section doivent être comprises dans m plans.

Quant à l'équation (3), il est inutile d'en chercher la traduction : puisqu'elle exprime que chacune des asymptotes coupe la surface en un troisième point situé à l'infini, *elle doit exprimer que chacun des m plans asymptotes coupe la surface suivant une courbe de degré $m - 3$.*

En conséquence, les surfaces de degré m, cubables algébriquement et contenant encore le plus grand nombre possible de paramètres, sous cette condition, devraient être recherchées parmi les surfaces ayant une courbe double de degré $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$, que pourrait représenter l'équation

$$(A_1x + B_1y + C_1z + D_1)(A_2x + B_2y + C_2z + D_2)\ldots \\ \times (A_mx + B_my + C_mz + D_m) + \Phi_{m-3}(x, y, z) = 0,$$

Φ_{m-3} désignant un polynôme complet en x, y, z, de degré $(m - 3)$ au plus.

28. *Application aux surfaces du troisième ordre.* — Les surfaces de troisième ordre capables de cubature algébrique doivent être recherchées dans le type

$$(a_1x + b_1y + c_1z + d_1)(a_2x + b_2y + c_2z + d_2) \\ \times (a_3x + b_3y + c_3z + d_3) + H = 0.$$

Si l'on suppose la surface irréductible, la seule ligne double qu'elle pourra contenir sera une droite. Supposons qu'on ait pris cette droite pour axe des z, l'équation de la surface devra se réduire à une identité si l'on y fait $x = 0$ et $y = 0$, ce qui donne

$$c_1c_2c_3 = 0,$$
$$c_1c_2d_3 + c_2c_3d_1 + c_3c_1d_2 = 0,$$
$$c_1d_2d_3 + c_2d_3d_1 + c_3d_1d_2 = 0,$$
$$d_1d_2d_3 + H = 0;$$

H ne pouvant être supposé nul, sans quoi la surface se réduirait à trois plans, d_1, ni d_2, ni d_3 ne sauraient non plus disparaître; en conséquence, c_1, c_2 et c_3 devront être nuls. C'est-à-dire que la surface devra être un cylindre parallèle à sa ligne double.

Les conditions précédentes expriment simplement que l'axe des z est sur la surface : pour que cette ligne soit double, il faut et il suffit que l'origine soit un point double de la trace du cylindre sur le plan des xy. Or, l'équation de cette trace, ou celle de la surface, est devenue

$$(a_1x+b_1y+d_1)(a_2x+b_2y+d_2) \times (a_3x+b_3y+d_3)-d_1d_2d_3=0;$$

et, si l'origine est un point double, cette trace sera quarrable algébriquement, c'est-à-dire sera un trèfle ou un folium, suivant que les trois asymptotes seront réelles ou qu'il y en aura deux imaginaires.

Les deux seules surfaces du troisième ordre, cubables algébriquement et dépendant encore du plus grand nombre possible de paramètres, sous cette condition, sont donc le cylindre à base de trèfle et le cylindre à base de folium.

29. Le Tome II de ma *Théorie des fonctions de variables imaginaires* contient la théorie, analogue aux précédentes, des intégrales d'ordres supérieurs.

(*A suivre.*)

LE CENTRE D'INERTIE ET LES MOMENTS D'INERTIE DU CORPS ÉPICYCLOIDAL;

Par M. SVECHNICOFF,
Professeur au Gymnase de Troïtzk.

Le moment d'inertie de la surface épicycloïdale homogène autour de l'axe oz est égal à

$$j_{oz} = \sigma \int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{2\pi}{n}} \int_{\alpha=0}^{\alpha=2\pi} (x^2+y^2)\, dS,$$

si l'on désigne par σ la densité de la surface;

$$dS = 4a^2(n+\cos\alpha)\sin^3\frac{n\varphi}{2}\, d\varphi\, d\alpha,$$

$$x^2+y^2 = a^2[(n^2+\sin^2 n\varphi) + 2n(1-\cos n\varphi)\cos\alpha + (1-\cos n\varphi)^2\cos^2\alpha].$$

On sait que

$$\int_0^{2\pi} \sin^m x \cos^n x\, dx = \int_0^{\pi} \sin^m x \cos^n x\, dx = 0,$$

si n est un nombre impair.

Par conséquent, les termes qui contiennent $\cos\alpha$ et $\cos^3\alpha$ se détruisent et

$$j_{oz} = 4n\sigma a^4 \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \sin^3\frac{n\varphi}{2}\, d\varphi \times \int_0^{2\pi} [(n^2+\sin^2 n\varphi)+(3-4\cos n\varphi+\cos n\varphi)\cos^2\alpha]\, d\alpha,$$

$$j_{oz} = 4n\sigma a^4\pi \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \sin^3\frac{n\varphi}{2}(2n^2+5-4\cos n\varphi - \cos^2 n\varphi)\, d\varphi,$$

$$j_{oz} = 8\pi\sigma a^4 \int_0^{\pi} \sin^3\psi(2n^2+8-4\cos^2\psi-4\cos^4\psi)\, d\psi,$$

$$j_{oz} = 8\pi\sigma a^4 \int_0^{\pi} \sin\psi\,[2n^2+8-(2n^2+12)\cos^2\psi+4\cos^6\psi]\,d\psi.$$

$$j_{oz} = 8\pi\sigma a^4 \left[2(2n^2+8) - \frac{2(2n^2+12)}{3} + \frac{8}{7}\right],$$

$$j_{oz} = \frac{64\pi\sigma a^4}{21}(7n^2+24) = \frac{ma^2}{7}(7n^2+24),$$

si l'on désigne par m la masse de la surface épicycloïdale.

Le moment d'inertie du corps épicycloïdal homogène autour de l'axe oz est égal à

$$I_{oz} = 2\sigma \int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{2\pi}{n}} \int_{\alpha=0}^{\alpha=\pi} (x^2+y^2)\,dU.$$

En remplaçait x^2+y^2 par son expression et dU par

$$a^3(1-\cos n\varphi)^3(n+\cos\alpha)\sin^2\alpha\,d\varphi\,d\alpha,$$

nous pouvons létruire les termes qui contiennent $\cos\alpha$ et $\cos^3\alpha$; par saite

$$I_{oz} = 2n\sigma a^5 \int_0^{\frac{2\pi}{n}} (1-\cos n\varphi)^3\,d\varphi$$

$$\times \int_0^{\pi} [(n^2+\sin^2 n\varphi)\sin^2\alpha$$

$$+ (3-4\cos n\varphi+\cos^2 n\varphi)\sin^2\alpha\cos^2\alpha]\,d\alpha,$$

$$I_{oz} = 2n\sigma a^5\pi \int_0^{\frac{2\pi}{n}} (1-\cos n\varphi)^3$$

$$\times \left(\frac{n^2+\sin^2 n\varphi}{2} + \frac{3-4\cos n\varphi+\cos^2 n\varphi}{8}\right) d\varphi$$

$$= \frac{\pi\sigma a^5}{4} \int_0^{2\pi} (1-\cos\psi)^3(4n^2+7-4\cos\psi-3\cos^2\psi)\,d\psi.$$

En détrusant les termes qui contiennent $\cos\psi$,

$\cos^3\psi$, $\cos^5\psi$, on a

$$I_{oz} = \frac{\pi\sigma a^5}{4}\int_0^{2\pi}[4n^2+7+6(2n^2+5)\cos^2\psi - 5\cos^4\psi]\,d\psi$$

$$= \frac{\pi^2\sigma a^5}{4}\left[(4n^2+7)2+6(2n^2+5)-\frac{15}{4}\right],$$

$$I_{oz} = \frac{\pi^2\sigma a^5}{16}(80n^2+161) = \frac{Ma^2}{80}(80n^2+161),$$

si l'on désigne par M la masse du corps épicycloïdal.

Chaque partie du corps épicycloïdal a deux plans de symétrie qui passent par l'origine des coordonnées. Le plan xy est un de ces plans. L'autre plan de symétrie est perpendiculaire à la droite qui passe par deux points de rebroussement. Désignons par A le point de rebroussement, situé sur l'axe ox, et par B l'autre point de rebroussement. Menons la droite oy' perpendiculaire à AB et la droite ox' parallèle à AB, de sorte que l'angle xox' soit obtus. Désignons par x', y', z' les coordonnées d'un point quelconque de la surface épicycloïdale par rapport aux axes ox', oy', oz. Alors

$$x' = -x\sin\frac{\pi}{n} + y\cos\frac{\pi}{n}, \qquad y' = x\cos\frac{\pi}{n} + y\sin\frac{\pi}{n}.$$

Les équations de la surface épicycloïdale par rapport aux axes ox', oy', oz sont

$$x' = a\left\{[n+(1-\cos n\varphi)\cos\alpha]\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{n}\right)-\sin n\varphi\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{n}\right)\right\},$$

$$y' = a\left\{[n+(1-\cos n\varphi)\cos\alpha]\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{n}\right)+\sin n\varphi\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{n}\right)\right\},$$

$$z = a(1-\cos n\varphi)\sin\alpha.$$

Posons

$$\frac{\pi}{n} - \varphi = \psi.$$

Alors

$$x' = -a[n\sin\psi + (1+\cos n\psi)\cos\alpha\sin\psi + \sin n\psi\cos\psi],$$

$$y' = a[n\cos\psi + (1+\cos n\psi)\cos\alpha\cos\psi - \sin n\psi\sin\psi],$$

$$z = a(1+\cos n\psi)\sin\alpha.$$

Quand φ augmente de zéro jusqu'à $\frac{\pi}{n}$ et $\frac{2\pi}{n}$, ψ diminue de $\frac{\pi}{n}$ jusqu'à zéro et $-\frac{\pi}{n}$.

Le centre d'inertie de la surface épicycloïdale est situé sur l'axe oy'. Désignons par p sa distance au point O. Alors

$$mp = \sigma \int_{\psi=\frac{\pi}{n}}^{\psi=-\frac{\pi}{n}} \int_{\alpha=0}^{\alpha=2\pi} y' dS.$$

En remplaçant y' par son expression et dS par $-4a^2 \cos^3 \frac{n\psi}{2} (1 + \cos\alpha)\, d\psi\, d\alpha$, et en faisant l'intégration relative à α, nous pouvons détruire les termes qui contiennent $\cos\alpha$.

Par conséquent,

$$mp = 4a^3\sigma \int_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} \cos^3 \frac{n\psi}{2}\, d\psi$$
$$\times \int_0^{2\pi} [n(n\cos\psi - \sin\psi \sin n\psi) + (1 \cos n\psi) \cos\psi \cos^2\alpha]\, d\alpha,$$

$$mp = 8\pi a^3\sigma \int_0^{\frac{\pi}{n}} \cos^3 \frac{n\psi}{2} [(2n^2+1)\cos\psi - 2n \sin\psi \sin n\psi + \cos\psi \cos n\psi]\, d\psi$$

ou

$$mp = 8\pi a^3\sigma \int_0^{\frac{\pi}{n}} f(\psi)\, d\psi,$$

si l'on pose

$$f(\psi) = \left(\frac{1}{4}\cos\frac{3n\psi}{2} + \frac{3}{4}\cos\frac{n\psi}{2}\right)$$
$$\times \left[(2n^2+1)(\cos\psi - \frac{2n-1}{2}\cos(n-1)\psi + \frac{2n+1}{2}\cos(n+1)\psi\right].$$

$$f(\psi)=\frac{6n^2-2n+5}{8}\cos\frac{n-2}{2}\psi+\frac{6n^2+2n+5}{8}\cos\frac{n+2}{2}\psi$$
$$+\frac{4n^2-6n+5}{16}\cos\frac{3n-2}{2}\psi+\frac{4n^2+6n+5}{16}\cos\frac{3n+2}{2}\psi$$
$$-\frac{2n-1}{16}\cos\frac{5n-2}{2}\psi+\frac{2n+1}{16}\cos\frac{5n+2}{2}\psi,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{n}} f(\psi)\,d\psi=\frac{6n^2-2n+5}{4(n-2)}\cos\frac{\pi}{n}+\frac{6n^2+2n+5}{4(n+2)}\cos\frac{\pi}{n}$$
$$-\frac{4n^2-6n+5}{8(3n-2)}\cos\frac{\pi}{n}-\frac{4n^2+6n+5}{8(3n+2)}\cos\frac{\pi}{n}$$
$$-\frac{2n-1}{8(5n-2)}\cos\frac{\pi}{n}+\frac{2n+1}{8(5n+2)}\cos\frac{\pi}{n}$$
$$=\frac{1}{4}\cos\frac{\pi}{n}\left(\frac{12n^3+2n}{n^2-4}-\frac{12n^3+3n}{9n^2-4}+\frac{n}{25n^2-4}\right)$$
$$=\frac{600n^7\cos\frac{\pi}{n}}{(n^2-4)(9n^2-4)(25n^2-4)}.$$

Il en résulte que

$$p=\frac{225n^7a\cos\frac{\pi}{n}}{(n^2-4)(9n^2-4)(25n^2-4)}.$$

En posant $n=1$ et $n=2$, on a

$$p=\frac{5a}{7}\qquad\text{et}\qquad p=\frac{75\pi a}{128}.$$

Si $n=1$, les droites oy' et ox forment l'angle π.

Désignons par p' la distance du centre d'inertie de la surface épicycloïdale à la droite AB.

Alors

$$p'=p-na\cos\frac{\pi}{n}.$$

Par le milieu de la droite AB, menons la droite $o'z'$ parallèle à oz. Le moment d'inertie de la surface épi-

cycloïdale autour de l'axe $o'z'$ est égal à

$$j_{o'z'} = j_{oz} - m(p^2 - p'^2) = j_{oz} - mna\cos\frac{\pi}{n}\left(2p - na\cos\frac{\pi}{n}\right),$$

$$j_{o'z'} = ma^2\left[n^2\left(1 + \cos^2\frac{\pi}{n}\right) + \frac{24}{7} - \frac{450\,n^8\cos^2\frac{\pi}{n}}{(n^2-4)(9n^2-4)(25n^2-4)}\right].$$

En posant $n = \infty$, on a

$$j_{o'z'} = ma^2\left(\pi^2 - \frac{9104}{1575}\right).$$

Considérons la surface de révolution engendrée par la cycloïde tournant autour de sa base. Le moment d'inertie de cette surface autour de l'axe équatorial est égal à l'expression trouvée, parce que la surface considérée est la limite de la surface épicycloïdale, quand n augmente indéfiniment.

D'autre part, ce moment d'inertie est égal à

$$4\pi\sigma a^4\int_0^{2\pi}(\varphi - \sin\varphi)^2(1-\cos\varphi)\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi$$
$$+ 2\pi\sigma a^4\int_0^{2\pi}(1-\cos\varphi)^3\sin\frac{\varphi}{2}\,d\varphi - m\pi^2 a^2.$$

Le deuxième membre est la moitié du moment d'inertie de la même surface autour de l'axe de révolution. Ce moment d'inertie est égal à

$$64\pi\sigma a^4\int_0^{\pi}\sin^7\psi\,d\psi = \frac{2048\pi\sigma a^4}{35} = \frac{96\,ma^2}{35}.$$

Désignons par P et P' les distances du centre d'inertie du corps épicycloïdal au point O et à la droite AB. Alors

$$MP = \sigma\int_{\psi=+\frac{\pi}{n}}^{\psi=-\frac{\pi}{n}}\int_{\alpha=0}^{\alpha=2\pi} y'\,dV,$$

$$dV = -a^3(1\cos n\psi)^3(n + \cos\alpha)\sin^2\alpha\,d\psi\,d\alpha.$$

Par suite,

$$\mathrm{MP} = \sigma a^4 \int_{-\frac{\pi}{n}}^{+\frac{\pi}{n}} (1+\cos n\psi)^2\, d\psi \int_0^{2\pi} [n(n\cos\psi - \sin\psi \sin n\psi)\sin^2\alpha$$
$$+(1+\cos n\psi)\cos\psi\cos^2\alpha\sin^2\alpha\, d\alpha].$$

Nous avons supprimé les termes qui contiennent $\cos\alpha$ et $\cos^3\alpha$

$$\mathrm{MP} = \frac{\sigma\pi a^4}{2}\int_0^{\frac{\pi}{n}} f(\psi)\, d\psi,$$

si l'on pose

$$f(\psi) = (1+\cos n\psi)^2[(4n^2+1)\cos\psi - 4n\sin\psi\sin n\psi + \cos\psi\cos n\psi]$$
$$= \left(\frac{5}{2} + \frac{15\cos n\psi}{4} + \frac{3\cos 2n\psi}{2} + \frac{\cos 3n\psi}{4}\right)$$
$$\times\left[(4n^2+1)\cos\psi - \frac{4n-1}{2}\cos(n-1)\psi + \frac{4n+1}{2}\cos(n+1)\psi\right],$$

$$f(\psi) = \frac{80n^2+35}{8}\cos\psi + \frac{15n^2-7n+7}{2}\cos(n-1)\psi$$
$$+\frac{15n^2+7n+7}{2}\cos(n+1)\psi + \frac{12n^2-14n+7}{4}\cos(2n-1)\psi$$
$$+\frac{12n^2+14n+7}{4}\cos(2n+1)\psi + \frac{n^2-3n+1}{2}\cos(3n-1)\psi$$
$$+\frac{n^2+3n+1}{2}\cos(3n+1)\psi - \frac{4n-1}{16}\cos(4n-1)\psi$$
$$+\frac{4n+1}{16}\cos(4n+1)\psi.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{n}} f(\psi)\, d\psi = \frac{80n^2+35}{8}\sin\frac{\pi}{n} + \frac{15n^2-7n+7}{2(n-1)}\sin\frac{\pi}{n}$$
$$-\frac{15n^2+7n+7}{2(n+1)}\sin\frac{\pi}{n} - \frac{12n^2-14n+7}{4(2n-1)}\sin\frac{\pi}{n}$$
$$+\frac{12n^2+14n+7}{4(2n+1)}\sin\frac{\pi}{n} + \frac{n^2-3n+1}{2(3n+1)}\sin\frac{\pi}{n}$$
$$-\frac{n^2+3n+1}{2(3n+1)}\sin\frac{\pi}{n} + \frac{1}{8}\sin\frac{\pi}{n}$$
$$= \sin\frac{\pi}{n}\left[\frac{20n^2+9}{2} + \frac{8n^2+7}{n^2-1} + \frac{16n^2-7}{2(4n^2-1)} - \frac{8n^2-1}{9n^2-1}\right]$$
$$= \frac{360n^8\sin\frac{\pi}{n}}{(n^2-1)(4n^2-1)(9n^2-1)}.$$

Il en résulte que

$$P = \frac{36 n^8 a \sin \frac{\pi}{n}}{\pi(n^2-1)(4n^2-1)(9n^2-1)}.$$

En posant $n = 1$ et $n = 2$, on a

$$P = \frac{3a}{4} \qquad \text{et} \qquad P = \frac{1024\,a}{175\pi}.$$

Le moment d'inertie du corps épicycloïdal autour de l'axe $o'z'$ est égal à $I_{o'z'} = I_{oz} - M(P^2 - P'^2)$ ou

$$I_{o'z'} = Ma^2 \left[n^2 \left(1 + \cos^2 \frac{\pi}{n}\right) + \frac{161}{80} - \frac{36 n^9 \sin \frac{2\pi}{n}}{\pi(n^2-1)(4n^2-1)(9n^2-1)} \right].$$

En posant $n = \infty$, on a

$$I_{o'z'} = Ma^2 \left(\frac{\pi^2}{3} - \frac{511}{720} \right).$$

Considérons le corps de révolution engendré par la cycloïde tournant autour de sa base. Le moment d'inertie de ce corps autour de l'axe équatorial passant par le centre d'inertie est égal à l'expression trouvée. D'autre part, il est égal à

$$\pi\sigma a^4 \int_0^{2\pi} (\varphi - \sin\varphi)^2 (1 - \cos\varphi)^3 \, d\varphi$$
$$+ \frac{\pi\sigma a^5}{4} \int_0^{2\pi} (1 - \cos\varphi)^5 \, d\varphi - M\pi^2 a^2.$$

Le deuxiène membre est la moitié du moment d'inertie du même corps autour de l'axe de révolution. Ce moment d'irertie est égal à

$$32\pi\sigma a^5 \int_0^{\pi} \sin^{10}\psi \, d\psi = \frac{63\sigma\pi^2 a^5}{8} = \frac{63 Ma^2}{40}.$$

NOTE SUR LES APPROXIMATIONS DANS LE CALCUL LOGARITHMIQUE;

PAR M. VLADISLAS PUCHEWICZ.

Les auteurs des manuels d'Algèbre, en parlant de l'approximation d'un nombre donné par son logarithme, font la remarque que, la différence tabulaire étant Δ, on ne peut obtenir le nombre qu'approché à $\frac{1}{\Delta}$: remarque qui serait tout à fait juste, si le logarithme à l'aide duquel nous calculons le nombre, ainsi que le logarithme tabulaire, étaient exacts. Mais, comme le logarithme tabulaire n'est approché qu'à $\frac{1}{2}$ (¹), les différences qu'à 1, et le logarithme du nombre cherché, résultat en général des opérations sur d'autres logarithmes, qu'à une approximation variable, cette remarque ne nous suffit pas à définir l'approximation d'un nombre calculé à l'aide des logarithmes. Même M. Vieille, dans son ouvrage spécial : *Théorie générale des approximations numériques,* en s'occupant minutieusement des erreurs provenant de l'hypothèse de la proportionnalité des petits accroissements des nombres et de leurs logarithmes, ne résout pourtant pas la question générale.

Dans cette Note, je démontre que l'on peut toujours obtenir le logarithme d'un nombre approché à $\frac{1}{2}$, je cal-

(¹) Lorsque je parle d'un logarithme, j'appelle *unité* l'unité du rang du dernier chiffre des logarithmes tabulaires; lorsque je parle d'un nombre, le même mot désigne l'unité du rang du dernier chiffre des nombres tabulaires. Je crois que ce double emploi du même mot ne présentera aucune difficulté au lecteur.

cule l'approximation d'un nombre trouvé à l'aide de son logarithme, étant donnée l'approximation de ce logarithme, et j'applique ces règles dans un exemple numérique. Je ne mentionne pas des erreurs provenant de la proportionnalité, car, comme on le sait, elles sont négligeables en présence des erreurs provenant de l'inexactitude des logarithmes tabulaires.

Soient ε_1 et ε_2 les erreurs des deux logarithmes tabulaires consécutifs, $\gamma = \varepsilon_2 - \varepsilon_1$ l'erreur de la différence tabulaire, et d la partie fractionnaire du nombre dont nous désirons obtenir le logarithme. L'erreur, dans ce logarithme, sera alors la somme des erreurs du logarithme tabulaire et de l'accroissement calculé à l'aide de la différence; cette erreur sera donc

$$\varepsilon_1 + d\gamma. \tag{1}$$

Comme la limite de ε_1 est $\frac{1}{2}$, et que la limite de γ est 1, on pourrait croire, au premier coup d'œil, que la limite de (1) est $1\frac{1}{2}$; nous démontrerons que cette limite est égale à $\frac{1}{2}$.

Nous remarquons qu'il peut se présenter les trois cas suivants : 1° ε_1 et ε_2 sont de mêmes signes, et, quant à la valeur numérique, ε_1 est plus grand que ε_2; 2° ils sont de mêmes signes, mais la valeur numérique de ε_2 est plus grande que celle de ε_1; 3° ils sont de signes contraires.

Dans le premier cas, γ est moindre que $\frac{1}{2}$ et du signe contraire à ε_1, et comme d est une fraction proprement dite, l'expression (1) est une différence de deux fractions, chacune moindre que $\frac{1}{2}$; par suite cette expression même est moindre que $\frac{1}{2}$.

Dans le deuxième cas, γ est aussi moindre que $\frac{1}{2}$, mais est du signe contraire à ε_1; or, si l'on remplace ε_1 par

$\varepsilon_2 - \gamma$, on obtient

$$\varepsilon_2 - \gamma + d\gamma = \varepsilon_2 - (1 - d)\gamma,$$

et cette expression, où γ est du même signe que ε_2, est de nouveau une différence de deux fractions, chacune moindre que $\frac{1}{2}$.

Dans le troisième cas, γ peut être plus grand que $\frac{1}{2}$; mais, si nous mettons dans (1) $\varepsilon_2 - \varepsilon_1$ à la place de γ, nous obtenons

$$\varepsilon_1 + d(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) = (1 - d)\varepsilon_1 + \varepsilon_2,$$

et, comme ε_1 et ε_2 sont de signes contraires, nous avons de nouveau la différence de deux fractions dont chacune est moindre que $\frac{1}{2}$.

Nous voyons donc que, si nous tâchons d'obtenir le résultat avec la plus grande approximation possible, il ne faut pas rejeter dans l'accroissement du logarithme les chiffres du rang inférieur à celui des *unités* des logarithmes. Même dans les calculs élémentaires, il serait bon de retenir ces chiffres, surtout lorsqu'on doit multiplier le logarithme par un nombre entier.

Nous avons supposé jusqu'à présent que le nombre dont nous voulions calculer le logarithme, ainsi que sa partie fractionnaire d, étaient exacts : si le nombre n'était qu'approché à α, il faudrait, avant tout, connaître l'erreur qui en résultera pour le logarithme. Cette erreur aura pour limite $\alpha\Delta'$, où Δ' est la limite supérieure de la différence tabulaire. On trouve cette limite supérieure en comparant la différence à côté du nombre donné avec les différences voisines.

A l'aide de ces règles, nous pourrons toujours définir la limite de l'erreur dans un logarithme résultant des

opérations sur d'autres logarithmes et représentant le logarithme du nombre cherché : cette limite pourra être mise sous la forme $m.\frac{1}{2}$. Si nous calculons le nombre correspondant à un tel logarithme, nous devons ajouter au nombre tabulaire la fraction $\frac{\delta}{\Delta}$, où Δ est la différence tabulaire, et δ la différence entre notre logarithme et le logarithme tabulaire. L'approximation de Δ est 1, c'est-à-dire $2.\frac{1}{2}$, et celle de δ est $(m+1)\frac{1}{2}$. Cherchons l'erreur absolue de la fraction $\frac{\delta}{\Delta}$, d'après la formule

$$\frac{\delta+\beta}{\Delta+\gamma}-\frac{\delta}{\Delta}=\frac{\Delta\beta-\delta\gamma}{(\Delta+\gamma)\Delta}.$$

Pour trouver la limite supérieure de cette fraction, remarquons que δ et Δ sont positifs, et représentons par β' et γ' les valeurs absolues de β et γ. Le numérateur de cette fraction ne peut pas être plus grand que $\Delta\beta'+\delta\gamma'$, et, *a fortiori*, que $\Delta(\beta'+\gamma')$; le dénominateur ne peut pas être plus petit que $(\Delta-\gamma')\Delta$, de manière que la fraction ne peut pas être plus grande que $\frac{\beta'+\gamma'}{\Delta-\gamma'}$. En substituant pour β' et γ' leurs valeurs limites $(m+1)\frac{1}{2}$ et 1, nous obtenons la valeur limite de l'erreur

$$(2)\qquad \frac{m+3}{2(\Delta-1)}.$$

Comme, en général, la division $\delta:\Delta$ ne s'effectue pas exactement, il faudra ajouter encore à cette limite une fraction $\frac{r}{\Delta}$ (r étant le reste de la division $\delta:\Delta$), fraction qui pourra être remplacée dans la limite par $\frac{r}{\Delta-1}$.

Dans le cas où l'on trouve le logarithme dans les tables, la limite de l'erreur est

$$(2')\qquad \frac{m+1}{2(\Delta-1)},$$

parce qu'alors il faut mettre $\delta = 0$, à cause de quoi le terme $\delta\gamma$ disparaît dans le numérateur.

La fraction (2') représente la limite de ce qu'on devrait ajouter au nombre tabulaire, si le logarithme qui nous sert à calculer le nombre, ainsi que le logarithme tabulaire, pouvaient être donnés exactement.

Comme exemple, calculons la surface d'un triangle par la formule

$$S = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2 \sin(B + C)},$$

où

$$a = 413{,}386, \qquad B = 36^\circ 47' 23'', \qquad C = 49^\circ 25' 40''.$$

Le calcul sera

$\log a^2 =$	$5{,}2327116$	approché à	$2\frac{1}{2}$
$\log \sin B =$	$\bar{1}{,}77733976$	»	$1\frac{1}{2}$
$\log \sin C =$	$\bar{1}{,}8805774$	»	$1\frac{1}{2}$
$\log 2 =$	$\bar{1}{,}6989700$ (1)		
$\log \sin (B + C) =$	$0{,}00094708$	»	$1\frac{1}{2}$
$\log S =$	$4{,}5905{,}4584$	approché à	$5\frac{1}{2}$

Nous trouverons dans les tables cinq chiffres entiers : 38953 auxquels il faudra ajouter la fraction $\frac{49{,}4}{112}$ en tenant compte de l'erreur $\frac{5+3}{2.111} = \frac{4}{111}$.

En effectuant la division 49,4 : 112, nous obtenons le premier chiffre du quotient 4 et le reste 4,6; le second chiffre du quotient sera aussi 4, et le reste correspon-

(1) Nous ne marquons pas l'approximation de log 2, car, si même on prenait ce logarithme avec huit chiffres, il serait 0,30103000, sa valeur plus exacte étant 0,30102999566....

Comme le nombre 2 entre souvent dans les calculs, il vaut la peine de se souvenir que son logarithme n'augmente pas l'erreur, excepté le cas où il serait multiplié par un nombre considérable.

dant o, 12. Si nous prenons $S = 38953{,}4$, cette valeur sera en tout cas trop petite, la partie omise de l'accroissement $\frac{4{,}6}{112}$ étant plus grande que l'erreur du sens indéfini $\frac{4}{111}$; mais l'erreur par défaut sera moindre que $\frac{8{,}6}{111}$, et aussi moindre que o, 1. Si nous prenons $S = 38953{,}44$, la limite de l'erreur sera $\frac{4{,}12}{111}$, moindre que o,04.

Supposons maintenant que les données de ce calcul ne sont pas des nombres exacts, mais approchés eux-mêmes à $\frac{1}{2}$ de leur dernier chiffre. Conformément à la signification convenue du mot *unité* dans le nombre, la limite de cette erreur aura pour chaque nombre l'expression $\frac{1}{20}$.

Pour le nombre a, la différence tabulaire est 105; mais, après 105, nous trouvons des différences 106 : donc, pour limite supérieure de cette différence, il faut prendre 106, et l'erreur du logarithme de a^2, provenant de l'inexactitude du nombre, aura pour limite

$$2.\frac{1}{20}.106 = 21,2\tfrac{1}{2}.$$

On pourrait calculer de même les limites dans les logarithmes des sinus, mais nous rencontrons dans cet exemple un cas spécial : $(B + C)$ étant moindre que 90°, les erreurs de B et de C donnent des erreurs de même sens dans les logarithmes des sin B et sin C que dans le logarithme de sin $(B + C)$, et, comme ce dernier logarithme doit être retranché de la somme des deux premiers, l'erreur totale sera aussi la différence des erreurs correspondantes [1]. Nous obtenons pour limite de ces

---

[1] Désignons les erreurs de B et C par α et β (qui sont de signes indéterminés), l'erreur de $(B + C)$ sera alors $(\alpha + \beta)$; désignons les limites des différences tabulaires correspondantes par Δ'_B, Δ'_C et Δ'_{B+C};

trois erreurs $\frac{1}{20}(282 - 13) + \frac{1}{20}(181 - 13) = 43,7\frac{1}{2}$, de manière que la limite de l'erreur totale, dans le logarithme, sera

$$(5 + 21,2 + 43,7)\tfrac{1}{2},\ \text{c'est-à-dire } 70\tfrac{1}{2},$$

et la limite de l'erreur dans le nombre $\frac{73}{2.111} = \frac{36,5}{111}$.

L'accroissement du nombre étant comme auparavant $\frac{49,4}{112}$, si l'on prend pour S les cinq chiffres entiers, on a une valeur de S approchée par défaut à moins de $\frac{85,9}{111}$, c'est à-dire à moins d'une unité. Si l'on prend S avec le premier chiffre décimal, le sens de l'erreur reste indéterminé, et la limite de l'erreur est $\frac{36,5}{111} + \frac{4,6}{112}$, c'est-à-dire moindre que 0,4.

CERCLE TANGENT A TROIS CERCLES DONNÉS;

Par M. V. HIOUX,
Professeur au lycée de Nantes.

1. La solution qui suit comprend, comme cas particulier, celle de Gergonne, qui se trouve ainsi complètement justifiée.

Donnons-nous trois cercles (A), (B), (C), de rayons inégaux; plaçons les centres aux trois sommets d'un triangle ABC et, pour fixer les idées, supposons chaque cercle extérieur aux deux autres. Appelons C′ le centre

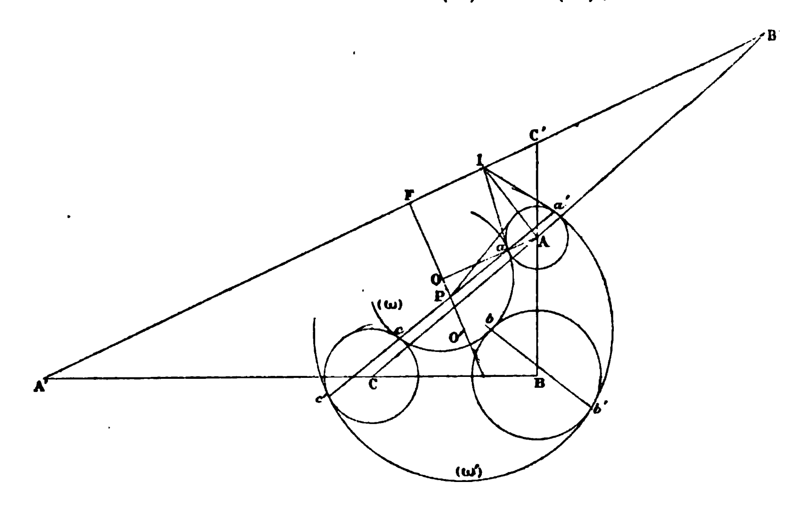
---

la limite de l'erreur sera

$$\alpha\Delta'_B + \beta\Delta'_C - (\alpha+\beta)\Delta'_{B+C} = \alpha(\Delta'_B - \Delta'_{B+C}) + \beta(\Delta'_C - \Delta'_{B+C}),$$

où alors pour Δ'_{B+C} il faudra prendre non la limite supérieure, mais la limite inférieure.

de similitude directe de (A) et de (B); de même A' le centre de similitude directe de (B) et de (C); enfin B' le



centre de similitude directe de (C) et de (A). Les centres de similitude inverse correspondants pourront être désignés par C'_1, A'_1, B'_1.

Si un cercle (ω) touche deux quelconques des cercles donnés, (A) et (B) par exemple, en *a* et *b*, les points de contact seront, dans le système (A), (B), (ω), ou deux centres de similitude de même nature, ou deux centres de similitude de nature différente.

En considérant le premier cas, on a les théorèmes suivants :

THÉORÈME I. — *Si les points de contact d'un cercle* (ω) *et de deux cercles* (A) *et* (B) *sont deux centres de similitude de même nature :*

1° *Les points de contact a et b sont antihomologues par rapport au centre de similitude directe* C' *de* (A) *et de* (B) ;

2° *Le cercle* (ω) *coupe orthogonalement un cercle fixe* (H) *de centre* C'.

3° *Le cercle* (H) *a le même axe radical que les cercles* (A) *et* (B).

Démonstration. — 1° On observe d'abord que les trois centres de similitude a, b et C′ sont en ligne droite, puisque les deux premiers sont de même nature et que C′ est un centre de similitude directe.

Soit M le point de rencontre des tangentes à (ω) en a et b; ces tangentes sont égales et par suite le point M est sur l'axe radical de (A) et (B); il suit de là que les points a et b sont antihomologues par rapport au point C′, l'une des origines d'inversion de (A) et de (B).

2° Soit λ la puissance d'inversion pour le point C′. On a

$$C'a \times C'b = \lambda.$$

Donc le cercle (ω) coupe orthogonalement un cercle (H), de centre C′ et de rayon $\sqrt{\lambda}$.

3° On observe d'abord que tout cercle passant par les points a et b de (A) et de (B), antihomologues par rapport à C′, coupe orthogonalement le cercle d'inversion (H) relatif à C′.

Considérons en particulier le cercle (ω_1) de centre M et de rayon $Ma = Mb$; il coupe orthogonalement les cercles donnés. Soit m un de ses points de rencontre avec (H). On a $C'a \times C'b = \lambda = \overline{C'm}^2$: donc $C'm$ est une tangente menée de C′ au cercle (ω_1). Dès lors Mm est perpendiculaire sur $C'm$ et se trouve tangent à (H) en m. On a $Ma = Mb = Mm$. Le point M est d'égale puissance par rapport à (A), (B) et (H), dont les centres sont sur la même droite AB.

Les trois cercles ont donc le même axe radical.

C. Q. F. D.

Théorème II. — *Si un cercle* (ω) *coupe orthogo-*

nalement le cercle d'inversion (H) *et touche* (A) *en a, il touche également* (B) *en un point b antihomologue de a par rapport au centre de similitude directe* C'.

En effet, si l'on forme la figure inverse du système (A), (ω) et (H) en prenant C' pour origine et λ pour module, le cercle (H) se conserve, le cercle (ω) est à lui-même son inverse et vient toucher l'inverse de (A) qui est (B) en un point b, anti-homologue de a sur la droite C'a.

C. Q. F. D.

2. Cela posé, soit (ω) un cercle touchant (A), (B) et (C) respectivement en a, b et c, les points de contact étant des centres de similitude de même nature pour le groupe (A, B) d'une part, pour le groupe (A, C) d'autre part, et par suite pour le groupe (B, C).

Soit (H) le cercle d'inversion de centre C' pour (A) et (B); soit de même (K) le cercle d'inversion de centre B' pour (A) et (C). Le cercle cherché (ω) doit couper orthogonalement chacun des cercles d'inversion (H) et (K). Donc, en vertu du théorème II, on est ramené au problème suivant :

Tracer un cercle coupant orthogonalement les cercles d'inversion (H) *et* (K) *et touchant l'un des cercles donnés, le cercle* (A) *par exemple.*

La solution du problème dépend des deux lemmes suivants :

Lemme I. — *Tous les cercles coupant orthogonalement les cercles* (H) et (K) *ont pour axe radical la ligne des centres* C'B' *de ces deux cercles, c'est-à-dire l'axe de similitude directe des cercles proposés.*

Considérons en effet deux quelconques de ces cercles (ω_1) et (ω_2) : ils sont coupés orthogonalement par (H)

et par (K); donc leur axe radical passe par C′, centre de (H), et par B′, centre de (K); cet axe radical est donc la droite C′B′. c. q. f. d.

Lemme II. — *L'axe radical du cercle* (A), *par exemple, et d'un cercle variable* (ω_1) *coupant orthogonalement* (H) *et* (K) *tourne autour d'un point fixe* (I) *de l'axe de similitude directe des cercles donnés, quand le centre de* (ω_1) *se déplace sur l'axe radical de* (H) *et de* (K).

Au cercle (A), associons deux cercles (ω_1) et (ω_2) orthogonaux à (H) et (K); leur centre radical I est un point de l'axe radical de (ω_1) et (ω_2), c'est-à-dire un point de C′B′; si l'on fait varier le cercle (ω_1) toujours orthogonal à (H) et à (K), le point I, intersection des deux axes radicaux fixes, ne changera pas; donc l'axe radical tournera autour du point I. c. q. f. d.

Remarque. — Sans tracer les cercles (H) et (K), on peut obtenir à volonté un cercle (ω_1) qui les coupe orthogonalement.

Pour cela, il suffit de se donner un point p sur (A) et de construire son antihomologue q sur (B) par rapport à C′ et son antihomologue p sur (C) par rapport à B′.

On sait que tout cercle passant par p et q coupe orthogonalement le cercle (H) et que tout cercle passant par p et r coupe orthogonalement le cercle (K). Donc un cercle (ω_1) circonscrit au triangle pqr coupera orthogonalement les deux cercles (H) et (K). En menant du centre O_1 de (ω_1) la perpendiculaire sur l'axe de similitude directe des cercles donnés, on aura l'axe radical de (H) et (K) [1].

---

[1] En outre, l'axe radical de (ω_1) et de (A) fournit le point I par

3. On peut maintenant résoudre le problème en question d'une manière tout à fait générale :

Règle générale. — Pour tracer un cercle (ω) touchant *de la même manière* trois cercles donnés (A), (B) et (C) :

1° Construisez l'axe de similitude directe des cercles donnés et tracez un cercle (ω_1) coupant orthogonalement les cercles d'inversion (H) et (K);

2° Du centre O_1 de (ω_1) menez la perpendiculaire O_1F sur l'axe de similitude et construisez l'axe radical de (ω_1) et du cercle (A), par exemple, lequel coupe en I l'axe de similitude en question;

3° Du point I menez la tangente I*a* au cercle (A) et prolongez le rayon A*a* de ce cercle jusqu'à sa rencontre en O avec O_1F. Le cercle (ω) de centre O et de rayon O*a* répond à la question.

Il y a deux solutions; car du point I on peut, en général, mener une deuxième tangente I*a'* au cercle (A), ce qui fournit un deuxième cercle (ω') répondant également à la question.

Ce procédé de solution n'exige pas que le centre radical des cercles donnés soit à distance finie.

Mais, comme c'est le cas le plus intéressant, il est bon de l'étudier d'une façon toute particulière.

4. Soit P le centre radical des cercles donnés : c'est le centre d'un cercle (R) coupant orthogonalement les cercles donnés; il coupe aussi orthogonalement chacun des cercles (H) et (K), par suite d'une propriété déjà démontrée. L'axe radical des cercles (H) et (K) est donc la perpendiculaire PF menée du point P sur l'axe de

---

où vient passer la tangente en *a* au cercle (A) et au cercle cherché (ω).

similitude directe des cercles proposés. En outre, pour la détermination du point I, le cercle radical (R) peut ici tenir lieu du cercle (ω_1) déjà considéré.

On est ainsi conduit à la règle suivante :

Règle particulière. — Pour tracer un cercle touchant *de la même manière* trois cercles (A), (B), (C) dont les centres ne sont pas en ligne droite :

1° Construisez l'axe de similitude directe et le centre radical P des trois cercles et menez de ce point la perpendiculaire PF sur l'axe en question ;

2° Déterminez le point de rencontre I de cet axe et de la polaire du point P par rapport au cercle (A), par exemple, et du point I menez les tangentes Ia et Ia' à ce cercle ;

3° Tracez les rayons Aa et Aa' et prolongez-les jusqu'à la droite PF en O et en O'. Vous avez ainsi les centres de deux cercles (ω) et (ω') qui répondent à la question et qui touchent (A) en a et en a'.

Remarque. — La corde de contact aa', polaire du point I par rapport au cercle (A), passe en P, puisque I est sur la polaire de P. Soit α le pôle par rapport à (A) de l'axe de similitude directe; ce pôle est sur aa'. Cette droite est donc déterminée par ce pôle α et le point P.

On verrait de même que, si bb' est la corde de contact de (B) avec (ω) et (ω'), elle passe par P et par β, pôle par rapport à (B) de l'axe de similitude. Même observation pour la corde de contact cc' de (C) avec (ω) et (ω').

Corollaire. — La solution de Gergonne est une conséquence de la précédente et se trouve dès lors complètement justifiée.

Observation finale. — Les cercles d'inversion (H) et (K) n'interviennent que par leur axe radical PF. Or que

les modules correspondant à deux cercles d'inversion soient positifs ou négatifs, leur axe radical sera toujours la perpendiculaire menée de P sur l'axe de similitude qui contient leurs centres.

On est ainsi conduit à appliquer la construction précédente à l'un quelconque des quatre axes de similitude, en observant que les cercles (ω) et (ω') ne toucheront plus de la même manière les trois cercles donnés. La polaire déjà utilisée du point P par rapport au cercle (A) servira pour chacun des axes de similitude. On a ainsi, en général, quatre groupes de deux, c'est-à-dire huit cercles tangents à trois cercles donnés.

La même méthode s'applique quand l'un dés cercles est remplacé par une droite ou par un point et, en général, quand on conserve au moins un cercle sur trois.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

Critica y Sintesis del Algebra; par *D. Z. G. de Galdeano*, catedratico del Instituto di Toledo. Toledo, J. Pelaez; 1888. In-8° de 126 pages. Prix : 5fr,60.

Théorie des radicaux fondée exclusivement sur les propriétés générales des séries entières; par M. *Ch. Méray*, professeur à la Faculté des Sciences de Dijon. Dijon, Darantière; 1889. In-8° de 75 pages.

Curso de Analyse infinitesimal; par *F. Gomes Teixeira*, director da Academia polytechnica do Porto. Calculo differencial. 2e édition. Porto, typografia occidental; 1890. In-8° de 359 pages.

Saggio sul riordinamento delle Matematiche; par l'ing. prof. *V. Riccardo Fontana*. Genova, tipografia forense; 1890. In-8° de 100 pages.

Monatshefte fur Mathematik und Physik; herausgegeben von Prof. *G. v. Escherich* und Prof. *Em. Weyr*. I. Jahrgang. Wien, Manz; 1890. In-8° de IV-484 pages. Prix : 17fr,25.

Compositions d'Algèbre, Mécanique et Astronomie, données depuis 1865 à la Sorbonne pour la licence ès Sciences mathématiques, suivies d'exercices sur les variables imaginaires; par *E. Villie*-

doyen de la Faculté libre des Sciences de Lille. ÉNONCÉS ET SOLUTIONS. Seconde Partie. Paris, Gauthier-Villars et fils. In-8° de VIII-318 pages. Prix : 8fr, 50.

LEÇONS D'ALGÈBRE SUPÉRIEURE; par *G. Salmon,* professeur au collège de la Trinité, à Dublin. Ouvrage traduit de l'anglais par M. *O. Chemin,* professeur à l'École nationale des Ponts et Chaussées. 2e édition française, publiée d'après la 4e édition anglaise. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1890. In-8° de XVIII-576 pages. Prix : 10fr.

THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ DES CORPS SOLIDES; par M. *Émile Mathieu,* professeur à la Faculté des Sciences de Nancy. *Première Partie :* Considérations générales sur l'élasticité. Emploi des coordonnées curvilignes. Problèmes relatifs à l'équilibre d'élasticité. Plaques vibrantes. *Seconde Partie :* Mouvements vibratoires des corps solides. Équilibre d'élasticité des lames courbes et du prisme rectangle. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1890. 2 vol. in-4° de VIII-219 et 181 pages. Prix : 11fr et 9fr.

MÉTHODE PRATIQUE POUR LA RÉSOLUTION NUMÉRIQUE COMPLÈTE DES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES OU TRANSCENDANTES; par M. *E. Carvallo,* professeur au lycée Saint-Louis. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1890. In-4° de 40 pages.

TRAITÉ DE MÉCANIQUE CÉLESTE; par *F. Tisserand,* membre de l'Institut. Tome II : THÉORIE DE LA FIGURE DES CORPS CÉLESTES ET DE LEUR MOUVEMENT DE ROTATION. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1891. In-4° de XIV-552 pages. Prix : 28fr.

ŒUVRES DE FERMAT, publiées par les soins de MM. *Paul Tannery* et *Charles Henry,* sous les auspices du Ministère de l'Instruction publique. Tome I : ŒUVRES MATHÉMATIQUES DIVERSES. OBSERVATIONS SUR DIOPHANTE. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1891. In-4° de XXXVII-440 pages. Prix : 22fr.

FABRICATION DES TUBES SANS SOUDURE, PROCÉDÉ MANNESMANN; par *F. Reuleaux.* Conférence faite à la Société des Ingénieurs allemands, le 16 avril 1890. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1891. In-18 jésus de 30 pages, avec figures dans le texte. Prix : 0fr, 75.

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DE L'OBJECTIF PHOTOGRAPHIQUE; par *E. Wallon,* professeur au lycée Janson de Sailly. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1891. In-8° de VIII-299 pages. Prix : 7fr, 50.

ANNUAIRE POUR L'AN 1891, publié par le Bureau des longitudes, contenant les Notices suivantes : Compte rendu d'une ascension scientifique au mont Blanc; par M. *J. Janssen.* — La question des petites planètes; par M. *F. Tisserand.* — Sur le Congrès géodésique de Fribourg; par M. *F. Tisserand.* — Sur la méthode Doppler-Fizeau, permettant la détermination par l'analyse spectrale de la vitesse des astres dans la direction du rayon visuel; par M. *A. Cornu.* In-18 de V-807 pages, avec deux Cartes magnétiques. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1891. Prix : broché, 1fr, 50; cartonné, 2fr.

Leçons d'Arithmétique; par *L. Maleyx*, professeur au collège Stanislas. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1891. In-8° de VI-175 pages. Prix : 4fr.

Étude géométrique des propriétés des coniques d'après leur définition; par *L. Maleyx*, professeur au collège Stanislas. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1891. In-8° de 150 pages, avec 81 figures dans le texte. Prix : 2fr,75.

Théorie des équations et des inéquations du premier et du second degré a une inconnue, à l'usage des aspirants au baccalauréat ès Sciences et au baccalauréat de l'Enseignement spécial, des candidats aux Écoles du Gouvernement et des élèves des Écoles normales; par *A. Tartinville*, professeur au lycée Saint-Louis. 2e édition, revue et augmentée. Paris, Nony et Cie; 1891. In-8° de 226 pages. Prix : 3fr,50.

Cours de Trigonométrie rectiligne; par *E. Dessenon*, professeur au lycée Saint-Louis. Paris, Nony et Cie; 1891. In-8° de II-282 pages, Prix : 3fr.

Compléments d'Algèbre et notions de Géométrie analytique, à l'usage des candidats à l'École de Saint-Cyr et des élèves de Mathématiques élémentaires qui se destinent aux Mathématiques spéciales; par *A. Macé de Lépinay*, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Henri IV. Paris, Nony et Cie; 1891. In-8° de 392 pages avec 195 figures dans le texte. Prix : 4fr.

Démonstration élémentaire du théorème de Bachet « Tout nombre entier est la somme de quatre carrés au plus »; par *A. Matrot*, ingénieur en chef des Mines. Paris, Nony et Cie; 1891. In-8° de 16 pages. Prix 0fr,60.

Théorie des équations, suite aux compléments d'Algèbre, avec de nombreux exercices; par *E. Jablonski*, professeur du cours préparatoire à l'École Centrale au lycée Charlemagne. Paris, Delalain frères; 1891. In-8° de XII-404 pages.

Lezioni di Algebra elementare; per *Giacomo Bellacchi*, professore nel R. Istituto tecnico Galileo. Vol. terzo. Parte II. Teoria dell' equazioni. Firenze, G. Barbera; 1891. Petit in-8° de 238 pages. Prezzo: lire 3.

Anales de la Sociedad cientifica argentina. Enero de 1891. Entrega I. Tomo XXXI. Buenos-Aires, local de la Sociedad; 1891. Precios de suscricion : Un año, 10 pesos.

Rivista di Matematica, diretta da *G. Peano*, professore di Calcolo infinitesimale nella R. Universita di Torino e nella R. Accademia militare. Fascicoli 1°, 2° et 3°; gennaio, febbraio e marzo 1891. Torino, fratelli Bocca; 1891. Prezzo d'abbonnamento annuo : lire 7.

El Progreso matematico, periodico de matematicas puras y applicadas. Director : Don *Zoel G. de Galdeano*, catedratico de Geometria analitica de la Universidad de Zaragoza. Año I., num. 1°,

2e et 3e. Zaragoza; 1891. Precios de subscripcion : un año, 10 pts.

FUNCTION UND BEGRIFF; von Dr *G. Frege*, professor an der Universität Jena. Jena, Hermann Pohle; 1891. In-8° de 32 pages. Preis : M. 1,20.

ŒUVRES DE LAPLACE, publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences par les *Secrétaires perpétuels*. T. VIII : MÉMOIRES EXTRAITS DES RECUEILS DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1891. In-4° de 501 pages. Prix : 20fr.

TRAITÉ DES FONCTIONS ELLIPTIQUES ET DE LEURS APPLICATIONS; par *G.-H. Halphen*, membre de l'Institut. 3e Partie : FRAGMENTS. Publication faite par les soins de la Section de Géométrie de l'Académie des Sciences. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1891. In-8° de XVI-272 pages. Prix : 8fr, 50.

COMPOSITIONS DONNÉES DEPUIS 1872 AUX EXAMENS DE SAINT-CYR; par *A. Grévy*, agrégé des Sciences mathématiques, professeur au lycée de Bar-le-Duc. ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE. Énoncés et solutions. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1891. In-8° de 94 pages, avec 30 figures. Prix : 2fr, 50.

LEÇONS DE PHYSIQUE GÉNÉRALE; par *James Chappuis*, agrégé, docteur ès Sciences, professeur de Physique générale à l'École Centrale des Arts et Manufactures, et *Alphonse Berget*, docteur ès Sciences, attaché au laboratoire des recherches physiques à la Sorbonne. Cours professé à l'École Centrale des Arts et Manufactures et complété suivant le programme de la licence ès Sciences physiques. T. I : INSTRUMENTS DE MESURE, CHALEUR. CAPILLARITÉ. T. II : ÉLECTRICITÉ ET MAGNÉTISME. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1891. Grand in-8° de IX-486 pages et de 496 pages, avec 484 figures dans le texte. Prix de chaque volume : 13fr.

TIRAGES A PART.

Bemerkungen über die Jacobischen Thetaformeln; Bemerkungen über die Darstellung von Reihen durch Integrale; par M. L. KRONECKER. Extraits du *Journal de Kronecker;* t. CII et CV.

Ueber die arithmetischen Sätze, welche Lejeune-Dirichlet in seiner Breslauer Habilitationsschrift entwickelt hat; Bemerkungen ueber Dirichlet's letzte Arbeiten; Ueber eine summatorische Function; Zur Theorie der elliptischen Functionen; par M. L. KRONECKER. Extraits des *Sitzungsberichte der Akademie der Wissenchaften zu Berlin;* 1888, 1889 et 1890.

Sur quelques théorèmes de Dirichlet; par M. F. TANO. Extrait du *Journal de Kronecker;* t. CV.

Optique géométrique; par M. l'abbé ISSALY. Extrait des *Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux;* t. V, 3e série.

Sur la courbure dans les courbes du second degré; Sur les points caractéristiques de quelques droites remarquables dans les coni-

ques; Sur l'hyperbole équilatère; Sur les involutions cubiques conjuguées; Sur les points d'inflexion dans les cubiques; par M. CL. SERVAIS. Extraits des *Bulletins de l'Académie royale de Belgique;* t. XIX et XX, 3ᵉ série, 1890.

Note sur le développement en séries des fonctions sinus, cosinus et de la fonction exponentielle; par M. A. DEMOULIN. Extrait du *Bulletin de l'Académie royale de Belgique;* t. XIX, 3ᵉ série, 1890.

Sur la courbure des lignes planes; Sur diverses conséquences du théorème de Newton; par M. A. DEMOULIN. Extraits des *Mémoires couronnés et autres Mémoires publiés par l'Académie royale de Belgique;* t. XLIV et XLV, 1890 et 1891.

Sur la décomposition d'un entier quelconque en une somme de carrés; Sur les résidus quadratiques; par M. A. MATROT. Extraits du *Bulletin de l'Association française pour l'avancement des Sciences;* 1890.

Intégration de l'équation de Brassine au moyen des fonctions hyperbernoulliennes; par M. G. DE LONGCHAMPS. Extrait du *Bulletin de l'Association française pour l'avancement des Sciences;* 1890.

Sur les figures symétriques successives; par M. J. NEUBERG. Extrait du *Bulletin de l'Association française pour l'avancement des Sciences;* 1890.

Felice Casorati, cenno necrologico; Altra addizione alla nota sui determinanti di determinanti; par M. E. D'OVIDIO. Extrait des *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino;* t. XXVI, 1890.

Étude sur la géométrie élémentaire des sections coniques; par M. A. MOREL. Extrait du *Journal de Mathématiques élémentaires;* 1890.

Sur la convergence des développements des intégrales ordinaires d'un système d'équations différentielles totales; par MM. MÉRAY et RIQUIER. Extrait des *Annales de l'École Normale;* 1890.

Influence du terme de dispersion de Briot sur les lois de la double réfraction; par M. E. CARVALLO. Extrait des *Annales de l'École Normale;* 1890.

Le proprieta focali delle coniche nella metrica projettiva; Sulle coniche confocali nella metrica projettiva; par M. E. D'OVIDIO. Extraits des *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino:* t. XXVI, 1891.

De la symétrie courbe; par M. S. MANGEOT. Extrait des *Annales de l'École Normale;* 1891.

De l'échange de plusieurs marchandises entre elles; par M. LÉON WALRAS. Extrait des *Mémoires de la Société des ingénieurs civils;* 1891.

Démonstration purement algébrique du théorème fondamental de la théorie des équations; par M. E. AMIGUES. Extrait des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences;* 1891.

BIBLIOGRAPHIE.

Cours d'Algèbre à l'usage des élèves de la classe de Mathématiques spéciales et des candidats à l'École Normale supérieure et à l'École Polytechnique; par *B. Niewenglowski*, docteur ès sciences, ancien élève de l'École Normale supérieure, professeur de Mathématiques spéciales au lycée Louis-le-Grand, membre du Conseil supérieur de l'Instruction publique. 2e édition. Paris, Armand Colin et Cie, 1891. 2 vol. in-8° de 11-384 et 508 pages. Prix : 12fr.

La deuxième édition de ce Cours d'Algèbre ne diffère pas sensiblement de la première; signalons toutefois, dans la théorie des séries, l'addition d'une règle de Kummer comprenant un grand nombre de règles de convergence connues et, dans la théorie de l'élimination, une nouvelle rédaction concernant les conditions pour que deux équations aient un nombre donné de racines communes.

CONSTRUCTION GÉOMÉTRIQUE DU CENTRE DE COURBURE EN UN POINT D'UNE COURBE RAPPORTÉE A DES COORDONNÉES POLAIRES;

Par M. HUSQUIN DE RHÉVILLE,
Ingénieur civil.

I. Soit O (*fig.* 1) le pôle du système de coordonnées.

On sait que le segment ON, limité sur le rayon vecteur d'angle polaire $\omega + \frac{\pi}{2}$ par la normale AN en un

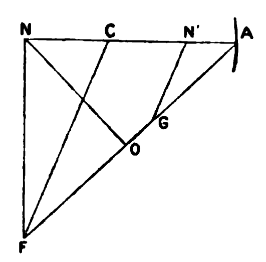
point A de coordonnées ρ et ω, a pour valeur

$$ON = \frac{d\rho}{d\omega}.$$

Nous nous proposons d'indiquer une interprétation géométrique des quantités $\frac{d^2\rho}{d\omega^2}$ et $\frac{d^2\omega}{d\rho^2}$.

II. *Représentation géométrique de* $\frac{d^2\rho}{d\omega^2}$. — Soit C le centre de courbure de la courbe au point A : menons NF

Fig. 1.



perpendiculaire à la normale AN jusqu'à sa rencontre en F avec le rayon. Joignons CF et menons-lui la parallèle N'G par le point N' symétrique de N par rapport à C. Cette dernière droite rencontre le rayon OA en un point G, tel que

$$OG = -\frac{d^2\rho}{d\omega^2},$$

le signe — indiquant que le point G tombe sur OA ou sur son prolongement suivant que $\frac{d^2\rho}{d\omega^2}$ est négatif ou positif.

En effet,

$$OG = FG - FO = AN\,\frac{AF}{AC} - AF - \frac{\overline{ON}^2}{OA}.$$

En remplaçant dans cette expression les quantités par les valeurs suivantes

$$AN = \left[\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}, \qquad AF = \frac{1}{\rho}\left[\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)^2\right],$$

$$ON = \frac{d\rho}{d\omega}, \qquad AC = \frac{\left[\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2\left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)^2 - \rho\,\frac{d^2\rho}{d\omega^2}},$$

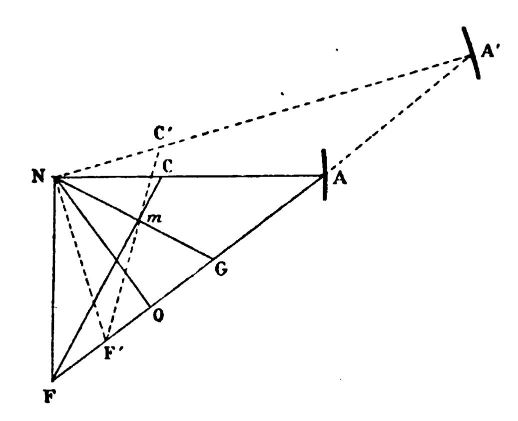
on obtient l'égalité cherchée

$$OG = -\frac{d^2\rho}{d\omega^2}.$$

III. *Centre de courbure d'une conchoïde.* — Réciproquement, si l'on connaît la valeur de $\frac{d^2\rho}{d\omega^2}$, on peut construire linéairement le centre de courbure C.

Il suffit de porter sur le rayon vecteur OA une longueur $OG = \frac{d^2\rho}{d\omega^2}$ et de joindre le point F au milieu *m*

Fig. 2.



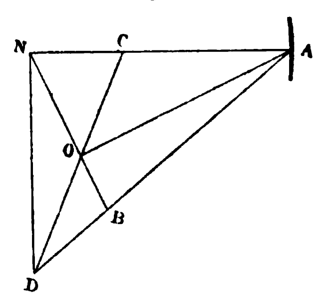
de NG. Cette droite F*m* passe au centre de courbure C cherché (*fig.* 2).

Si un point A′ décrit une conchoïde de la courbe donnée, c'est-à-dire si AA′ est constant quel que soit le point A, les quantités $\frac{d\rho}{d\omega}$, $\frac{d^2\rho}{d\omega^2}$ sont identiques en A et en A′ et le point m est fixe quelle que soit la longueur AA′.

Pour construire le centre de courbure C′ de la conchoïde au point A′, on mène NF′ perpendiculaire à la normale NA′ jusqu'à sa rencontre en F′ avec le rayon OA. La droite F m, joignant le point F′ au milieu m de NG, passe au centre de courbure C′ cherché.

IV. *Représentation géométrique de* $\frac{d^2\omega}{d\rho^2}$. — Joignons le centre C de courbure au pôle O et soit D le point de rencontre de cette droite CO avec la perpendiculaire ND à la normale AN (*fig.* 3).

Fig. 3.



La droite AD rencontre ON en un point B tel que

$$OA \times OB = \frac{1}{\frac{d^2\omega}{d\rho^2}}.$$

En effet, le triangle ABN coupé par la transversale COD, nous donne

$$OB = ON \times \frac{AC}{NC} \times \frac{DB}{AD}.$$

On voit facilement que

$$\frac{DB}{AD} = \frac{\overline{ON}^2 + OB.ON}{\overline{AN}^2}.$$

La première égalité devient alors, en y remplaçant $\frac{DB}{AD}$ par sa valeur et en la résolvant par rapport à OB,

$$OB = \frac{\overline{ON}^3.AC}{\overline{AN}^3 - AC(\overline{AN}^2 + \overline{ON}^2)}.$$

En substituant aux quantités géométriques leurs valeurs en fonction de ρ, $\frac{d\rho}{d\omega}$ et $\frac{d^2\rho}{d\omega^2}$, on obtient, après simplification,

$$OB = -\frac{\left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)^3}{\rho\frac{d^2\rho}{d\omega^2}}.$$

En se rappelant que

$$\rho = OA, \qquad \frac{d^2\omega}{d\rho^2} = -\frac{d^2\rho}{d\omega^2}\left(\frac{d\omega}{d\rho}\right)^3,$$

ceci peut s'écrire, sous la forme cherchée,

$$OA \times OB = \frac{1}{\frac{d^2\omega}{d\rho^2}}.$$

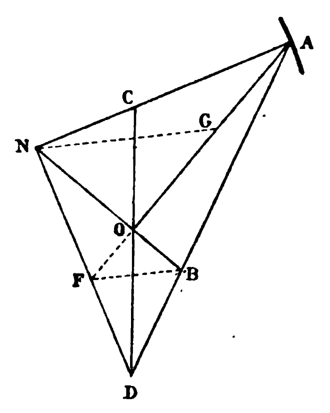
V. Réciproquement, si l'on connait la valeur de $\frac{d^2\omega}{d\rho^2}$ au point A, on peut construire linéairement le centre C de courbure.

Il suffit de porter sur le rayon vecteur d'angle polaire $\omega + \frac{\pi}{2}$ une longueur OB telle que

$$OB = \frac{1}{\rho\frac{d^2\omega}{d\rho^2}},$$

de joindre AB qui rencontre en D la perpendiculaire ND à la normale AN menée par l'extrémité N de la sous-normale polaire (*fig.* 4).

Fig. 4.



La droite DO passe au centre de courbure C cherché.

Remarquons que si, par le point N, on mène une parallèle à la droite FB, elle rencontre le rayon vecteur au point G précédemment défini par la relation

$$OG = -\frac{d^2\rho}{d\omega^2}.$$

En effet,

$$OG = OF\,\frac{ON}{OB} = \frac{\overline{ON}^2}{OA}\,\frac{ON}{OB} = \frac{\overline{ON}^3}{OA.OB}$$

et, comme

$$OA.OB = \frac{1}{\frac{d^2\omega}{d\rho^2}}, \qquad ON = \frac{d\rho}{d\omega},$$

on voit que

$$OG = \frac{d^2\omega}{d\rho^2}\left(\frac{d\rho}{d\omega}\right)^3 = -\frac{d^2\rho}{d\omega^2}.$$

RÉALISATION ET USAGE DES FORMES IMAGINAIRES EN GÉOMÉTRIE.

CONFÉRENCES DONNÉES PAR M. MAXIMILIEN MARIE
au Collège Stanislas, à Sainte-Barbe, à l'École Sainte-Geneviève et à l'École Monge (¹).

Sommaire de la théorie du développement en série, par la formule de Taylor, d'une fonction implicite y, définie par une équation algébrique $f(x, y) = 0$.

1. Pour qu'une série à termes imaginaires soit convergente, il faut que la série des parties réelles de tous ses termes et la série de leurs parties imaginaires soient séparément convergentes, c'est-à-dire que, si le terme général est représenté par $A_u + B_u\sqrt{-1}$, il faut, pour que la série soit convergente, que A_u et B_u, et par conséquent $\sqrt{A_u^2 + B_u^2}$, tendent vers zéro.

2. Une série ordonnée suivant les puissances croissantes d'une variable, et dont tous les coefficients sont finis, est toujours convergente lorsque la variable ne prend que des valeurs dont le module soit suffisamment petit.

3. Une série ordonnée suivant les puissances croissantes d'une variable reste convergente lorsque le module de la variable reste, si peu que ce soit, inférieur à une certaine limite, et devient divergente lorsque le

---

(¹) *Voir* t. X, p. 373.

module de la variable dépasse, de si peu que ce soit, cette même limite. Lorsque le module de la variable atteint la limite en question, la série est convergente ou divergente, selon la valeur de la variable elle-même; mais la série, dans ce cas douteux, ne pourrait pas être utilisée comme étant trop peu convergente, si elle l'était; en sorte qu'il importe peu de savoir ce qu'il en est.

4. Une série ordonnée suivant les puissances croissantes d'une variable est convergente ou divergente, sauf les cas douteux, en même temps que toutes ses dérivées ou intégrales.

5. Si x_0 et y_0 sont deux valeurs, qui se correspondent, de la variable x et de la fonction y, définie par une équation algébrique $f(x,y) = 0$, la série

$$y_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 \frac{x - x_0}{1} + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 \frac{(x - x_0)^2}{1.2} + \ldots,$$

qui reste convergente tant que le module de $(x - x_0)$ reste suffisamment petit, mais à condition qu'aucun des coefficients différentiels $\left(\frac{dy}{du}\right)_0$, $\left(\frac{d^2y}{du_2}\right)_0$, ... ne soit infini, définit l'ordonnée d'un lieu tel que, si aux deux équations $f(x,y) = 0$ d'une part et $y =$ la série, de l'autre, on adjoignait une même relation complémentaire quelconque $\varphi(\alpha, \beta, \alpha', \beta',) = 0$, les deux courbes déterminées, sur les deux lieux superficiels, par cette condition, auraient au point $[x_0, y_0]$ un contact d'ordre infini, c'est-à-dire se confondraient dans une étendue plus ou moins grande à partir du point $[x_0, y_0]$.

[illegible] ordon[illegible] deux lieux superficiels [illegible] et $y =$ la série [illegible] aussi dans un intervalle plus ou

moins étendu, c'est-à-dire que la série fournira, dans un intervalle plus ou moins étendu, la valeur de la fonction y définie par l'équation $f(x,y)=0$.

7. Mais l'identité des deux fonctions ne sera jamais complète, d'abord parce que la série ne restera pas toujours convergente et que, devenue divergente, elle ne définirait plus aucune fonction ; en second lieu parce que la fonction y, définie par l'équation $f(x,y)=0$, aurait toujours m valeurs, pour toute valeur de x, si l'équation $f(x,y)=0$ était de degré m par rapport à y, tandis que la fonction définie par la série, supposée convergente, n'en aura jamais qu'une.

8. La série ne définira donc jamais qu'un segment de la fonction y, définie par l'équation $f(x,y)=0$, et l'identité des deux fonctions ne s'étendrait en tous cas que jusqu'aux valeurs de x telles que le module de $(x-x_0)$ restât assez petit pour que la série elle-même restât convergente.

9. Les solutions de l'équation $y=$ la série formeront plaque sur le tableau, comme celles de l'équation $f(x,y)=0$, mais la première plaque ne sera jamais qu'une portion de la seconde. Cette première plaque s'appellera la *région de convergence* et le lieu des points situés sur son contour s'appellera le *périmètre de la région de convergence*.

10. La valeur que ne devrait pas dépasser le module de $(x-x_0)$, pour que la série restât convergente, dépend, par rapport au lieu $f(x,y)=0$, du système des deux valeurs initiales x_0 et y_0 de x et de y. Si h est la valeur qui convient, en raison de la position du point origine $[x_0, y_0]$, le périmètre de la région de conver-

gence sera défini, quant aux abscisses de ses points, par la condition

$$(\alpha - \alpha_0)^2 + (\beta - \beta_0)^2 = k^2,$$

et quant à ses ordonnées, par les deux équations contenues dans

$$f(\alpha + \beta\sqrt{-1},\ \alpha' + \beta'\sqrt{-1}) = 0,$$

auxquelles on joindrait les équations

$$x_1 = \alpha + \beta \quad \text{et} \quad y_1 = \alpha' + \beta'.$$

11. L'équation du périmètre de la région de convergence sera toujours algébrique, si l'on suppose algébrique l'équation $f(x, y) = 0$; mais la courbe représentée par cette équation fournirait beaucoup de branches parasites. Il faudrait en effet éliminer toutes celles de ces branches, en nombre $m - 1$, dont les ordonnées ne satisferaient pas à l'équation $y =$ la série.

12. Lorsqu'une fonction atteint une valeur infinie pour une valeur finie de sa variable, toutes ses dérivées deviennent aussi infinies; lorsqu'une des dérivées d'une fonction devient infinie, toutes les suivantes le deviennent aussi.

13. Un point d'un lieu où, soit l'ordonnée et ses dérivées, soit une des dérivées de l'ordonnée et toutes les suivantes, deviennent infinies, ne peut jamais se trouver dans l'intérieur de la région de convergence, puisque, dans l'hypothèse contraire, ou bien la série pourrait prendre une valeur infinie et rester convergente, ou bien ce serait une des dérivées de la série qui pourrait prendre une valeur infinie et rester convergente.

Mais il se trouvera toujours au moins un de ces points sur le périmètre de la région de convergence, parce que celles des dérivées de la fonction qui devien-

draient infinies au delà de la région de convergence acquerront déjà, en deçà, des valeurs très grandes fournies encore par les dérivées correspondantes de la série primitive; et que la divergence ne pourra se produire, pour ces séries dérivées, qu'à l'instant où elles devraient acquérir des valeurs infinies.

Les séries dérivées, d'ordres moins élevés, tomberont alors dans le cas douteux et seront sur le point de devenir divergentes, comme on l'a dit plus haut, en ce sens seulement que le terme général n'y tendra plus vers zéro, ce qui ne veut pas dire que la somme d'un assez grand nombre des premiers termes croîtrait indéfiniment.

14. Les points particuliers dont il vient d'être question prennent le nom de *points critiques* du lieu en question. Les uns, comme les points de contact des tangentes parallèles à l'axe des y, varient dans le lieu avec la direction de l'axe des y; les autres, au contraire, comme la plupart des points de rebroussement, restent fixes dans le lieu.

15. La première chose à faire pour préparer la discussion de la série suivant laquelle se développe l'ordonnée d'un lieu est de déterminer exactement tous les points critiques de ce lieu.

A cet égard, on remarquera d'abord que les dérivées d'une fonction ne peuvent devenir infinies, à partir d'un certain ordre, qu'aux points où cette fonction a acquis plusieurs valeurs égales.

On commencera donc par relever tous les points du lieu où plusieurs valeurs de l'ordonnée se confondraient.

Soient x et y les coordonnées de l'un d'eux et p son degré de multiplicité. Si les dérivées premières de ces p valeurs de y sont toutes finies et différentes, leurs déri-

vées d'ordres plus élevés resteront toutes finies et le point en question ne sera pas critique.

Si $p-q$ de ces dérivées se séparent des autres, sans devenir infinies, et ont des valeurs distinctes, le point considéré ne sera pas critique relativement aux formes correspondantes de la fonction y.

Si, sur les q dérivées restantes, $q-r$ se séparent des autres en devenant infinies, le point en question sera critique par rapport aux $q-r$ formes correspondantes de la fonction y.

On ne pourra encore rien dire relativement aux r dernières formes de la fonction, mais on les dérivera de nouveau jusqu'à ce que les dérivées ultérieures se séparent ou deviennent infinies, ce qui arrivera tôt ou tard, parce que, si les dérivées des ordonnées de quelques branches du lieu restaient indéfiniment confondues, ces deux branches auraient entre elles un contact d'ordre infini, ou se confondraient elles-mêmes, ce qui ne saurait arriver dans un lieu algébrique irréductible, comme on doit toujours supposer que soit le lieu en discussion.

16. Tous les points critiques du lieu étant ainsi déterminés, la question de la convergence de la série suivant laquelle l'ordonnée y du lieu aurait été développée, à partir d'un point origine $[x_0, y_0]$, non critique, se réduira à savoir lequel de tous les points critiques se trouvera sur le périmètre de la région de convergence et déterminera ce périmètre, ainsi que la région enveloppée.

La méthode à suivre pour résoudre cette question consistera à écarter successivement tous ceux des points critiques où ne pourrait pas se rendre un point mobile $[x, y]$, parti du point $[x_0, y_0]$, sans que le module de $[x-x_0]$ eût dû dépasser momentanément celui de la différence entre x_0 et l'abscisse d'un autre point cri-

tique $[x_1, y_1]$ où aurait pu se rendre d'abord le point $[x, y]$, pour parvenir au point essayé.

Le tableau dressé d'avance des deux enveloppes et de toutes les conjuguées, surtout de celles qui passeraient par les points critiques du lieu, facilitera singulièrement la solution de la question précédente, parce que, si, pour se rendre du point $[x_0, y_0]$ à un point critique $[x_n, y_n]$, le point $[x, y]$ devait forcément traverser la conjuguée qui passerait en un autre point critique $[x_1, y_1]$ et si, pouvant se rendre sur cette dernière conjuguée ou sur celle des enveloppes qui l'y toucherait, il pouvait s'approcher indéfiniment du point $[x_1, y_1]$ sans que le module de $(x - x_0)$ dépassât celui de $(x_1 - x_0)$, le point critique $[x_n, y_n]$ devrait évidemment être écarté en présence du point $[x_1, y_1]$, puisque la série serait déjà devenue divergente pour $x = x_1$.

On arrivera ainsi à déterminer sûrement le point d'arrêt de la convergence, sans autre difficulté que celle que présentera la complication de l'équation du lieu.

17. On s'aidera puissamment dans cette discussion en s'appuyant sur cette observation presque intuitive que, si le point $[x, y]$ peut, sans sortir de la région de convergence, se rendre sur une conjuguée tangente à l'enveloppe réelle, en un point critique, il ne pourra pas passer sur cette enveloppe et réciproquement. En effet, si $[x_1, y_1]$ est ce point critique, le module de $[x_0 - x_1]$ sera toujours compris entre les modules des différences entre x_0 et les abscisses de deux points pris l'un sur l'enveloppe et l'autre sur la conjuguée, à des distances infiniment petites du point $[x_1, y_1]$.

18. Si l'on déplaçait d'une manière continue le point origine $[x_0, y_0]$, la région de convergence se déformerait aussi d'une manière continue; le périmètre de cette ré-

gion pivoterait d'abord autour de l'ancien point d'arrêt, il viendrait, à un instant donné, passer par un nouveau point critique et abandonnerait ensuite le premier pour pivoter autour du second, et ainsi de suite.

19. J'ai nommé *courbe d'équilibre* entre deux points critiques le lieu sur lequel pourrait se déplacer le point origine $[x_0, y_0]$ sans que le périmètre de la région de convergence cessât de passer à la fois par ces deux points critiques.

La considération de ces courbes d'équilibre facilite singulièrement la fixation du point d'arrêt et ses déplacements intermittents, lors du déplacement continu du point origine.

20. Lorsque, en raison de la situation du point origine $[x_0, y_0]$ dans le lieu, le point $[x, y]$, parti de ce point, pourra, par des mouvements en sens contraires, se rendre indifféremment à l'un ou l'autre de deux points critiques, sans en dépasser d'autres, on appliquera la règle de Cauchy, c'est-à-dire qu'on prendra pour point d'arrêt celui des deux points critiques dont l'abscisse retranchée de x_0 donnerait le moindre module.

21. Soit d'abord pris pour exemple le lieu

$$a^2y^2 + b^2x^2 - a^2b^2 = 0,$$

les deux points critiques sont $[x = +a,\ y = 0]$ et $[x = -a,\ y = 0]$, où $\frac{dy}{dx}$ devient infini.

La courbe d'équilibre entre ces deux points est caractérisée par l'équation

$$(\alpha_0 - a)^2 + \beta_0^2 = (\alpha_0 + a)^2 + \beta_0^2 \qquad \text{ou} \qquad \alpha_0 = 0;$$

c'est donc celle des conjuguées de l'ellipse qui la touche en ses sommets situés sur l'axe des y. Ainsi, si le point

$[x_0, y_0]$ appartient à cette conjuguée, le périmètre de la région de convergence passera à la fois par les deux sommets placés sur l'axe des x.

Pour que le point d'arrêt soit $[x = +a, y = 0]$, il faudra que α_0 et β_0 satisfassent à l'inégalité

$$(\alpha_0 - a)^2 + \beta_0^2 < (\alpha_0 + a)^2 + \beta_0^2,$$

c'est-à-dire que α_0 soit positif, ou que le point $[x_0, y_0]$ appartienne à une branche de conjuguée tangente à l'ellipse en un point du premier ou du quatrième quadrant.

Quelque part que le point $[x_0, y_0]$ soit placé sur le lieu, le point $[x, y]$ fourni par l'équation $y =$ la série (supposée convergente) ne pourra jamais traverser l'arc des x pour passer d'une des branches sur l'autre, de la courbe réelle ou de la conjuguée $c = \infty$, car autrement la série pourrait fournir deux valeurs de y pour une même valeur de x.

Cette remarque sera souvent utilisable. Dans tous les cas analogues, le point d'arrêt sera toujours un point de rebroussement pour le périmètre de la région de convergence.

Le point d'arrêt restant fixé au point $[x = +a, y = 0]$, c'est-à-dire α_0 restant positif, supposons qu'on veuille savoir si le point mobile $[x, y]$ pourra passer sur la courbe réelle ou sur la conjuguée $c = \infty$: il faudra pour cela remarquer que, pour que le point $[x, y]$ reste dans l'intérieur de la région de convergence, le module de $(x - x_0)$, ou

$$(\alpha - \alpha_0)^2 + (\beta - \beta_0)^2,$$

devra rester moindre que celui de $(a - x_0)$, ou

$$(a - \alpha_0)^2 + \beta_0^2,$$

mais que, si le point $[x, y]$ doit se trouver sur la courbe

réelle ou sur la conjuguée $c = \infty$, β, alors, sera nul, ce qui réduira la condition précédente à

$$(\alpha - \alpha_0)^2 + \beta_0^2 < (a - \alpha_0)^2 + \beta_0^2$$

ou

$$a^2 - 2\alpha_0 a + 2a\alpha_0 - a^2 < 0.$$

Les racines de l'équation à zéro de ce trinôme sont

$$\alpha_0 + (a - \alpha_0) \quad \text{et} \quad \alpha_0 - (a - \alpha_0),$$

de sorte que, pour que le trinôme soit négatif, il faudra que α varie entre

$$\alpha_0 + (a - \alpha_0) \quad \text{et} \quad \alpha_0 - (a - \alpha_0);$$

si $\alpha_0 = a = h$, le maximum sera a et le minimum $a - 2h$; et si $\alpha_0 = a + h$, le minimum sera a et le maximum $a + 2h$.

Ainsi le point $[x, y]$, représenté par l'équation $y =$ la série, ne pourra jamais passer de la courbe réelle sur la conjuguée $c = \infty$ ou réciproquement.

Fig. 28.

Il pourra passer sur la courbe réelle si $\alpha_0 < a$, et sur la conjuguée $c = \infty$ si $\alpha_0 > a$ (*fig.* 28).

Si α_0 était égal à a, le périmètre de la région de convergence n'aurait que le point A de commun soit avec la courbe réelle, soit avec la conjuguée $c = \infty$.

On pourrait aisément construire le périmètre de la région de convergence pour une position donnée du point $[x_0, y_0]$, et déterminer la portion de chaque conjuguée dont les ordonnées pourraient être fournies par la série.

22. Considérons maintenant le lieu

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 = - a^2 b^2:$$

les points critiques sont

$$[x = +a, y = 0] \quad \text{et} \quad [x = -a, y = 0].$$

La courbe d'équilibre est caractérisée comme dans l'exemple précédent par la condition $\alpha_0 = 0$. Cette courbe

Fig. 29.

est l'enveloppe imaginaire des conjuguées, TBT'T''B'T''', fournie par les solutions de la forme

$$x = \beta\sqrt{-1}, \qquad y = \beta'\sqrt{-1}$$

de l'équation du lieu (*fig.* 29).

Pour que le point d'arrêt soit le point A, il faut que $\alpha_0 > 0$, c'est-à-dire, si le point $[x_0, y_0]$ appartient à la conjuguée $bab'a'$, pour que le point d'arrêt soit le point A, il faut que le point $[x_0, y_0]$ soit placé sur la branche bab'.

23. Soit encore le lieu

$$a^2 y^2 = b^2 x^2 = - a^2 b^2;$$

les deux points critiques sout

$$[x = \pm a\sqrt{-1}, y = 0];$$

la courbe d'équilibre est caractérisée par la condition

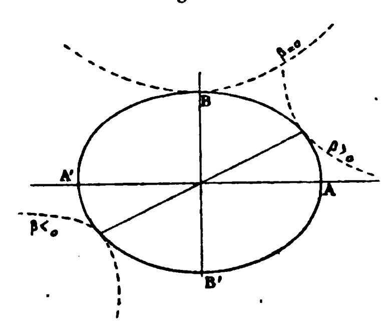
$$\alpha_0^2 + (\beta_0 - a)^2 = \alpha_0^2 + (\beta_0 + a)^2$$

ou

$$\beta_0 = 0:$$

c'est la conjuguée à abscisses réelles, laquelle touche l'en-

Fig. 30.



veloppe imaginaire ABA'B' en ses sommets situés sur l'axe des y (*fig.* 30).

Pour que le point A soit le point d'arrêt, il faudra que

$$\alpha_0^2 + (\beta_0 - a)^2 < \alpha_0^2 + (\beta_0 + a)^2$$

ou que β_0 soit positif; c'est-à-dire que le point origine se trouve sur une demi-conjuguée tangente à l'enveloppe imaginaire en un point de l'axe BAB'.

(*A suivre.*)

THÉORÈME FONDAMENTAL POUR LA RÉSOLUTION NUMÉRIQUE DES ÉQUATIONS [1];

PAR M. E. CARVALLO,
Examinateur d'admission à l'École Polytechnique.

1. *Pour que les racines* α_p *et* α_{p+1} *du polynôme* $f(x) = x^m + A_1 x^{m-1} + \ldots + A_p x^{m-p} + \ldots + A_m$ *soient séparées* [2], *il faut et il suffit que* $\left(\frac{A_{p+k}}{A_p}\right)^{\frac{1}{k}}$ *soit négligeable devant* $\left(\frac{A_p}{A_{p-l}}\right)^{\frac{1}{l}}$ *pour toutes les valeurs de* k *et de* l. *Le polynôme* $f(x)$ *se sépare alors en deux fragments. Le premier, obtenu en supprimant les termes qui suivent* A_p, *donne les* p *premières racines. Le second fragment, obtenu en négligeant les termes qui précèdent* A_p, *donne les* $m - p$ *dernières racines.*

La deuxième partie de ce théorème est fondamentale dans ma thèse. Je veux y revenir dans un double but : l'étendre en la précisant et signaler son importance.

La forme de l'énoncé que je viens de rappeler me pa-

---

(1) *Méthode pratique pour la résolution numérique complète des équations algébriques ou transcendantes*, p. 13, n° 9. Thèse de Doctorat. Gauthier-Villars et fils; 1890.

(2) Les racines sont supposées rangées dans l'ordre des modules décroissants. Un nombre imaginaire est dit *négligeable* devant un autre si le module du premier, divisé par celui du second, donne un quotient inférieur à l'erreur relative qu'on tolère dans le calcul. Enfin les racines α_p et α_{p+1} sont dites *séparées* si α_{p+1} est *négligeable* devant α_p.

raît celle qui convient le mieux à mon sujet, dégageant l'idée dominante sans s'attacher à fixer des limites précises. Cette recherche de précision et de rigueur qu'on a l'habitude d'apporter dans les approximations numériques vient, sans doute, de la préoccupation de présenter aux élèves des raisonnements inattaquables, mais elle offre un double inconvénient : alourdir les démonstrations par des calculs pénibles et dissimuler ainsi l'idée principale. Voilà pour la théorie. Pratiquement, elle conduit à des limites trop larges, parce que le raisonnement embrasse à la fois tous les cas les plus défavorables. Quoique je me sois trouvé parfaitement d'accord avec mes juges sur ce point, je suis heureux de satisfaire ici la légitime exigence des professeurs et des savants qui pourraient ne pas partager mes idées.

2. Je considère, non plus une équation algébrique de degré m, mais l'équation plus générale, à coefficients réels ou imaginaires,

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} 0 = f(x) = \ldots + A_{p-l}x^{m-p+l}\ldots \\ + A_p x^{m-p}\ldots + A_{p+k}x^{m-p-k}\ldots, \end{aligned}\right.$$

qui peut être prolongée indéfiniment dans les deux sens. Je suppose que l'inégalité

$$(2)\qquad \operatorname{mod}\left(\frac{A_{p+k}}{A_p}\right)^{\frac{1}{k}} < \operatorname{mod}\left(\frac{A_p}{A_{p-l}}\right)^{\frac{1}{l}}$$

soit satisfaite pour toutes les valeurs de k et de l. Soit K la plus grande valeur du premier membre, L la plus petite valeur du second. On a par hypothèse $K < L$. Je vais chercher une condition précise qui assure la séparation des racines de l'équation (1) en deux groupes et trouver des limites à ces deux groupes.

Je donne à x une valeur dont le module est compris entre K et L. Je peux représenter ce module par

$$\operatorname{mod} x = n\mathrm{K} = \frac{1}{n'}\mathrm{L}, \qquad \text{d'où} \qquad \mathrm{K} = \frac{1}{nn'}\mathrm{L},$$

n et n' étant des nombres plus grands que 1. Pour cette valeur de x, je compare le terme $\mathrm{A}_p x^{m-p}$ à ceux qui suivent et à ceux qui précèdent. Il vient successivement

(3) $$\operatorname{mod}\frac{\mathrm{A}_{p+k}x^{m-p-k}}{\mathrm{A}_p x^{m-p}} = \operatorname{mod}\frac{\mathrm{A}_{p+k}}{\mathrm{A}_p} \times x^{-k} \leqq \mathrm{K}^k \times (n\mathrm{K})^{-k} \quad \text{ou} \quad \left(\frac{1}{n}\right)^k,$$

(4) $$\operatorname{mod}\frac{\mathrm{A}_{p-l}x^{m-p+l}}{\mathrm{A}_p x^{m-p}} = \operatorname{mod}\frac{\mathrm{A}_{p-l}}{\mathrm{A}_p} \times x^{l} \leqq \left(\frac{1}{\mathrm{L}}\right)^l \left(\frac{1}{n'}\mathrm{L}\right)^l \quad \text{ou} \quad \left(\frac{1}{n'}\right)^l.$$

Les formules (3) montrent que les modules des termes qui suivent $\mathrm{A}_p x^{m-p}$ décroissent plus vite que ceux d'une progression géométrique de raison $\frac{1}{n}$. Leur somme a un module inférieur à

$$\operatorname{mod}\mathrm{A}_p x^{m-p}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} + \ldots\right) = \operatorname{mod}\mathrm{A}_p x^{m-p} \times \frac{1}{n-1}.$$

De même, d'après les formules (4), la somme des termes qui précèdent $\mathrm{A}_p x^{m-p}$ est inférieure à

$$\operatorname{mod}\mathrm{A}_p x^{m-p} \times \frac{1}{n'-1}.$$

Ainsi le module S de la somme des termes différents de $\mathrm{A}_p x^{m-p}$ satisfait à l'inégalité

$$\mathrm{S} \leqq \operatorname{mod}\mathrm{A}_p x^{m-p}\left(\frac{1}{n-1} + \frac{1}{n'-1}\right).$$

On sera certain que S est inférieur à $\operatorname{mod}\mathrm{A}_p x^{m-p}$, si

l'on pose

$$\frac{1}{n-1} < \frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{n'-1} < \frac{1}{2},$$

d'où

$$n > 3, \qquad n' > 3, \qquad K = \frac{1}{nn'} L < \frac{1}{9} L.$$

Pour la valeur de x considérée, le terme $A_p x^{m-p}$ ne peut pas se réduire avec la somme des autres, puisque cette somme a un module inférieur à celui de $A_p x^{m-p}$. L'équation n'est pas satisfaite.

En résumé, si $K < \frac{1}{9} L$, *les racines de l'équation* (1) *se séparent en deux groupes ; les unes ont leur module inférieur à* 3K; *pour les autres, le module est supérieur à* $\frac{L}{3}$.

3. Maintenant, je suppose de plus K très petit devant L; les racines du groupe inférieur à 3K rendent très petite la somme des termes qui précèdent $A_p x^{m-p}$. On négligera cette somme dans le calcul de ce groupe de racines. Le calcul ci-dessus fait connaître une limite du module de la quantité négligée : c'est

$$\operatorname{mod} A_p x^{m-p} \times \frac{1}{n'-1}.$$

Exemple numérique. — Soit $K = \frac{1}{3000} L$. Les racines du groupe inférieur à 3K donnent $n' > 1000$. Pour ces racines, la somme des termes qui précèdent $A_p x^{m-p}$ est inférieure à mod $\frac{1}{999} A_p x^{m-p}$. Il est clair, d'après le calcul même, que cette limite sera toujours bien trop forte. Si l'on néglige cette quantité, il en résultera sur le calcul des racines du groupe considéré une erreur relative de l'ordre de $\frac{1}{1000}$. La recherche d'une limite précise pour cette nouvelle erreur rentre dans le cadre

d'une intéressante Note de M. Jablonski ([1]). Je ne m'y arrête donc pas.

4. J'ai montré, dans ma thèse, que le théorème rappelé ci-dessus conduit à une méthode sûre pour résoudre facilement n'importe quelle équation numérique. En outre, il conduit très naturellement à la méthode d'approximation de Newton et à son extension. Cette méthode consiste, on le sait, à négliger les termes qui suivent les deux premiers du développement de

$$(1) \qquad 0 = f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2}f''(a) + \ldots,$$

dans lequel a est une valeur approchée d'une racine de $f(x)$ et h la correction qu'il faut lui ajouter pour avoir la racine exacte $a+h$. Notre méthode permettra de voir si ces termes sont effectivement négligeables et de trouver une limite de l'erreur commise. De plus, il pourra arriver que le troisième terme ne soit pas négligeable, mais que les termes suivants le soient. C'est ce qui arrive quand l'équation a deux racines voisines de a. Dans ce cas, l'exposition classique de la méthode conduirait à en rejeter l'application. Cependant, les deux racines considérées seront données par une simple équation du second degré. De cette remarque résulte une manière avantageuse d'appliquer la méthode de Newton proprement dite. On examine quels sont, dans le développement (1), les termes négligeables à l'approximation qu'on se propose d'obtenir définitivement. Ce n'est qu'après avoir ainsi fortement abaissé le degré de l'équation qu'on applique la méthode de Newton proprement dite à l'équation simplifiée.

([1]) *Bulletin scientifique* de M. Lebon, 20 juillet 1889.

SUR LA REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE DES POINTS IMAGINAIRES DANS L'ESPACE;

Par M. P. MOLENBROCH, à Amersfort.

Prenons un système de trois axes de coordonnées rectangulaires auquel nous rapportons deux points imaginaires par les quantités

$$(1)\qquad x_1+x_2\sqrt{-1},\qquad y_1+y_2\sqrt{-1},\qquad z_1+z_2\sqrt{-1},$$

$$(2)\qquad x'_1+x'_2\sqrt{-1},\qquad y'_1+y'_2\sqrt{-1},\qquad z'_1+z'_2\sqrt{-1}.$$

Comme définition fondamentale nous regarderons :

La distance de deux points imaginaires est la quantité d de l'équation (3)

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} d^2 = &\left[(x_1-x'_1)+(x_2-x'_2)\sqrt{-1}\right]^2\\ &-\left[(y_1-y'_1)+(y_2-y'_2)\sqrt{-1}\right]^2\\ &-\left[(z_1-z'_1)+(z_2-z'_2)\sqrt{-1}\right]^2.\end{aligned}\right.$$

Cherchons maintenant les points réels, dont la distance au point imaginaire, désigné par (1), s'annule. Si ξ, η, ζ sont les coordonnées réelles d'un de ces points, on aura, d'après la définition,

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &(\xi-x_1-x_2\sqrt{-1})^2\\ &\quad+(\eta-y_1-y_2\sqrt{-1})^2+(\zeta-z_1-z_2\sqrt{-1})^2=0,\end{aligned}\right.$$

équation qui se réduit au système suivant

$$(5)\qquad (\xi-x_1)^2+(\eta-y_1)^2+(\zeta-z_1)^2=x_2^2+y_2^2+z_2^2,$$

$$(6)\qquad x_2(\xi-x_1)+y_2(\eta-y_1)+z_2(\zeta-z_1)=0.$$

La première appartient à une sphère, dont le centre coïncide avec le point x_1, y_1, z_1 ou P_1, tandis que le

rayon est égal à la quantité $\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}$. La seconde équation est celle d'un plan passant par le point P_1, et perpendiculaire à la droite OP_2 joignant l'origine O des coordonnées aux points x_2, y_2, z_2 ou P_2.

Les coordonnées ξ, η, ζ satisfaisant à toutes les deux, le lieu des points réels, dont la distance au point imaginaire (1) s'annule, est une circonférence décrite du point P_1 comme centre avec un rayon égal à OP_2 dans un plan perpendiculaire à OP_2.

Quand, dans ce qui suit, nous parlerons d'un point imaginaire P, nous désignerons toujours par P_1, P_2 les points réels mentionnés ci-dessus.

Comme représentation géométrique d'un point imaginaire, nous choisirons le lieu des points réels tels que la distance au point imaginaire s'annule.

Le point imaginaire est, par conséquent, représenté par une circonférence. Le centre, le rayon et le plan de cette circonférence seront nommés *centre, rayon* et *plan* du point imaginaire.

Si, à partir du point P_1, nous traçons une droite P_1P' égale et parallèle à OP_2, P_1P' sera nommée la normale au point imaginaire. Les coordonnées du point P' ainsi obtenu seront

$$x_1 + x_2, \quad y_1 + y_2, \quad z_1 + z_2.$$

Nous l'appellerons parfois le *pôle* du point imaginaire.

Convenons encore qu'en déterminant la normale à un point imaginaire il faut avoir attention au signe des coordonnées x_2, y_2, z_2, de sorte que les normales aux deux points imaginaires conjugués (1) et

$$(7) \qquad x_1 - x_2\sqrt{-1}, \quad y_1 - y_2\sqrt{-1}, \quad z_1 - z_2\sqrt{-1}$$

aient longueur égale, mais direction contraire.

De cette convention il suit que les pôles des points désignés par (1) et (7) ne coïncident pas non plus. En effet, le pôle du point (7) sera déterminée par les coordonnées

$$x_1 - x_2, \quad y_1 - y_2, \quad z_1 - z_2.$$

Du reste les deux points imaginaires conjugués seront représentés par la même circonférence, puisque les équations (5) et (6) ne changent pas, quand on y remplace x_2, y_2, z_2 par $-x_2, -y_2, -z_2$.

La normale et le pôle de deux points imaginaires conjugués constituent entre ceux-ci une différence, laquelle permet de faire distinction dans la représentation géométrique.

A cet effet, nous pourrons ajouter à chaque circonférence représentant un point imaginaire une flèche indiquant le sens dans lequel on se propose que la circonférence soit parcourue. Cette flèche est toujours tellement tracée que le sens de rotation y compris se montre positif, c'est-à-dire en accord avec le sens du mouvement de l'aiguille d'une horloge, quand on regarde la figure du côté où le pôle du point imaginaire se trouve.

A cause de cette convention les flèches ajoutées à deux points imaginaires conjugués auront sens contraires.

En somme, nous pourrons exprimer les réflexions précédentes ainsi :

Tout point imaginaire est représenté par un cycle à rayon et à normale déterminés, parcouru dans un sens positif, quand on le regarde du côté où le pôle du point imaginaire se trouve.

Deux points imaginaires conjugués sont représentés par une seule circonférence parcourue dans les deux sens.

Après avoir établi ces principes, nous pourrons examiner les points imaginaires des surfaces et des courbes réelles connues. Mais ces principes nous permettent en outre d'interpréter géométriquement les équations algébriques à coefficients imaginaires ou bien complexes.

Nous nous proposons de traiter d'abord quelques questions relatives aux points imaginaires du plan, de la sphère et de la droite réels.

Soit donnée l'équation

$$(8) \qquad ax + by + cz + d = 0,$$

dans laquelle a, b, c, d sont supposés réels.

Si l'on substitue les quantités désignées par (1) au lieu de x, y, z, il résulte le système

$$(9) \quad ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0, \qquad ax_2 + by_2 + cz_2 = 0.$$

La première de ces équations indique que les centres des points imaginaires d'un plan sont situés dans ce plan lui-même, tandis que, selon la seconde, la normale à tout point imaginaire est située dans le plan, ou bien le plan du point imaginaire est perpendiculaire au plan donné. La longueur de cette normale et, par suite, du rayon d'un point imaginaire reste indéterminée.

Prenons ensuite l'ellipsoïde

$$(10) \qquad ax^2 + by^2 + cz^2 = 1;$$

a, b, c sont des quantités positives. La substitution des valeurs (1) au lieu de x, y, z ramène cette équation aux deux suivantes :

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} ax_1^2 + by_1^2 + cz_1^2 - 1 = ax_2^2 + by_2^2 + cz_2^2, \\ \qquad ax_1x_2 + by_1y_2 + cz_1z_2 = 0. \end{array} \right.$$

De la dernière de ces relations on peut conclure que la direction de la normale au point imaginaire est con-

juguée au diamètre de l'ellipsoïde passant par le centre du point imaginaire.

Puisque a, b, c sont des quantités positives, on a, d'après la première des équations (11), l'inégalité

$$ax_1^2 + by_1^2 + cz_1^2 > 1.$$

Par suite, les centres des points imaginaires sont situés à l'extérieur de la surface. De plus, cette relation nous fait connaître un second lieu des points x_2, y_2, z_2 correspondant à un centre donné x_1, y_1, z_1.

En effet, cette équation appartient à un ellipsoïde semblable à l'ellipsoïde donné et ayant ses axes parallèles à ceux de cette surface.

Le rapport constant de deux segments homologues de ces figures est

$$\sqrt{ax_1^2 + by_1^2 + cz_1^2 - 1}.$$

On prouve facilement que cette quantité est égale au rapport des longueurs d'une tangente quelconque, menée du point x_1, y_1, z_1 à l'ellipsoïde donné et d'un demi-diamètre parallèle à cette tangente.

Ayant pris arbitrairement un point P_1 à l'extérieur de la surface, qu'on regarde comme centre d'un de ses points imaginaires, on construit les normales correspondantes à ce centre de la manière suivante : Cherchez le plan diamétral conjugué au diamètre passant par P_1, prolongez les rayons vecteurs joignant le centre de la surface aux points de la section de ce plan diamétral avec l'ellipsoïde dans le rapport mentionné tout à l'heure. Tous ces rayons vecteurs seront des normales correspondantes au centre P_1.

Un cas particulier est celui où l'on cherche les points imaginaires d'une sphère. On déduit de ce qui précède que les plans de ces points imaginaires passent par le centre de la sphère tandis que le rayon des cycles est

égal à la longueur de la tangente menée de son centre P_1 à la sphère.

Une droite étant représentée par deux équations de la forme (8) donne lieu à deux systèmes d'équations de la forme (9), d'où l'on conclut immédiatement que les centres des points imaginaires d'une droite sont situés sur la droite même, tandis que, quant à la direction, les normales coïncident avec cette droite.

Les points imaginaires d'une droite sont, par conséquent, des circonférences décrites de chacun de ses points avec un rayon arbitraire dans un plan perpendiculaire à la droite.

Nous voulons encore faire attention au cas général qu'une équation

$$f(x, y, z) = 0 \tag{12}$$

à coefficients réels soit donnée. En supposant que la fonction f est développable selon le théorème de Taylor et qu'on introduit la notation $\Delta^p f$ au lieu de la différentiation symbolique

$$\left(x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial}{\partial y_1} + z_2 \frac{\partial}{\partial z_1}\right)^p f(x_1, y_1, z_1),$$

la substitution des valeurs désignées par (1) dans l'équation (12) donne

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} &f(x_1, y_1, z_1) - \frac{1}{2}\Delta^2 f + \frac{1}{2.3.4}\Delta^4 f - \ldots = 0, \\ &\qquad\qquad \Delta f - \frac{1}{2.3}\Delta^3 f + \frac{1}{2.3.4.5}\Delta^5 f - \ldots = 0. \end{aligned}\right.$$

La forme de ces équations nous fait reconnaître immédiatement que les deux systèmes de valeurs $+x_2$, $+y_2$, $+z_2$ et $-x_2$, $-y_2$, $-z_2$ y satisferont à la fois. Les points imaginaires d'une surface réelle sont par suite toujours conjugués deux à deux.

Quand deux relations entre x, y, z existent de sorte que l'on considère une courbe réelle dans l'espace, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 satisferont à deux systèmes d'équations de la forme (13). On pourra donc éliminer entre ces équations soit x_1, y_1, z_1, soit x_2, y_2, z_2.

Dans le premier cas, l'équation en x_2, y_2, z_2 résultant de cette élimination représente le lieu du point P_2, que nous pourrons nommer le lieu décrit par les normales supposées coïnitiales.

Dans le second cas, on obtiendra l'équation du lieu des centres des points imaginaires appartenant à la courbe.

Si la courbe est plane, l'un des deux systèmes de la forme (13) prend la forme (9), de sorte que le lieu des centres des points imaginaires devient le plan de la courbe. En outre, les plans des points imaginaires seront tous perpendiculaires au plan de la courbe donnée.

Nous passerons maintenant à l'interprétation géotrique d'équations à coefficients complexes.

Nous nommerons une équation de degré n à coefficients complexes *équation générale* de ce degré. De plus, nous dirons, comme dans la Géométrie réelle, qu'une seule équation de cette forme représente une surface et que deux équations représentent une courbe que nous distinguerons d'une surface et d'une courbe réelles par les noms *surface* et *courbe générale*.

Ainsi nous pourrons parler d'une surface générale de second degré, d'un plan général, d'une droite générale, etc.

On voit facilement que les points imaginaires des surfaces et des courbes générales ne seront pas conjugués deux à deux. Les deux surfaces réelles, lieux géométriques des points P_1 et P_2 appartenant aux points imaginaires d'une courbe, se trouvent comme dans le cas où les coefficients des équations étaient réels.

Étudions un peu plus exactement le plan général et la droite générale.

Soit l'équation donnée

$$(14)\qquad ax + by + cz + d = 0,$$

où les coefficients a, b, c, d seront de la forme

$$a_1 + a_2\sqrt{-1},\quad b_1 + b_2\sqrt{-1},\quad \ldots.$$

Si x, y, z prennent les valeurs complexes désignées par (1), on aura

$$(15)\qquad \begin{cases} a_1x_1 + b_1y_1 + c_1z_1 + d_1 = a_2x_2 + b_2y_2 + c_2z_2, \\ a_1x_2 + b_1y_2 + c_1z_2 + a_2x_1 + b_2y_1 + c_2z_1 + d_2 = 0. \end{cases}$$

Ces équations contenant six variables nous permettent d'exprimer celles-ci par quatre variables indépendantes m, n, u, v de cette manière

$$(16)\qquad \begin{cases} x_1 = m(a_1\mathcal{B} - a_2\mathcal{A}) + u(b_1c_2 - b_2c_1) \\ \qquad + \left(n - \dfrac{d_1}{\mathcal{A}\mathcal{C} - \mathcal{B}^2}\right)(a_1\mathcal{C} - a_2\mathcal{B}), \\ y_1 = m(b_1\mathcal{B} - b_2\mathcal{A}) + u(c_1a_2 - c_2a_1) \\ \qquad + \left(n - \dfrac{d_1}{\mathcal{A}\mathcal{C} - \mathcal{B}^2}\right)(b_1\mathcal{C} - b_2\mathcal{B}), \\ z_1 = m(c_1\mathcal{B} - c_2\mathcal{A}) + u(a_1b_2 - a_2b_1) \\ \qquad + \left(n - \dfrac{d_1}{\mathcal{A}\mathcal{C} - \mathcal{B}^2}\right)(c_1\mathcal{C} - c_2\mathcal{B}); \end{cases}$$

$$(17)\qquad \begin{cases} x_2 = \left(m - \dfrac{d_2}{\mathcal{A}\mathcal{C} - \mathcal{B}^2}\right)(a_1\mathcal{C} - a_2\mathcal{B}) \\ \qquad - n(a_1\mathcal{B} - a_2\mathcal{A}) + v(b_1c_2 - b_2c_1), \\ y_2 = \left(m - \dfrac{d_2}{\mathcal{A}\mathcal{C} - \mathcal{B}^2}\right)(b_1\mathcal{C} - b_2\mathcal{B}) \\ \qquad - n(b_1\mathcal{B} - b_2\mathcal{A}) + v(c_1a_2 - c_2a_1), \\ z_2 = \left(m - \dfrac{d_2}{\mathcal{A}\mathcal{C} - \mathcal{B}^2}\right)(c_1\mathcal{C} - c_2\mathcal{B}) \\ \qquad - n(c_1\mathcal{B} - c_2\mathcal{A}) + v(a_1b_2 - a_2b_1); \end{cases}$$

où, pour abréger, a été posé

$$(18)\quad \begin{cases} a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = \mathfrak{A}, \\ a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = \mathfrak{B}, \\ a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = \mathfrak{C}. \end{cases}$$

On voit immédiatement que la direction r, dont les cosinus sont proportionnels à

$$b_1 c_2 - b_2 c_1,\quad c_1 a_2 - c_2 a_1,\quad a_1 b_2 - a_2 b_1,$$

et laquelle est perpendiculaire aux deux directions avec des cosinus proportionnels à a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, est d'une grande importance au plan général.

En effet, si, comme auparavant, nous désignons les points x_1, y_1, z_1 et x_2, y_2, z_2 par P_1 et P_2, il est clair que le lieu du point P_2, correspondant à un point P_1 arbitrairement choisi, est une droite parallèle à la direction r et, de plus, que ce lieu ne se déplace pas, quand on fait varier le point P_1 de manière à décrire une droite parallèle à la direction r.

Si nous posons ensuite

$$(19)\quad \begin{cases} \xi_1 = m(a_1 \mathfrak{B} - a_2 \mathfrak{A}) + n(a_1 \mathfrak{C} - a_2 \mathfrak{B}), \\ \eta_1 = m(b_1 \mathfrak{B} - b_2 \mathfrak{A}) + n(b_1 \mathfrak{C} - b_2 \mathfrak{B}), \\ \zeta_1 = m(c_1 \mathfrak{B} - c_2 \mathfrak{A}) + n(c_1 \mathfrak{C} - c_2 \mathfrak{B}); \end{cases}$$

$$(20)\quad \begin{cases} \xi_2 = m(a_1 \mathfrak{C} - a_2 \mathfrak{B}) - n(a_1 \mathfrak{B} - a_2 \mathfrak{A}), \\ \eta_2 = m(b_1 \mathfrak{C} - b_2 \mathfrak{B}) - n(b_1 \mathfrak{B} - b_2 \mathfrak{A}), \\ \zeta_2 = m(c_1 \mathfrak{C} - c_2 \mathfrak{B}) - n(c_1 \mathfrak{B} - c_2 \mathfrak{A}), \end{cases}$$

les points avec les coordonnées

$$x_1 + d_1 \frac{a_1 \mathfrak{C} - a_2 \mathfrak{B}}{\mathfrak{A}\mathfrak{C} - \mathfrak{B}^2},$$

$$y_1 + d_1 \frac{b_1 \mathfrak{C} - b_2 \mathfrak{B}}{\mathfrak{A}\mathfrak{C} - \mathfrak{B}^2},$$

$$z_1 + d_1 \frac{c_1 \mathcal{C} - c_2 \mathcal{B}}{\mathcal{A}\mathcal{C} - \mathcal{B}^2};$$

$$x_2 + d_2 \frac{a_1 \mathcal{C} - a_2 \mathcal{B}}{\mathcal{A}\mathcal{C} - \mathcal{B}^2},$$

$$y_2 + d_2 \frac{b_1 \mathcal{C} - b_2 \mathcal{B}}{\mathcal{A}\mathcal{C} - \mathcal{B}^2},$$

$$z_2 + d_2 \frac{c_1 \mathcal{C} - c_2 \mathcal{B}}{\mathcal{A}\mathcal{C} - \mathcal{B}^2}$$

auront évidemment pour projections sur un plan perpendiculaire à la direction r les points ξ_1, η_1, ζ_1, ξ_2, η_2, ζ_2. Entre des derniers points que nous désignons par Q_1, Q_2, une correspondance simple aura lieu.

Remarquons, à cet effet, que, des deux termes dans les seconds membres des équations (19), (20), le premier peut être regardé comme mesurant la longueur des projections sur les axes des coordonnées d'un segment pris arbitrairement dans la direction dont les cosinus sont proportionnels à

$$(21) \qquad a_1 \mathcal{B} - a_2 \mathcal{A}, \quad b_1 \mathcal{B} - b_2 \mathcal{A}, \quad c_1 \mathcal{B} - c_2 \mathcal{A},$$

tandis que les seconds termes expriment la longueur des projections d'un segment pris dans la direction avec les cosinus dont le rapport est

$$(22) \qquad a_1 \mathcal{C} - a_2 \mathcal{B}, \quad b_1 \mathcal{C} - b_2 \mathcal{B}, \quad c_1 \mathcal{C} - c_2 \mathcal{B}.$$

Ces directions sont toutes les deux perpendiculaires à la direction r, comme on le vérifie facilement à l'aide des cosinus.

La longueur des deux segments projetés est

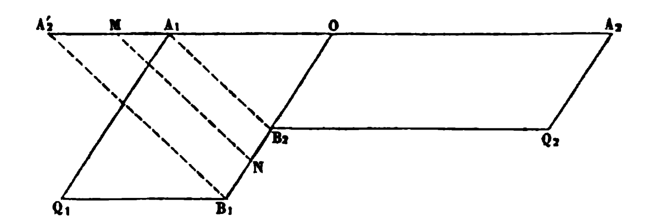
$$m\sqrt{(a_1 \mathcal{B} - a_2 \mathcal{A})^2 + (b_1 \mathcal{B} - b_2 \mathcal{A})^2 + (c_1 \mathcal{B} - c_2 \mathcal{A})^2}$$
$$= m\sqrt{\mathcal{A}(\mathcal{A}\mathcal{C} - \mathcal{B}^2)},$$

$$n\sqrt{(a_1 \mathcal{C} - a_2 \mathcal{B})^2 + (b_1 \mathcal{C} - b_2 \mathcal{B})^2 + (c_1 \mathcal{C} - c_2 \mathcal{B})^2}$$
$$= n\sqrt{\mathcal{C}(\mathcal{A}\mathcal{C} - \mathcal{B}^2)}.$$

A partir de l'origine O des coordonnées, traçons deux segments OM, ON dans les directions désignées par (21), (22), dont les longueurs sont respectivement

$$\sqrt{\mathcal{A}(\mathcal{A}\mathcal{C}-\mathcal{B}^2)},\quad \sqrt{\mathcal{C}(\mathcal{A}\mathcal{C}-\mathcal{B}^2)}.$$

Prenons dans ces deux directions encore deux segments arbitraires OA_1, OB_1 sur lesquels nous construi-



sons un parallélogramme. Le quatrième sommet peut être regardé comme le point Q_1.

Afin de trouver le point correspondant Q_2, nous observons que les parallèles menées de ce point à OM, ON, rencontrant ces droites en B_2, A_2, on aura

$$\frac{OA_1}{OM}=m,\qquad \frac{OB_1}{ON}=n,\qquad \frac{OA_2}{OM}=-n,\qquad \frac{OB_2}{ON}=m.$$

Si l'on prend le point A'_2 tel que $OA'_2=-OA_2$, de la relation

$$\frac{OA'_2}{OM}=n,$$

combinée avec les équations précédentes, on déduit

$$\frac{OA'_2}{OB}=\frac{OM}{ON}=\frac{OA_2}{OB_2};$$

d'où l'on peut conclure le parallélisme de $B_1A'_2$, de MN et de B_1A_1. A_1, B_1 étant connus, on pourra trouver facilement A_2, B'_2 et B_2. Le quatrième sommet du parallé-

logramme construit sur OA_2, OB_2 sera le point cherché Q_2.

Ayant déterminé ainsi deux points correspondants Q_1, Q_2, traçons, à partir de ces points, deux segments dont les projections sur les axes des coordonnées sont

$$-d_1\frac{a_1\mathcal{C}-a_2\mathcal{B}}{\mathcal{A}\mathcal{C}-\mathcal{B}^2},\quad -d_1\frac{b_1\mathcal{C}-b_2\mathcal{B}}{\mathcal{A}\mathcal{C}-\mathcal{B}^2},\quad -d_1\frac{c_1\mathcal{C}-c_2\mathcal{B}}{\mathcal{A}\mathcal{C}-\mathcal{B}^2},$$

$$-d_2\frac{a_1\mathcal{C}-a_1\mathcal{B}}{\mathcal{A}\mathcal{C}-\mathcal{B}^2},\quad -d_2\frac{b_1\mathcal{C}-b_2\mathcal{B}}{\mathcal{A}\mathcal{C}-\mathcal{B}^2},\quad -d_2\frac{c_1\mathcal{C}-c_2\mathcal{B}}{\mathcal{A}\mathcal{C}-\mathcal{B}^2};$$

c'est-à-dire deux segments ayant les longueurs

$$d_1\sqrt{\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{A}\mathcal{C}-\mathcal{B}^2}},\quad d_2\sqrt{\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{A}\mathcal{C}-\mathcal{B}^2}},$$

dans une direction qui est perpendiculaire à la direction r et à celle dont les cosinus sont proportionnels à a_2, b_2, c_2.

Des bouts de ces segments, traçons enfin deux parallèles à la direction r.

Ce seront là les droites décrites par les points P_1, P_2 du point imaginaire.

A chaque point de l'espace considéré comme centre d'un point imaginaire correspond une infinité de normales, dont les bouts forment une droite déterminée parallèle à la direction r.

Un cas particulier est celui où les coefficients a, b, c de l'équation (14) sont réels, tandis que d est imaginaire. Dans les équations précédentes il faudra prendre

$$a_2=b_2=c_2=d_1=0.$$

De cette manière on obtient

$$(23)\quad a_1x_1+b_1y_1+c_1z_1=0,\qquad a_1x_2+b_1y_2+c_1z_2+d_2=0.$$

Le lieu des centres des points imaginaire est, par suite,

le plan passant par l'origine des coordonnées, perpendiculaire à la direction a_1, b_1, c_1.

A chaque centre correspond une infinité de normales aboutissant dans un autre plan parallèle au plan précédent à une distance

$$-\frac{d_2}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}}.$$

Enfin considérons le système de deux équations linéaires à coefficients complexes ou la droite générale

$$(24)\qquad \left\{\begin{array}{l} ax+by+cz+d=0,\\ ex+fy+gz+h=0.\end{array}\right.$$

Afin de trouver les solutions de ce système, nous ne séparerons pas immédiatement les quantités réelles des imaginaires. D'abord remarquons que les équations (24) nous permettent d'exprimer x, y, z à l'aide d'une seule variable indépendante complexe u, ainsi :

$$\begin{aligned} x &= (bg-cf)u+[(b-c)h-(f-g)d]\Delta,\\ y &= (ce-ag)u+[(c-a)h-(g-e)d]\Delta,\\ z &= (af-be)u+[(a-b)h-(e-f)d]\Delta, \end{aligned}$$

où, pour abréger, nous avons posé

$$\frac{1}{\Delta}=\begin{vmatrix} a & b & c\\ e & f & g\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}.$$

On en conclut qu'en général le système d'équations

$$(25)\qquad x=au+d,\qquad y=bu+e,\qquad z=cu+f,$$

en supposant a, b, c, d, e, f, u complexes, représentera une droite générale.

Maintenant séparons les quantités réelles et imaginaires. Ce procédé fournit les deux systèmes de rela-

tions

$$(28)\quad \begin{cases} x_1 = a_1 u_1 - a_2 u_2 + d_1, \\ y_1 = b_1 u_1 - b_2 u_2 + e_1, \\ z_1 = c_1 u_1 - c_2 u_2 + f_1; \end{cases}$$

$$(29)\quad \begin{cases} x_2 = a_1 u_2 + a_2 u_1 + d_2, \\ y_2 = b_1 u_2 + b_2 u_1 + e_2, \\ z_2 = c_1 u_2 + c_2 u_1 + f_2. \end{cases}$$

En éliminant u_1, u_2 entre les équations du système (28), et de même entre (29), on aura deux équations linéaires en x_1, y_1, z_1; x_2, y_2, z_2 respectivement, montrant que les lieux des points P_1, P_2 sont deux plans réels. Ces plans sont tous deux perpendiculaires à la direction dont les cosinus sont proportionnels à

$$(30)\quad b_1 c_2 - b_2 c_1, \qquad c_1 a_2 - c_2 a_1, \qquad a_1 b_2 - a_2 b_1,$$

et par suite parallèles.

Posons encore

$$(31)\quad \begin{cases} \xi_1 = a_1 u_1 - a_2 u_2, \\ \eta_1 = b_1 u_1 - b_2 u_2, \\ \zeta_1 = c_1 u_1 - c_2 u_2; \end{cases}$$

$$(32)\quad \begin{cases} \xi_2 = a_1 u_2 + a_2 u_1, \\ \eta_2 = b_1 u_2 + b_2 u_1, \\ \zeta_2 = c_1 u_2 + c_2 u_1. \end{cases}$$

Il est évident qu'entre les points ξ_1, η_1, ζ_1; ξ_2, η_2, ζ_2 la même correspondance aura lieu qu'entre les points Q_1, Q_2 définis par les relations (19), (20).

Nous sommes arrivé de cette manière à cette interprétation géométrique de la droite générale.

Déterminons deux directions, dont les cosinus soient proportionnels à a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2. Par l'origine des coordonnées menons un plan parallèle à ces directions, c'est-à-dire perpendiculaire à la direction indiquée par (30). Dans ce plan construisons deux points correspondants Q_1, Q_2 à partir desquels nous traçons deux

segments dont les projections sur les axes des coordonnées soient d_1, e_1, f_1 ; d_2, e_2, f_2 respectivement. Les bouts de ces segments seront les points P_1, P_2 appartenant à un point imaginaire.

Chaque centre d'un point imaginaire d'une droite générale n'admet qu'une seule normale.

Aux résultats précédents j'étais parvenu par une étude sur la théorie des quaternions de Hamilton (¹). Devant une assemblée du « Wiskundig Genootschap » à Amsterdam, j'eus l'honneur d'exposer quelques-uns de ces résultats. Ce fut M. Korteweg d'Amsterdam, qui, en voulant détacher ma théorie des points imaginaires de la théorie des quaternions, me suggéra le principe mentionné ci-dessus, afin d'arriver à une interprétation géométrique des points imaginaires. Les deux méthodes si différentes conduisirent à la même interprétation. Au savant mathématicien d'Amsterdam, je dois mes remerciements sincères.

Dans ce qui suit, j'ai tâché d'exposer le rapport des questions traitées précédemment à la théorie des quaternions.

Si x, y, z sont les coordonnées rectangulaires d'un point P, i, j, k des vecteurs d'une longueur égale à l'unité dans les directions des axes des coordonnées, le point P, dans la théorie des quaternions, comme on le sait, est donné par l'expression

$$\rho = xi + yj + zk. \tag{33}$$

Quand x, y, z sont complexes de la forme (1), ce

(¹) Ces résultats, auxquels Laguerre était parvenu depuis longtemps, ont été exposés par lui, en 1872, dans les *Nouvelles Annales*. Nous avons, néanmoins, publié l'article de M. Molenbroch, parce que son procédé d'exposition est différent et qu'il semble, comme on le verra plus loin, n'avoir pas eu connaissance des travaux de Laguerre.

Ch. B.

vecteur devient

$$\rho = x_1 i + y_1 j + z_1 k + \sqrt{-1}(x_2 i + y_2 j + z_2 k)$$

ou bien

$$(34) \qquad \rho = \alpha + \sqrt{-1}\,\beta,$$

si, pour abréger, nous posons

$$(35) \quad x_1 i + y_1 j + z_1 k = \alpha, \qquad x_2 i + y_2 j + z_2 k = \beta,$$

α, β sont des vecteurs réels.

Hamilton a appelé un vecteur de la forme (34) *bivecteur*. De ce qui précède, on conclut qu'un bivecteur représente un point imaginaire dans l'espace. α est le vecteur du point avec les coordonnées réelles x_1, y_1, z_1, c'est-à-dire du centre P_1 du point imaginaire, β représente la normale.

La question nous vient comment il faut comprendre l'effet du facteur $\sqrt{-1}$ opérant à un vecteur.

Le vecteur ρ de l'équation (34) est multiple, c'est-à-dire ce vecteur joint l'origine des coordonnées à chaque point de la circonférence, décrite du bout du vecteur α avec un rayon égal à la longueur du vecteur β dans un plan perpendiculaire à β. L'ensemble de ces vecteurs forme un cône circulaire oblique.

L'expression $\sqrt{-1}\,\beta$ aura également une infinité de valeurs. Si l'on regarde $\alpha + \sqrt{-1}\,\beta$ comme le résultat de l'addition du vecteur α à chacun des vecteurs contenus dans le symbole $\sqrt{-1}\,\beta$, on peut conclure que cette dernière expression représente chaque rayon de la base circulaire du cône mentionné tout à l'heure ou bien $\sqrt{-1}\,\beta$ représente chaque rayon du point imaginaire.

L'effet de l'opération du facteur $\sqrt{-1}$ au vecteur β est, par suite, que ce vecteur soit fendu de manière à se

transformer dans l'ensemble des rayons d'une circonférence située dans un plan perpendiculaire au vecteur.

Hamilton a déjà reconnu que l'effet de l'opérateur $\sqrt{-1}$ est de tourner un vecteur autour de son origine par un angle droit. Selon ce qui précède, il faut considérer le plan dans lequel cette opération s'effectue comme indéterminé, de sorte que chaque plan passant par le vecteur y prenne part.

La méthode des quaternions nous permet de reconnaître d'une manière fort simple que l'équation (34), d'après les convenances usuelles, doit représenter un cercle. En effet, de cette équation on déduit immédiatement

$$\rho - \alpha - \sqrt{-1}\,\beta = 0$$

et

(36) $$N(\rho - \alpha - \sqrt{-1}\,\beta) = 0,$$

où, d'après une formule importante,

$$N(\rho - \alpha) - N\beta + 2\sqrt{-1}\,S(\rho - \alpha)\beta = 0,$$

équation se divisant dans ces deux autres

(37) $$N(\rho - \alpha) = N\beta, \qquad S(\rho - \alpha)\beta = 0.$$

La première relation indique une sphère décrite du bout du vecteur α avec un rayon égal à la longueur du vecteur β, et la seconde de ces équations appartient à un plan passant par le centre de la sphère et perpendiculaire à β.

Il n'est pas non plus difficile de montrer que l'équation (36) dans la théorie des quaternions est identique à l'équation (4) de la Géométrie analytique.

Si q, q' sont deux quaternions réduits au même dénominateur, de sorte que

(38) $$q = \frac{\alpha}{\gamma}, \qquad q' = \frac{\beta}{\gamma},$$

nous voulons choisir la définition suivante

$$q + \sqrt{-1}\,q' = \frac{\alpha + \sqrt{-1}\,\beta}{\gamma}, \tag{39}$$

indiquant que nous considérons une expression de la forme $q + \sqrt{-1}\,q'$, ou un biquaternion de Hamilton, comme l'ensemble des opérations nécessaires pour transformer un vecteur ordinaire en bivecteur.

D'après ce qui précède, nous pourrions dire aussi : Un biquaternion est l'opérateur fendant un vecteur en bivecteur.

Dans ses *Mathematical papers,* Clifford a donné une interprétation des biquaternions entièrement différente de la nôtre. La simplicité *et en même temps l'acquisition d'une représentation géométrique des points imaginaires me semblent deux avantages de l'interprétation adoptée dans cette Note.*

Avant de finir, je ferai observer encore que MM. Laguerre et Tarry, dans le *Bulletin de l'Association française pour l'avancement des Sciences* (¹), ont déjà publié quelques Notes relatives au sujet traité dans la première Partie de cette Note. Pour autant que j'ai eu l'occasion de prendre lecture de ces Notes, il me parait :

1° Que les considérations des géomètres français ne se rapportent qu'à des figures planes (²);

2° Que leur interprétation géométrique du point imaginaire résulte de la nôtre, si l'on remplace le cycle représentant le point imaginaire par les points d'intersection avec le plan de la figure (Laguerre) ou par la normale au cycle (Tarry);

3° Que la définition d'une droite générale donnée par Tarry dans la Note citée ne peut plus servir quand on considère des figures à trois dimensions, tandis qu'au

---

(¹) Laguerre n'a rien publié dans ce Bulletin.

(²) C'est complètement erroné en ce qui regarde Laguerre.

contraire l'interprétation géométrique que nous avons déduite dans les pages précédentes coïncide avec celle de M. Tarry, si deux coordonnées seulement entrent en considération. C'est la dernière remarque que nous voulons encore prouver.

Quand l'une des coordonnées disparaît, la troisième équation de chacun des systèmes (27), (28), (29) doit être omise. On voit facilement que les coordonnées des points d'intersection du cycle, représentant le point imaginaire, et du plan de la figure seront

$$(39) \qquad x = x_1 \mp y_2, \qquad y = y_1 \pm x_2.$$

En effet, les droites joignant ces points d'intersection au centre P_1 du cycle sont toutes les deux perpendiculaires à OP_2 et d'une longueur égale à celle de OP_2.

A cause des valeurs (28), (29) de x_1, y_1, x_2, y_2, les coordonnées x, y de l'équation (39) prennent la forme

$$(40) \quad \begin{cases} x = a'u_1 - b'u_2 + c' & \text{ou} \quad a''u_1 + b''u_2 + c'', \\ y = b'u_1 + a'u_2 + d' & \text{ou} \quad b''u_1 - a''u_2 + d'', \end{cases}$$

si, pour abréger, nous posons

$$a' = a_1 - b_2, \qquad b' = a_2 + b_1,$$
$$a'' = a_1 + b_2, \qquad b'' = b_1 - a_2.$$

u_1, u_2 peuvent varier de manière à obtenir toute valeur réelle.

A chaque système de valeurs de u_1, u_2 une couple de points Q, R correspond, liés par une relation simple.

En effet, si à u'_1, u'_2 les points Q', R' correspondent comme à u_1, u_2 les points Q, R, on aura

$$\begin{aligned} \overline{QQ'}^2 &= [a'(u_1 - u'_1) - b'(u_2 - u'_2)]^2 \\ &\quad + [b'(u_1 - u'_1) + a'(u_2 - u'_2)]^2 \\ &= (a'^2 + b'^2)[(u_1 - u'_1)^2 + (u_2 - u'_2)^2]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{RR'}^2 &= [a''(u_1 - u'_1) + b''(u_2 - u'_2)]^2 \\ &\quad + [b''(u_1 - u'_1) - a''(u_2 - u'_2)]^2 \\ &= (a''^2 + b''^2)[(u_1 - u'_1)^2 + (u_2 - u'_2)^2]. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\frac{QQ'}{RR'} = \sqrt{\frac{a'^2 + b'^2}{a''^2 + b''^2}} = \text{const.}$$

Il s'ensuit que les deux points Q, R en faisant varier u_1, u_2 décrivent des figures semblables, et un examen plus profond fera voir que ces figures sont inversement semblables.

Nous avons obtenu que le couple de points, qui, d'après M. Tarry, représente le point imaginaire, décrit deux figures inversement semblables, quand ce point imaginaire varie de manière à décrire une droite générale. C'est la définition qui a servi à M. Tarry comme point de départ.

NOTE SUR LA CONVERGENCE DE QUELQUES SÉRIES;

PAR M. E. CAHEN,
Professeur au lycée de Rennes.

Soit une série $\sum_1^\infty \varphi(n)$.

Soit $\psi(n)$ la fonction primitive de $\varphi(n)$, de façon que $\varphi(n) = \psi'(n)$.

Le théorème des accroissements finis donne

$$\varphi(n + \theta_n) = \psi(n + 1) - \psi(n), \qquad 0 < \theta_n < 1;$$

d'où

$$\sum_1^n \varphi(n + \theta_n) = \psi(n + 1) - \psi(1).$$

Il suffit de voir si la fonction ψ converge ou non vers une limite lorsque n augmente indéfiniment, pour dé-

cider de la convergence ou de la divergence de la série $\sum_1^\infty \varphi(n+\theta_n)$.

Pour passer de là à la série $\sum \varphi(n)$, supposons que la série $\sum [\varphi(n+\theta_n) - \varphi(n)]$ soit convergente. Dans ces conditions, la série $\sum \varphi(n)$ est convergente ou divergente en même temps que la série $\sum \varphi(n+\theta_n)$, et le problème est résolu.

Cette méthode s'applique, quelle que soit la fonction $\varphi(n)$.

Dans le cas particulier où cette fonction est toujours de même signe, par exemple positive, et indéfiniment décroissante en valeur absolue, on retrouve un théorème dû à Cauchy.

Dans ce cas, en effet, la série $\sum [\varphi(n+\theta_n) - \varphi(n)]$ est convergente, puisque $\varphi(n+\theta_n) - \varphi(n)$ est < 0 et $<$ en valeur absolue que $\varphi(n+1) - \varphi(n)$. La somme des n premiers termes de cette série est donc $<$ en valeur absolue que $\varphi(1) - \varphi(n+1)$ qui tend vers $\varphi(1)$. Donc la série $\sum \varphi(n)$ est convergente ou divergente suivant que $\varphi(n)$ tend ou non vers une limite pour $n = \infty$. Dans tous les cas, la méthode permet d'avoir deux limites de la somme $\sum_1^n \varphi(n)$, comme on le verra par les exemples suivants.

EXEMPLES.

Premier exemple. — Série harmonique : $\sum \frac{1}{n}$.

$$\varphi(n) = \frac{1}{n}, \qquad \psi(n) = \log n.$$

Donc

$$\log(n+1) - \log n = \frac{1}{n+\theta_n};$$

d'où l'on déduit

$$\log(n+1) - \log n < \frac{1}{n} < \log n - \log(n-1)$$

et, par suite,

$$\log(n+1) < \sum_{1}^{n} \frac{1}{n} < 1 + \log n.$$

Si l'on fait croître n indéfiniment, on déduit de là

$$\log\left(1+\frac{1}{n}\right) < \sum_{1}^{n}\left(\frac{1}{n} - \log n\right) < 1;$$

d'où l'on déduit que

$$\sum_{1}^{n}\left(\frac{1}{n} - \log n\right)$$

tend vers une limite C comprise entre 0 et 1. C'est la constante d'Euler.

Deuxième exemple. — $\sum \frac{1}{n^s}$.

$$\varphi(n) = \frac{1}{n^s}, \qquad \psi(n) = \frac{n^{1-s}}{1-s},$$

$$\frac{(n+1)^{1-s} - n^{1-s}}{1-s} = \frac{1}{(n+\theta_n)^s};$$

d'où

$$\frac{(n+1)^{1-s} - n^{1-s}}{1-s} < \frac{1}{n^s} < \frac{n^{1-s} - (n-1)^{1-s}}{1-s},$$

$$\frac{(n+1)^{1-s} - 1}{1-s} < \sum_{1}^{n} \frac{1}{n^s} < 1 + \frac{n^{1-s} - 1}{1-s}.$$

Ceci prouve d'abord que si $s > 1$, la série est con-

vergente, et que sa somme est

$$< 1 + \frac{1}{s-1}.$$

Si $s < 1$, la série est divergente, et l'on a

$$0 < \sum_{1}^{n} \left[\left(\frac{1}{n^s} \right) - \frac{(n+1)^{1-s} - 1}{1-s} \right] < 1 - \frac{(n+1)^{1-s} - n^s}{1-s}.$$

Ce qui prouve que $\sum_{1}^{n} \left[\frac{1}{n^s} - \frac{(n+1)^{1-s} - 1}{1-s} \right]$ tend, pour $n = \infty$, vers une limite C_s, $0 < C_s < 1$, généralisation de la constante d'Euler.

Troisième exemple. — $\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$.

$$\varphi(n) = \frac{1}{n \log n}, \qquad \psi(n) = \log \log n,$$

$$\log \log(n+1) - \log \log n = \frac{1}{(n+\theta_n) \log(n+\theta_n)},$$

$$\log \log(n+1) - \log \log n < \frac{1}{n \log n}$$
$$< \log \log(n) - \log \log(n-1);$$

d'où

$$\log \log(n+1) - \log \log 2 < \sum_{2}^{n} \frac{1}{n \log n}$$
$$< \log \log n - \log \log 2 + \frac{1}{2 \log 2}.$$

Comme $\log \log n$ croît indéfiniment, la série est divergente et l'on voit de plus que

$$\sum_{2}^{n} (\log \log n - \log \log n)$$

tend vers une limite comprise entre

$$-\log \log 2 \quad \text{et} \quad -\log \log 2 + \frac{1}{2 \log 2}.$$

Quatrième exemple. — $\sum_2^\infty \frac{1}{n\log^\alpha n}$.

$$\varphi(n) = \frac{1}{n\log^\alpha n}, \qquad \psi(n) = \frac{-1}{\alpha-1}\,\frac{1}{\log^{\alpha-1} n},$$

$$\frac{1}{\alpha-1}\left[\frac{1}{\log^{\alpha-1} n} - \frac{1}{\log^{\alpha-1}(n+1)}\right] = \frac{1}{(n+\theta_n)\log^\alpha(n+\theta_n)},$$

$$\frac{1}{\alpha-1}\left[\frac{1}{\log^{\alpha-1} n} - \frac{1}{\log^{\alpha}(n+1)}\right]$$
$$< \frac{1}{n\log^\alpha n} < \frac{1}{\alpha-1}\left[\frac{1}{\log^{\alpha-1}(n-1)} - \frac{1}{\log^{\alpha-1}(n)}\right];$$

d'où

$$\frac{1}{\alpha-1}\left[\frac{1}{\log^{\alpha-1} 2} - \frac{1}{\log^{\alpha-1}(n+1)}\right]$$
$$< \sum_2^n \frac{1}{n\log^\alpha n} < \frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{\log^{\alpha-1} 2} - \frac{1}{\log^{\alpha-1} n}\right) + \frac{1}{2\log^\alpha 2}.$$

Donc, si $\alpha > 1$, la série est convergente, et sa somme est comprise entre

$$\frac{1}{(\alpha-1)\log^{\alpha-1} 2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{(\alpha-1)\log^{\alpha-1} 2} + \frac{1}{2\log^{\alpha-2}}.$$

Si $\alpha < 1$, la série est divergente. Considérons

$$\sum_2^\infty \left(\frac{1}{n\log^\alpha n} - \frac{1}{1-\alpha}\,\frac{1}{\log^{\alpha-1} n}\right);$$

cette quantité tend vers une limite comprise entre

$$-\frac{1}{(1-\alpha)\log^{\alpha-1} 2} \quad \text{et} \quad -\frac{1}{(1-\alpha)\log^{\alpha-1} 2} + \frac{1}{2\log^\alpha 2}.$$

Dans les exemples précédents, la règle de Cauchy suffirait pour décider de la convergence ou de la divergence. Voici un exemple où elle ne suffit plus.

Cinquième exemple. — Soit la série $\sum_{1}^{\infty} \frac{\cos(a \log n)}{n}$, a étant quelconque.

$$\varphi(n) = \frac{\cos(a \log n)}{n}, \qquad \psi(n) = \frac{\sin(a \log n)}{a}.$$

Ici la fonction $\psi(n)$ ne tend vers aucune limite quand n croît indéfiniment. Donc, d'après ce qui a été dit plus haut, si l'on démontr eque la série $\sum [\varphi(n + \theta_n) - \varphi(n)]$ est convergente, il sera démontré que la série proposée est convergente.

Or

$$\sum [\varphi(n + \theta_n) - \varphi(n)] = \sum \left\{ \frac{\cos[a \log(n + \theta_n)]}{n + \theta_n} - \frac{\cos(a \log n)}{\log n} \right\}$$

$$= \sum \frac{n \{ \cos[a \log(n + \theta_n)] - \cos(a \log n) \} + \theta_n \cos(a \log n)}{n(n + \theta_n)}$$

$$= \sum \frac{-2n \sin\left[\frac{a}{2} \log n(n + \theta_n)\right] \sin\left[\frac{a}{2} \log\left(1 + \frac{\theta_n}{n}\right)\right] + \theta_n \cos(a \log n)}{n(n + \theta_n)}.$$

La série $\sum \frac{\theta_n \cos(a \log n)}{n(n + \theta_n)}$ a ses termes $<$ en valeur absolue que ceux de la série $\frac{1}{n(n-1)}$. Donc elle est convergente.

Quant à l'autre partie de la série

$$\sum \frac{-2 \sin\left[\frac{a}{2} \log(n + \theta_n)\right] \sin\left[\frac{a}{2} \log\left(1 + \frac{\theta_n}{n}\right)\right]}{n + \theta_n},$$

on a

$$\operatorname{mod} \sin\left[\frac{a}{2} \log n(n + \theta_n)\right] < 1,$$

$$\operatorname{mod} \sin\left[\frac{a}{2} \log\left(1 + \frac{\theta_n}{n}\right)\right] < \operatorname{mod} \frac{a}{2} \log\left(1 + \frac{\theta_n}{n}\right)$$

pour des valeurs suffisamment grandes de n, *a fortiori* $< \bmod \frac{b}{2n}$. Donc le terme général de cette série est $<$ en valeur absolue que

$$\frac{b}{n(n+\theta_n)} < \frac{b}{n(n-1)}.$$

Donc elle est convergente.

Même démonstration pour

$$\sum \frac{\sin(a \log n)}{n}.$$

La même méthode peut servir à démontrer que les séries

$$\sum \frac{\cos(a \log n)}{n \log n} \quad \text{et} \quad \sum \frac{\sin(a \log n)}{n \log n}$$

sont *convergentes*.

RÉALISATION ET USAGE DES FORMES IMAGINAIRES EN GÉOMÉTRIE.

CONFÉRENCES DONNÉES PAR M. MAXIMILIEN MARIE
au Collège Stanislas, à Sainte-Barbe, à l'École Sainte-Geneviève et à l'École Monge (¹).

24. Soit le lieu

$$y^3 - a^2 y + a^2 x = 0;$$

l'enveloppe réelle des conjuguées est MALOL′A′M′ et l'enveloppe imaginaire NON′ (*fig.* 31).

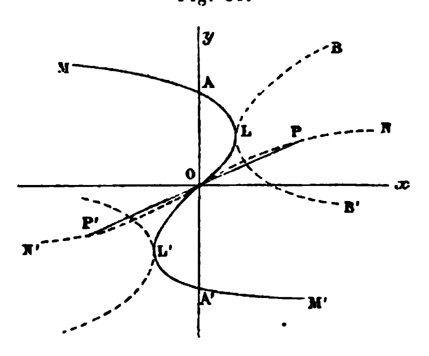
(¹) Suite et fin. *Voir* t. X, p. 417.

Les deux seuls points critiques sont L et L',

$$y = \pm \frac{a}{\sqrt{3}}, \qquad x = \pm \frac{2a}{3\sqrt{3}}.$$

Supposons d'abord que le point origine $[x_0; y_0]$ se trouve sur une branche de demi-conjuguée tangente à la courbe réelle en un point de l'arc LAM et cherchons à quelles

Fig. 31.



conditions le point mobile $[x, y]$, fourni par l'équation $y =$ la série, pourrait passer sur la courbe réelle, ou sur la conjuguée $c = \infty$, près du point L, sans que le module de $[x - x_0]$ dépassât celui de $\left(\frac{2a}{3\sqrt{3}} - x_0\right)$. β devant être nul, il faudrait pour cela que α satisfît à la condition

$$(\alpha - \alpha_0)^2 + \beta_0^2 < \left(\frac{2a}{3\sqrt{3}} - \alpha_0\right)^2 + \beta_0^2$$

ou

$$(\alpha - \alpha_0)^2 - \left(\frac{2a}{3\sqrt{3}} - \alpha_0\right)^2 < 0,$$

c'est-à-dire que α devrait rester compris entre les limites

$$2\alpha_0 - \frac{2a}{3\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad \frac{2a}{3\sqrt{3}}.$$

Si donc α_0 est moindre que $\frac{2a}{3\sqrt{3}}$ et égal à $\frac{2a}{3\sqrt{3}}-h$, α pourra varier entre

$$\frac{2a}{3\sqrt{3}}-2h, \text{ limite inférieure,}$$

et

$$\frac{2a}{3\sqrt{3}}, \text{ limite supérieure,}$$

et le point $[x, y]$, fourni par la série, ne pourra pas passer sur la conjuguée $c=\infty$ près du point L.

Au contraire, si α_0 est plus grand que $\frac{2a}{3\sqrt{3}}$ et égal à $\frac{2a}{3\sqrt{3}}+h$, α pourra varier entre

$$\frac{2a}{3\sqrt{3}}+2h, \text{ limite supérieure,}$$

et

$$\frac{2a}{3\sqrt{3}}, \text{ limite inférieure;}$$

le point $[x, y]$ ne pourra donc pas passer sur l'arc LAM.

Supposons le premier cas, c'est-à-dire $\alpha_0=\frac{2a}{3\sqrt{3}}-h$, le point $[x, y]$ ne pouvant pas passer sur l'arc BLB', sans que la série devienne divergente, ne pourra pas, à plus forte raison, se rendre en L': le point d'arrêt sera donc L.

Il en sera encore de même dans le second cas, ou α_0 aurait une valeur $\frac{2a}{3\sqrt{3}}+h$, mais on en donnera une autre raison qui est que le module de (x_0 — l'abscisse de L) sera alors moindre que celui de (x_0 — l'abcisse de L'); en effet, le premier sera

$$h^2+\beta_0^2,$$

et le second

$$\left(h+\frac{4a}{3\sqrt{3}}\right)^2+\beta_0^2.$$

Ainsi, quelque part que l'on plaçât le point origine, sur une demi-conjuguée tangente à la courbe réelle en un point de l'arc MAL, le point d'arrêt serait toujours L.

De même, le point d'arrêt serait L', si le point $[x_0, y_0]$ appartenait à une demi-conjuguée tangente à la courbe réelle en un point de l'arc M'A'L'.

Cherchons maintenant la courbe d'équilibre entre les deux points L et L'. L'équation caractéristique de cette courbe est

$$\operatorname{mod}\left(x_0 - \frac{2a}{3\sqrt{3}}\right) = \operatorname{mod}\left(x_0 + \frac{2a}{3\sqrt{3}}\right),$$

c'est-à-dire

$$\left(\alpha_0 - \frac{2a}{3\sqrt{3}}\right)^2 + \beta_0^2 = \left(\alpha_0 + \frac{2a}{3\sqrt{3}}\right)^2 + \beta_0^2$$

ou

$$\alpha_0 = 0.$$

Cette condition paraîtrait comporter deux interprétations : la première que le milieu de la corde réelle passant par le point $[x_0, y_0]$ se trouvât sur l'axe des y, et la seconde que le point $[x_0, y_0]$ appartînt à l'enveloppe imaginaire des conjuguées dont les coordonnées sont imaginaires sans parties réelles.

Mais l'inspection de la figure montre que, pour qu'une corde réelle d'une conjuguée eût son milieu sur l'axe des y, il faudrait que cette conjuguée touchât la courbe réelle en un point de l'une de ses branches AM ou A'M', et l'on a vu que le point d'arrêt est alors L ou L'.

La condition $\alpha = 0$ signifie donc que le point origine doive appartenir à l'enveloppe imaginaire des conjuguées ; et le fait s'explique alors tout naturellement, car il est facile de voir que, si le point $[x_0, y_0]$ se trouve sur l'enveloppe imaginaire, il pourra se rendre à l'origine sans sortir de la région de convergence ; or il lui resterait alors

juste le même chemin pour parvenir en L ou en L′.

Cela posé, si le point $[x_0, y_0]$ appartient à une conjuguée tangente à la courbe réelle en un point de l'arc LOL′, le point d'arrêt sera L ou L′, selon qu'on aura

$$\frac{-2a\alpha_0}{3\sqrt{3}} \lessgtr + \frac{2a\alpha_0}{3\sqrt{3}},$$

c'est-à-dire suivant que α_0 sera positif ou négatif; ou encore selon que le point origine appartiendra à une demi-conjuguée tangente à la courbe réelle en un point de l'arc OL ou en un point de l'arc OL′.

Enfin supposons que le point origine appartienne à une conjuguée tangente à l'enveloppe imaginaire : les conditions pour que le point d'arrêt soit en L ou en L′ seront toujours

$$\alpha_0 > 0 \quad \text{ou} \quad \alpha_0 < 0;$$

mais il faut en avoir l'interprétation. Or, sur chacune des demi-conjuguées en question, les deux parties où α aura des signes contraires seront séparées par le point de contact avec l'enveloppe imaginaire; et le reste va de soi. En effet, les deux points P et P′ où une même conjuguée touche l'enveloppe imaginaire ont respectivement pour coordonnées

$$x = \beta\sqrt{-1} \quad \text{avec} \quad y = \beta'\sqrt{-1}$$

et

$$x = -\beta\sqrt{-1} \quad \text{avec} \quad y = -\beta'\sqrt{-1},$$

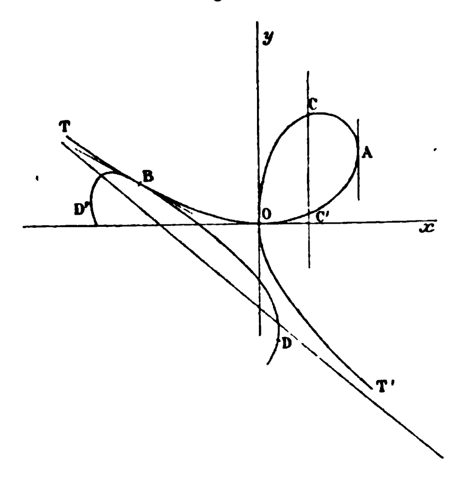
de sorte que POP′ est précisément une des cordes réelles de la conjuguée; les autres lui sont parallèles, de sorte que la condition $\alpha_0 > 0$ exprime que le point $[x_0, y_0]$ se trouve, sur la conjuguée où on l'a placé, à l'extrémité d'une corde réelle placée au-dessous de la corde qui joint

les points de contact de cette conjuguée avec l'enveloppe et la condition $\alpha < 0$ exprime le fait contraire.

25. Considérons infini le lieu

$$y^3 + x^3 - 3axy = 0.$$

Fig. 32.



Les points critiques sont : l'origine $[x = 0, y = 0]$, le point A (*fig.* 32)

$$[x = a\sqrt[3]{4},\ y = a\sqrt[3]{2}]$$

et deux points imaginaires ; le point D

$$\left[x = a\sqrt[3]{4}\,\frac{-1 + \sqrt{3}\sqrt{-1}}{2},\ y = a\sqrt[3]{2}\,\frac{-1 - \sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}\right]$$

et le point D'

$$\left(x = \alpha\sqrt[3]{4}\,\frac{-1 - \sqrt{3}\sqrt{-1}}{2},\ y = a^3\sqrt{2}\,\frac{-1 + \sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}\right).$$

Ces deux derniers appartiennent à la conjuguée

$$C = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}},$$

tangente à la courbe réelle en B et à l'enveloppe imaginaire en D et D'.

Les asymptotes imaginaires du lieu étant

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{3}\sqrt{-1}}{2} x + \frac{a}{2}(1 \mp \sqrt{3}\sqrt{-1}),$$

on construirait aisément celles de la conjuguée DBD'.

Nous placerons d'abord le point origine $[x_0, y_0]$ sur une conjuguée tangente à la courbe réelle en un point de l'arc OT', parce que, pour s'approcher successivement des points O, A, D ou D', un point $[x, y]$ du lieu, qui partirait du point $[x_0, y_0]$, ainsi placé, devrait passer successivement sur toutes les conjuguées du lieu, le point de contact avec la courbe réelle de la branche qui le contiendrait décrivant cette courbe réelle dans le sens T'OCAC'OBT, et que, comme le prouvera la discussion, c'est précisément dans l'ordre O, A, D ou D' que se présenteront les points d'arrêt, lorsque le point originaire $[x_0, y_0]$ s'avancera sur les conjuguées du lieu, dans l'ordre qu'on vient d'indiquer pour le point $[x, y]$.

Le point $[x_0, y_0]$ appartenant, comme on l'a supposé, à une conjuguée du lieu, tangente à la courbe réelle en un point de l'arc OT', le point $[x, y]$, représenté par l'équation $y =$ la série, pourra passer sur la branche réelle T'O, près du point O, si l'on peut trouver sur cet arc T'O un point $[x = \alpha, y = \alpha']$, tel que

$$\text{mod}(x_0 - \alpha) < \text{mod}(x_0 - 0).$$

ou que

$$(\alpha_0 - \alpha)^2 + \beta_0^2 < \alpha_0^2 + \beta_0^2,$$

c'est-à-dire

$$-2\alpha\alpha_0 + \alpha^2 < 0,$$

ou, comme α devrait être positif,

$$\alpha < 2\alpha_0,$$

ce qui exigera que α_0 soit positif, c'est-à-dire que le point $[x_0, y_0]$ ne soit pas trop éloigné du point de contact avec la branche T'O de la conjuguée à laquelle il appartiendrait.

Mais dans ce cas, de $\alpha_0 > 0$, le point $[x, y]$ fourni par la série ne pourra pas passer sur la branche de la conjuguée $C = \infty$ tangente de O à la courbe réelle; il ne pourra donc pas, à plus forte raison, se rendre près du point A ni près de l'un des points D ou D', et le point O sera le point d'arrêt de la convergence de la série.

Au contraire, dans la même hypothèse où la branche de conjuguée contenant le point $[x_0\ y]$ toucherait la courbe réelle en un point de l'arc T'O, si α_0 était négatif, le point $[x, y]$ fourni par la série ne pourrait plus passer sur l'arc T'O, mais pourrait passer la branche de la conjuguée $C = \infty$ tangente à la courbe réelle en O, parce que l'on pourrait trouver sur cette branche un point

$$(x = -\alpha, y = \alpha' \pm \beta' \sqrt{-1}),$$

tel que

$$\mathrm{mod}(x_0 + \alpha) < \mathrm{mod}(x_0 - 0,$$

ou que

$$(\alpha_0 + \alpha)^2 + \beta_0^2 < \alpha_0^2 + \beta_0^2,$$

c'est-à-dire

$$2\alpha\alpha_0 + \alpha^2 < 0$$

ou

$$\alpha < -2\alpha_0.$$

Mais alors le point $[x, y]$ fourni par la série ne pourrait pas parvenir au point A, parce que le module de $(x_0 - a\sqrt[3]{4})$ serait plus grand que celui de $(x_0 - O)$. En effet, α_0 étant négatif, le premier module

$$(\alpha_0 - a\sqrt[3]{4})^2 + \beta_0^2$$

serait plus grand que le second

$$\alpha_0^2 + \beta_0^2.$$

Ainsi, dans ces différents cas, le point O sera et restera le point d'arrêt.

Supposons que le point origine $[x_0, y_0]$ vienne du plan sur une branche de conjuguée tangente à la courbe réelle en un point de l'arc OCA. Le point d'arrêt restera le point O tant que le point $[x_0, y_0]$ n'aura pas traversé la courbe d'équilibre entre O et A, courbe dont l'équation caractéristique est

$$\text{mod}(x_0 - O) = \text{mod}(x_0 - a\sqrt[3]{4})$$

ou

$$\alpha_0^2 + \beta_0^2 = (\alpha_0 - a\sqrt[3]{4})^2 + \beta_0^2,$$

c'est-à-dire

$$\alpha_0 = \frac{a\sqrt[3]{4}}{2}.$$

Ainsi le point d'arrêt restera le point O tant que le milieu de la corde réelle contenant le point $[x_0, y_0]$ restera à gauche de la droite CC', équidistante de l'axe des y et de la tangente menée en A à la courbe réelle.

Le périmètre de la région de convergence passera à la fois en O et en A lorsque le milieu de la corde réelle contenant le point $[x_0, y_0]$ se trouvera sur le prolongement de C'C.

Enfin le point d'arrêt se trouvera en A lorsque le milieu de la corde réelle contenant le point $[x_0, y_0]$ se trouvera à droite de C'C.

A partir de ce moment, le périmètre de la région de convergence pivotera autour du point A jusqu'à ce que le point $[x_0, y_0]$ vienne traverser l'une ou l'autre des courbes d'équilibre entre A et D ou entre A et D'.

La première de ces deux courbes est caractérisée par la condition

$$\text{mod}\,(x_0 - a\sqrt[3]{4}) = \text{mod}\left(x_0 - a\sqrt[3]{4}\,\frac{-1+\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}\right),$$

qui se réduit à

$$-\alpha_0\sqrt[2]{3} = -\beta_0$$

et la seconde l'est par

$$-\alpha_0\sqrt[2]{3} = \beta_0.$$

On voit que les premiers membres resteraient moindres que les seconds si le point $[x_0, y_0]$ venait se placer sur la branche de la conjuguée $C = \infty$, tangente en A à la courbe réelle, parce que α_0 serait positif et β_0 nul; par conséquent, le point A serait encore à ce moment le point d'arrêt.

Supposons que le point $[x_0, y_0]$ vienne se placer sur une branche de conjuguées tangente à la courbe réelle en un point de l'arc AO : α_0 sera d'abord positif; quant à β_0, qui partira de zéro, il sera positif ou négatif, selon que le point $[x_0, y_0]$ se trouvera sur la branche de droite ou sur la branche de gauche de la conjuguée qui le contiendra, en sorte que, si le point $[x_0, y_0]$ se trouve sur la branche de droite de la conjuguée en question, ce sera le point D qui pourra devenir le point d'arrêt, et que si, au contraire, le point $[x_0, y_0]$ se trouve sur la

branche de gauche de la même conjuguée, ce sera le point D' qui pourra succéder au point A, comme point d'arrêt.

Si l'on suppose le premier cas, c'est-à-dire $p_0 > 0$, le point D deviendra le point d'arrêt, au lieu du point A, dès que

$$-\alpha_0\sqrt{3} \text{ deviendra plus grand que } -\beta_0 \;(\beta_0 \text{ étant positif});$$

dans le second cas, le point D' deviendra le point d'arrêt, au lieu du point A, dès que

$$-\alpha_0\sqrt{3} \text{ deviendra plus grand que } \beta_0 \;(\beta_0 \text{ étant négatif}).$$

α_0 prenant d'abord la valeur de l'abscisse du point de contact de la branche de la conjuguée dont il s'agit avec l'arc AO et β_0 étant alors nul, ni l'une ni l'autre des deux conditions ne se rencontrera que sur une corde réelle de la conjuguée, assez éloignée de son point de contact avec l'arc AO et jusque-là ce sera le point A qui restera le point d'arrêt.

Au delà de cette corde réelle, ce sera le point D ou le point D' qui deviendra le point d'arrêt, suivant que le point $[x_0, y_0]$ se trouvera sur la branche de droite ou sur la branche de gauche de la conjuguée tangente à la courbe réelle en un point de l'arc AO.

Si le point $[x_0, y_0]$ vient se placer sur la conjuguée à ordonnées réelles, tangente à la branche T'OA en O, la valeur de y_0 s'exprimera par

$$y_0 = \alpha'_0 \quad (\alpha'_0 \text{ étant négatif})$$

et les valeurs de x_0 seront fournies par l'équation

$$x_0^3 - 3a\alpha'_0 x + \alpha'^3_0 = 0;$$

la racine réelle de cette équation serait l'abscisse positive du point de rencontre de la branche OT' avec la droite $y = \alpha'_0$, mais ce point de rencontre n'entre pas en question. Les deux autres racines seront

$$x_0 = \alpha_0 \pm \beta_0 \sqrt{-1};$$

leur somme $2\alpha_0$, ajoutée à l'abscisse du point situé sur la branche OT' devra donner une somme nulle, par conséquent α_0 devra être négatif.

En conséquence, ni la condition

$$-\alpha_0 \sqrt{3} < -\beta_0$$

ne pourra être satisfaite par un point $[x_0, y_0]$ de la branche de droite de la conjuguée en question, et le point D aura définitivement succédé au point A comme point d'arrêt, même en supposant le point $[x_0, y_0]$ indéfiniment voisin du point O; ni la condition

$$-\alpha_0 \sqrt{3} < \beta_0$$

ne pourra être satisfaite par un point $[x_0, y_0]$ de la branche de gauche de la même conjuguée en question, et le point D' aura définitivement succédé au point A comme point d'arrêt, même en supposant le point $[x_0, y_0]$ indéfiniment voisin du point O.

Supposons enfin que le point $[x_0, y_0]$ passe sur une branche de conjuguée tangente à la courbe réelle en un point de l'arc OT : la courbe d'équilibre entre les points D et D' étant

$$\text{mod}\left(x_0 - a\sqrt[3]{4}\,\frac{-1+\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}\right)$$
$$= \text{mod}\left(x_0 - a\sqrt[3]{4}\,\frac{-1-\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}\right)$$

ou

$$\left(\alpha_0 + \frac{a\sqrt[3]{4}}{2}\right)^2 + \left(\beta_0 - \frac{a\sqrt[3]{4}\sqrt{3}}{2}\right)^2$$
$$= \left(\alpha_0 + \frac{a\sqrt[3]{4}}{2}\right)^2 + \left(\beta_0 + \frac{a\sqrt[3]{4}\sqrt{3}}{2}\right)^2,$$

c'est-à-dire $\beta_0 = 0$.

On voit que le périmètre de la région de convergence passera à la fois par les deux points D et D′ lorsque le point $[x_0, y_0]$ se trouvera être justement le point de contact, avec l'arc OBT, de la branche de conjuguée sur laquelle il aura passé, et que le point d'arrêt sera D ou D′, selon que β_0 sera positif ou négatif, c'est-à-dire selon que le point $[x_0, y_0]$ se trouvera sur la branche de droite ou sur la branche de gauche de la conjuguée sur laquelle il aura passé.

Sur la convergence du développement en série d'une fonction de deux variables indépendantes. — On trouvera dans le second Volume de ma *Théorie des fonctions de variables imaginaires* ce qui concerne la convergence du développement en série, par la formule de Taylor, d'une fonction de deux variables indépendantes X et Y, définie par une équation

$$f(X, Y, Z) = 0.$$

Cette question, entièrement neuve à l'époque [1], est ramenée à la précédente par cette considération évi-

---

[1] Elle n'avait été traitée auparavant que par MM. Briot et Bouquet, dans leur *Théorie des fonctions doublement périodiques*.

dente que le développement

$$\begin{aligned}Z = z + \frac{\partial z}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{(X - x)^2}{1.2} + \ldots \\ + \frac{\partial z}{\partial y}(Y - y) + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\frac{(X - x)(Y - y)}{1.2} + \ldots \\ + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{(Y - y)^2}{1.2} + \ldots \\ + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

ordonnée en groupes homogènes par rapport à $(X - x)$ et à $(Y - y)$, coïncide identiquement, pour chaque système de valeurs finales de X et de Y, avec le développement de la fonction Z de X seul, qui serait définie par les équations

$$f(X, Y, Z) = 0$$

et

$$\frac{Y - y}{X - x} = k,$$

k étant la valeur que prendrait le rapport $\frac{Y - y}{X - x}$ pour les valeurs finales qu'on aurait résolu d'avance de donner à X et à Y ; de sorte que la question n'est autre que celle du développement de l'ordonnée Z de la projection, sur le plan des XZ, de la section de la surface

$$f(X, Y, Z) = 0$$

par le plan

$$\frac{Y - y}{X - x} = k.$$

LES CENTRES D'INERTIE DE LA MOITIÉ ET DU QUART DU CORPS ÉPICYCLOIDAL;

Par M. SVÉCHNICOFF,
Professeur au gymnase de Troïtzk.

Le plan xoy divise la surface épicycloïdale et le corps épicycloïdal en deux parties égales. Désignons par l et L les distances du centre d'inertie de chaque moitié de la surface et du corps au plan xy,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}ml &= \sigma\int\int z\,dS\\ &= 4a^3\sigma\int_0^{\frac{2\pi}{n}}(1-\cos n\varphi)\sin^3\frac{n\varphi}{2}\,d\varphi\int_0^{\pi}(n+\cos\alpha)\sin\alpha\,d\alpha\\ &= 8a^3n\sigma\int_0^{\frac{2\pi}{n}}(1-\cos n\varphi)\sin^3\frac{n\varphi}{2}\,d\varphi = \frac{512\sigma a^3}{15}.\end{aligned}$$

Par suite,

$$l = \frac{16a}{5\pi}.$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\mathrm{ML} &= \sigma\int\int\int z\,dx\,dy\,dz = \frac{\sigma}{2}\int\int z^2\,dx\,dy\\ &= \frac{\sigma a^4}{2}\int_0^{\frac{2\pi}{n}}(1-\cos n\varphi)^4\,d\varphi\int_0^{\pi}(n+\cos\alpha)\sin^3\alpha\,d\alpha\\ &= \frac{2\sigma n a^4}{3}\int_0^{\frac{2\pi}{n}}(1-\cos n\varphi)^4\,d\varphi = \frac{35\pi\sigma a^4}{6}.\end{aligned}$$

Par suite,

$$\mathrm{L} = \frac{7a}{3\pi}.$$

Le plan zoy' divise la surface et le corps épicycloïdal en deux parties égales. Désignons par t et T les distances du centre d'inertie de chaque moitié de la surface et du corps au plan zy',

$$\frac{1}{2}mt = \sigma \int_{\psi=0}^{\psi=-\frac{\pi}{n}} \int_{\alpha=0}^{\alpha=2\pi} x'\,dS = 4a^3\sigma$$

$$\times \int_0^{-\frac{\pi}{n}} \cos^3\frac{n\psi}{2}\,d\psi \int_0^{2\pi} [n(n\sin\psi + \cos\psi\sin n\psi) + (1+\cos n\psi)\sin\psi\cos^2\alpha]$$

$$\frac{1}{2}mt = 4a^3\sigma\pi \int_0^{-\frac{\pi}{n}} \cos^3\frac{n\psi}{2}$$

$$\times [(2n^2+1)\sin\psi + 2n\cos\psi\sin n\psi + \sin\psi\cos n\psi]\,d\psi,$$

$$\frac{1}{2}mt = 4a^3\sigma\pi \int_0^{-\frac{\pi}{n}} f(\psi)\,d\psi,$$

$$f(\psi) = -\frac{6n^2-2n+5}{8}\sin\frac{n-2}{2}\psi + \frac{6n^2+2n+5}{8}\sin\frac{n+2}{2}\psi$$

$$-\frac{4n^2-6n+5}{16}\sin\frac{3n-2}{2}\psi + \frac{4n^2+6n+5}{16}\sin\frac{3n+2}{2}\psi$$

$$+\frac{2n-1}{16}\sin\frac{5n-2}{2}\psi + \frac{2n+1}{16}\sin\frac{5n+2}{2}\psi,$$

$$\int_0^{-\frac{\pi}{n}} f(\psi)\,d\psi = \frac{600n^7\sin\frac{\pi}{n} - 1040n^6 - 872n^4 + 960n^2 - 128}{(n^2-4)(9n^2-4)(25n^2-4)}.$$

Par suite,

$$t = \frac{3a\left(75n^7\sin\frac{\pi}{n} - 130n^6 - 109n^4 + 120n^2 - 16\right)}{(n^2-4)(9n^2-4)(25n^2-4)}.$$

En posant $n=1$, $n=2$, $n=\infty$, on a

$$t = \frac{9a}{7}, \qquad t = \frac{11a}{8}, \qquad t = \pi a - \frac{26a}{15}.$$

$$\frac{1}{2}\text{MT} = \sigma\iiint x'\,dx'\,dy'\,dz$$

$$= \sigma\int_{\psi=0}^{\psi=-\frac{\pi}{n}}\int_{\alpha=0}^{\alpha=2\pi} x'\,dV = \frac{\pi\sigma a^4}{4}$$

$$\times\int_0^{-\frac{\pi}{n}}(1+\cos n\psi)^3[(4n^2+1)\sin\psi + 4n\cos\psi\sin n\psi + \sin\psi\cos n\psi]\,d\psi,$$

$$\frac{1}{2}\text{MT} = \frac{\pi\sigma a^4}{4}\int_0^{-\frac{\pi}{n}} f(\psi)\,d\psi,$$

$$f(\psi) = \frac{80n^2+35}{8}\sin\psi - \frac{15n^2-7n+7}{2}\sin(n-1)\psi$$
$$+\frac{15n^2+7n+7}{2}\sin(n+1)\psi - \frac{2n^2-14n+7}{4}\sin(2n-1)\psi$$
$$+\frac{12n^2+14n+7}{4}\sin(2n+1)\psi - \frac{n^2-3n+1}{2}\sin(3n-1)\psi$$
$$+\frac{n^2+3n+1}{2}\sin(3n+1)\psi$$
$$+\frac{4n-1}{16}\sin(4n-1)\psi + \frac{4n+1}{16}\sin(4n+1)\psi,$$

$$\int_0^{-\frac{\pi}{n}} f(\psi)\,d\psi = \frac{360\,n^8\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right) - 512n^6 - 384n^4 + 192n^2 - 16}{(n^2-1)(4n^2-1)(9n^2-1)}.$$

Par suite,

$$\text{T} = \frac{4a\left[45n^8\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right) - 64n^6 - 48n^4 + 24n^2 - 2\right]}{5\pi(n^2-1)(4n^2-1)(9n^2-1)}.$$

En posant $n=1$, $n=2$, $n=\infty$, on a

$$\text{T} = \frac{16a}{5\pi}, \qquad \text{T} = \frac{24a}{7\pi}, \qquad \text{T} = \frac{\pi a}{2} - \frac{64a}{45\pi}.$$

D'après cela, il est facile de déterminer la position du centre d'inertie de la moitié ou du quartier de la sur-

face et du corps épicycloïdal. En calculant

$$\sigma\iiint z^2\,dx\,dy\,dz$$

$$=\frac{\sigma}{3}\int_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{2\pi}{n}}\int_{\alpha=0}^{\alpha=2\pi} z^3\,dx\,dy$$

$$=\frac{\sigma a^5}{3}\int_0^{\frac{2\pi}{n}}(1-\cos n\varphi)^3\,d\varphi\int_0^{2\pi}(n+\cos\alpha)\sin^4\alpha\,d\alpha,$$

on a

$$\frac{63\pi^2\sigma a^5}{16}=\frac{63\,\mathrm{M}a^2}{80}.$$

NOTE SUR LA SÉRIE $\sum_1^\infty n^s u^n$;

PAR M. E. CAHEN,
Professeur au lycée de Rennes.

Pour $s=0$,

$$\sum_1^\infty n^s u^n=\frac{u}{1-u}\qquad(\mathrm{mod}\ u<1).$$

Pour $s=1$,

$$\sum_1^\infty n u^n=\frac{u}{(1-u)^2}\qquad(\mathrm{mod}\ u<1).$$

En général, s étant entier, $\sum_1^\infty n^s u^n=\frac{\mathrm{A}}{(1-u)^{s+1}}$, A restant fini pour $u=1$.

Je me propose d'étendre cette proposition au cas de s quelconque >0.

On a, pour toute valeur de s, n étant un entier > 1,

$$n^s = \frac{(s+1)(s+2)\ldots(s+n)}{1.2\ldots n}\,\frac{\Gamma(s+1)}{1+\varepsilon_n}, \qquad 0 < \varepsilon_n < 1 \text{ (1)}.$$

La série proposée peut donc s'écrire

$$u + \sum_2^\infty \frac{(s+1)(s+2)\ldots(s+n)}{1.2\ldots n}\,\frac{\Gamma(s+1)}{1+\varepsilon_n}\,u^n.$$

Appelons α et β deux limites, l'une inférieure, l'autre supérieure au nombre $\frac{1}{1+\varepsilon_n}$,

$$\frac{1}{2} \leqq \alpha < \beta < 1.$$

On voit que la somme de la série est comprise entre

$$u + \alpha \sum_2^\infty \frac{(s+1)(s+2)\ldots(s+n)}{1.2\ldots n}\,\Gamma(s+1)\,u^n$$

et

$$u + \beta \sum_2^\infty \frac{(s+1)\ldots(s+n)}{1.2\ldots n}\,\Gamma(s+1)\,u^n,$$

c'est-à-dire entre

$$u + \alpha\,\Gamma(s+1)\left[\frac{1}{(1-u)^{s+1}} - 1 - (s+1)u\right]$$

et

$$u + \beta\,\Gamma(s+1)\left[\frac{1}{(1-u)^{s+1}} - 1 - (s+1)u\right];$$

ce qui démontre le théorème.

---

(1) *Voir* SERRET, *Cours de Calcul différentiel et intégral*, t. II, p. 180.

REMARQUES SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS ABÉLIENNES;

PAR M. J. DOLBNIA, à Nijni-Novgorod.

I.

On sait que, dans l'étude des fonctions abéliennes, on peut se borner à la considération du cas particulier, quand l'équation fondamentale algébrique irréductible ne possède que les points critiques de second ordre. Nous nous occuperons des intégrales abéliennes de première espèce, c'est-à-dire des intégrales conservant une valeur finie sur toute la surface de la sphère.

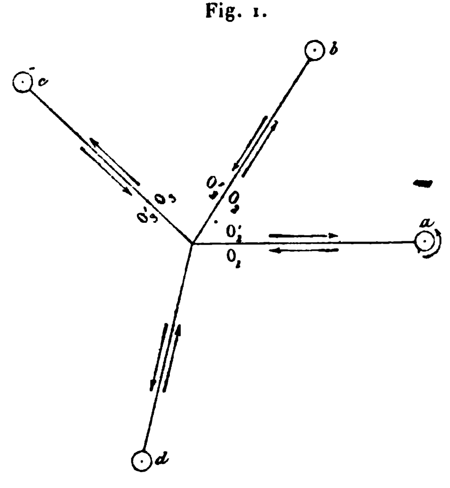
Supposons que les intégrales abéliennes dépendent de l'équation algébrique irréductible

$$f(x, y) = 0,$$

qui possède les points critiques de second ordre. Autour de chacun de ces points ne se permutent que deux des n racines de l'équation. Dans chaque lacet nous distinguerons le commencement et la fin; ainsi le commencement du lacet (b) est le point O_2, la fin O'_2; il est inutile d'ajouter que les points O_1, O'_1, O_2, O'_2, ... sont infiniment voisins, ou, si l'on veut, coïncident avec l'origine des coordonnées. Néanmoins, pour plus de détermination, nous prendrons que l'origine des coordonnées se trouve toujours au point O_1, et nous supposerons que la variable complexe se meut toujours dans la même direction indiquée par les flèches; cette direction sera positive. La propriété fondamentale, bien connue, de la fonction algébrique y est la suivante. En partant de l'origine des coordonnées O_1 et en se mouvant successi-

vement par tous les lacets, nous reviendrons à l'origine des coordonnées avec la même racine qu'au commencement.

Fig. 1.



Nous donnerons le nom de *première feuille* à la surface infinie sur laquelle la fonction y_1 arrive à l'origine des coordonnées avec la même valeur, en variant continuellement par tous les contours élémentaires dans la même direction (dans notre recherche, cette direction sera toujours contraire à la direction de l'aiguille de l'horloge); la surface ayant le même caractère pour la fonction y_2 portera le nom de *seconde feuille;* en général, une surface possédant le même caractère pour y_k sera *la feuille* $k^{\text{ième}}$. On peut supposer, si l'on veut, ces feuilles superposées comme dans le système de Riemann; mais nous employons l'expression *feuille* dans le sens d'un simple terme, ne joignant à ce mot aucune signification matérielle. Si la fonction y, après avoir passé par la variable complexe du lacet, arrive à l'origine des coordonnées avec une valeur nouvelle, nous dirons que le lacet est *actif;* si, au contraire, dans les

mêmes conditions, la fonction ne change pas de valeur, nous dirons que le lacet est *passif*. Si, autour du point critique c, se permutent deux racines y_i, y_k, le lacet $(c)_i^k$ joue sur deux feuilles un rôle actif. Pour déterminer les numéros de ces feuilles, il faut agir de la manière suivante. Partons de l'origine O_3 du lacet c avec la racine y_i et avançons dans la direction positive jusqu'à ce que nous arrivions à l'origine des coordonnées O_1. Si nous sommes arrivés au point O_1 avec la racine y_A, nous dirons que le lacet $(c)_i^k$, avec son indice i, appartient à la feuille A. Partons ensuite du point O_3 (l'origine du lacet c) avec la racine y_k et avançons dans la direction positive jusqu'à l'origine des coordonnées O_1. Si nous sommes arrivé au point O_1 avec la racine y_B, nous dirons que le lacet $(c)_i^k$ avec son indice k appartient à la feuille B. La propriété des lacets énoncés ci-dessus entraîne une propriété encore plus intéressante que nous expliquerons par un exemple. Posons que le lacet $(c)_i^k$ permute deux racines y_i, y_k et, par conséquent, appartient par ses indices aux deux feuilles A, B. Partons dès l'origine des coordonnées O_1 avec la racine y_A; nous arriverons au point O_3 avec la racine y_i; après cela, il faudrait traverser le lacet $(c)_i^k$ et alors la fonction dans le point O'_3 acquerrait la valeur y_k. Si nous passons directement du point O_3 au point O'_3, sans décrire le lacet $(c)_i^k$, nous arriverons au point O'_3 avec la racine y_i et non avec la racine y_k comme il l'aurait fallu. Mais sortir du lacet $(c)_i^k$, avec la racine y_i, signifie y entrer avec la racine y_k. Et, comme le lacet $(c)_i^k$ appartient par son indice k à la feuille B, l'omission du lacet actif $(c)_i^k$ équivaut au passage à une feuille nouvelle. D'où suit la conclusion :

Si l'on fait, à la place où se trouve le point critique c, *la coupure des deux feuilles* A, B *de manière*

que le point critique disparaisse pour toujours et que l'on commence le mouvement au point O_1 *avec la racine* y_A, *en traversant la coupure,* y *ne change pas de valeur, mais le mouvement ne fera que passer dans une feuille nouvelle.*

Théorème I. — *Si l'on part de l'origine des coordonnées* O_1 *avec une racine de l'équation*

$$f(x, y) = 0,$$

et si l'on se meut dans la direction positive en passant successivement d'un lacet à un autre, on peut choisir des lacets tels qu'en les supprimant complètement on parvient au passage continuel d'une feuille à une autre jusqu'à ce que toutes les feuilles soient épuisées; après quoi s'effectuera le passage de la dernière feuille à la première; en opérant ainsi, nous ferons autant de tours complets qu'il y avait de feuilles et nous formerons autant de coupures qu'il y avait de feuilles moins une; chaque feuille, pendant ce mouvement, sera passée en entier et seulement une fois.

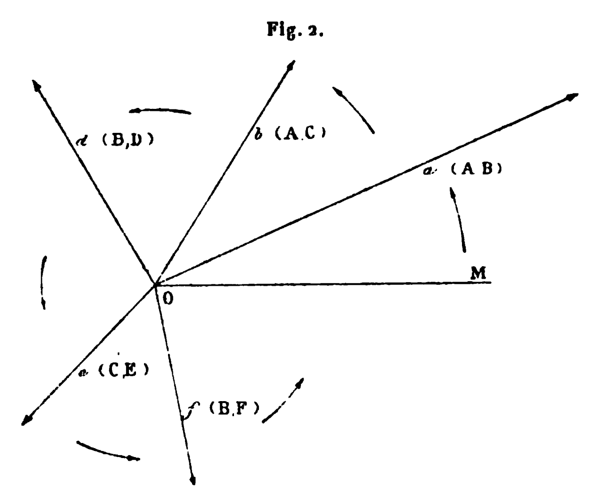
Démonstration. — Soit le point O l'origine des coordonnées, et M le premier point critique que la variable complexe doit décrire (le point M est tout à fait arbitraire). Posons que le mouvement commence à la feuille A; par conséquent, on part de l'origine des coordonnées avec la racine y_A et l'on commence le mouvement dans la direction positive. Parmi les lacets actifs appartenant à la feuille A, prenons arbitrairement un seul pour la formation de la première coupure. Posons que le lacet destiné à la coupure joue un rôle actif sur deux feuilles A et B; soit ce lacet

$$a(A, B).$$

Coupons deux feuilles A et B par la ligne infinie Oa.

Alors, pendant le mouvement continuel de la variable complexe, nous décrirons dans la feuille A l'angle MOa et, par la coupure Oa, nous passerons dans la feuille B.

Fig. 2.



La seconde coupure doit servir au passage dans une feuille nouvelle. On peut passer à la feuille nouvelle soit de la feuille B, soit de la feuille A; cela dépend entièrement de notre volonté. Si nous voulons passer à une feuille nouvelle de la feuille A, après avoir fait le premier tour, nous arriverons à l'origine des coordonnées avec la racine y_B; le second tour commencera à la feuille B et nous devrons décrire, dans cette feuille, l'angle MOa jusqu'à la coupure Oa; par cette coupure nous passons encore à la feuille A et, par une nouvelle coupure, de la feuille A dans une nouvelle feuille, comme nous l'avons voulu. Mais, si nous voulons passer dans une nouvelle feuille de la feuille B, ce passage devra s'effectuer pendant le premier tour; il faudra alors faire une nouvelle coupure dans l'angle

$$aOM = 2\pi - MOa;$$

la ligne Od marquera cette coupure. Cette coupure existant, le passage dans une nouvelle feuille s'accomplira pendant le premier tour. En effet, par la coupure Oa, nous passerons à la feuille B et, par la coupure Od, à la feuille D; et comme nous ne rencontrerons aucune coupure donnant un passage à une nouvelle feuille, le premier tour sera terminé à l'origine des coordonnées et dans la feuille D, par conséquent avec la racine y_D.

Le second tour commencera à la feuille D et y continuera jusqu'à la rencontre avec la coupure Od par laquelle le mouvement passera dans la feuille B. Comme nous n'avons pas voulu passer de la feuille D à une feuille nouvelle, nous devrons effectuer ce passage de la feuille B ou de la feuille A. Sur notre figure, le passage est effectué de la feuille B par la coupure Of dans la feuille F, où le second tour sera terminé. Plus loin il faudra avoir soin de passer de la feuille F à une nouvelle feuille. Si, pour une cause quelconque, nous n'avons pas trouvé nécessaire d'effectuer un passage direct de la feuille F à une feuille nouvelle, commençons le troisième tour dans la feuille F, où nous continuerons le mouvement jusqu'à la rencontre avec la coupure Of par laquelle nous passerons dans la feuille B, où nous terminerons le troisième tour.

Pendant le quatrième tour, passons par la coupure aO dans la feuille A et ensuite, par la coupure Ob, dans la feuille C, plus loin, par la coupure Oe, dans la feuille E, où nous terminerons le quatrième tour. S'il n'y a plus de nouvelles feuilles, le quatrième tour se terminera dans la feuille E. Pendant le cinquième, passons par la coupure Oe dans la feuille C, où nous terminerons le cinquième tour. Pendant le sixième tour, passons par la coupure Ob dans la première feuille, où nous terminerons le sixième mouvement. Nous avons eu six

feuilles, nous avons fait autant de tours et cinq coupures. Le mouvement dans une feuille quelconque commence depuis la coupure avec l'indice de cette feuille et continue jusqu'à une nouvelle coupure avec ce même indice. Outre cela, le mouvement ne se répète plus dans le même ordre. Pour cette raison, le mouvement dans une feuille quelconque, par exemple B, aura lieu dans les angles

$$aod + dof + foa = 2\pi.$$

Ainsi le théorème est prouvé. Voici un exemple : Soient neuf feuilles marquées des numéros 1, 2, ..., 9. Par les points critiques sont faites des coupures dont l'ordre, pendant le mouvement dans la direction positive, est le suivant

$$a(1,2),\quad b(1,3),\quad c(2,4),\quad d(2,5),$$
$$e(3,9),\quad f(4,6),\quad g(5,8),\quad h(1,7).$$

Le Tableau ci-joint contient les angles décrits dans chaque feuille pendant chacun des neuf tours :

Numéro de la feuille.	Tours 1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
1	MO*a*	»	»	»	»	*aob*	»	*b*O*h*	*h*OM
2	*a*O*c*	»	*c*O*d*	»	*d*OM	MO*a*	»	»	»
3	»	»	»	»	»	*b*O*e*	*e*OM	MO*b*	»
4	*c*O*f*	*f*OM	MO*c*	»	»	»	»	»	»
5	»	»	*d*O*g*	*g*OM	MO*d*	»	»	»	»
6	*f*OM	MO*f*	»	»	»	»	»	»	»
7	»	»	»	»	»	»	»	*h*OM	MO*h*
8	»	»	*g*OM	MO*g*	»	»	»	»	»
9	»	»	»	»	»	*e*OM	MO*e*	»	»

THÉORÈME II. — *Prenons deux intégrales abéliennes indépendantes, de première espèce, u et v. Si nous intégrons suivant le contour déterminé par le théo-*

rème précédent, l'intégrale

$$\int u\,dv$$

sera égale à zéro.

Pour démontrer, remarquons que l'intégrale prise suivant la totalité de tous les lacets actifs d'une feuille quelconque dans la direction positive, d'après le théorème de Cauchy, est égale à zéro, puisque l'infinité n'est pas le point critique de la fonction y dont dépendent les intégrales abéliennes.

Indiquons l'intégrale prise dans la totalité des lacets actifs de la première feuille par

$$H(I),$$

pour la seconde feuille

$$H(II), \quad \ldots;$$

alors nou savons

$$H(I) = H(II) = H(III) = \ldots = 0.$$

Nous désignerons ainsi l'intégrale prise suivant une partie du contour de la feuille par

$$\overset{\beta}{\underset{\alpha}{H}}(A),$$

où α est l'indice de la racine avec laquelle l'intégration a commencé, β l'indice de la racine avec laquelle l'intégration a été terminée, A l'indice de la feuille où l'intégration a eu lieu. Enfin l'intégrale prise suivant un lacet quelconque, nous désignerons ainsi

$$\alpha\beta(A),$$

où α, β, A ont la signification indiquée ci-dessus. Admettant ces significations, supposons que nous avons,

par exemple, cinq feuilles, et les coupures sont faites dans l'ordre suivant

$$a(\mathrm{I}, \mathrm{II}),\quad b(\mathrm{I}, \mathrm{III}),\quad c(\mathrm{II}, \mathrm{IV}),\quad d(\mathrm{II}, \mathrm{V}).$$

Posons encore que le lacet a permute les racines y_i, y_x, le lacet (b) permute les racines y_e, y_m, le lacet (c) permute les racines y_n, y_p, enfin le lacet (d) permute les racines y_q, y_r. Le premier tour donne pour l'intégrale la signification

$$(1)\qquad \mathop{H}\limits_{1}^{i}(\mathrm{I})+\mathop{H}\limits_{i}^{n}(\mathrm{II})+\mathop{H}\limits_{n}^{4}(\mathrm{IV}).$$

Le deuxième tour donne

$$(2)\qquad \mathop{H}\limits_{4}^{p}(\mathrm{IV})+\mathop{H}\limits_{p}^{q}(\mathrm{II})+\mathop{H}\limits_{q}^{5}(\mathrm{V}).$$

Le troisième tour donne

$$(3)\qquad \mathop{H}\limits_{5}^{r}(\mathrm{V})+\mathop{H}\limits_{r}^{2}(\mathrm{II}).$$

Le quatrième tour donne

$$(4)\qquad \mathop{H}\limits_{2}^{k}(\mathrm{II})+\mathop{H}\limits_{k}^{l}(\mathrm{I})+\mathop{H}\limits_{l}^{3}(\mathrm{III}).$$

Enfin le cinquième tour donne

$$(5)\qquad \mathop{H}\limits_{3}^{m}(\mathrm{III})+\mathop{H}\limits_{m}^{1}(\mathrm{I}).$$

En ajoutant (1), (2), (3), (4), (5), nous aurons

$$\begin{aligned}\int u\,dv = {} & \mathop{H}\limits_{1}^{i}(\mathrm{I})+\mathop{H}\limits_{i}^{n}(\mathrm{II})+\mathop{H}\limits_{n}^{4}(\mathrm{IV})+\mathop{H}\limits_{4}^{p}(\mathrm{IV}) \\ & +\mathop{H}\limits_{p}^{q}(\mathrm{II})+\mathop{H}\limits_{q}^{5}(\mathrm{V})+\mathop{H}\limits_{5}^{r}(\mathrm{V})+\mathop{H}\limits_{r}^{2}(\mathrm{II}) \\ & +\mathop{H}\limits_{2}^{k}(\mathrm{II})+\mathop{H}\limits_{k}^{l}(\mathrm{I})+\mathop{H}\limits_{l}^{3}(\mathrm{III})+\mathop{H}\limits_{3}^{m}(\mathrm{III})+\mathop{H}\limits_{m}^{1}(\mathrm{I})\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}\int u\,\partial v = {} & \overset{i}{\underset{1}{\mathrm{H}}}(\mathrm{I}) + ik(\mathrm{I}) + ki(\mathrm{II}) \\ & + \overset{n}{\underset{i}{\mathrm{H}}}(\mathrm{II}) + np(\mathrm{II}) + pn(\mathrm{IV}) \\ & + \left[\overset{4}{\underset{n}{\mathrm{H}}}(\mathrm{IV}) + \overset{p}{\underset{4}{\mathrm{H}}}(\mathrm{IV}) + pn(\mathrm{IV})\right] \\ & + np(\mathrm{II}) + \overset{q}{\underset{p}{\mathrm{H}}}(\mathrm{II}) + qr(\mathrm{II}) \\ & + \left[rq(\mathrm{V}) + \overset{5}{\underset{q}{\mathrm{H}}}(\mathrm{V}) + \overset{r}{\underset{5}{\mathrm{H}}}(\mathrm{V})\right] \\ & + rq(\mathrm{V}) + qr(\mathrm{II}) + \overset{2}{\underset{r}{\mathrm{H}}}(\mathrm{II}) + \overset{k}{\underset{2}{\mathrm{H}}}(\mathrm{II}) \\ & + ki(\mathrm{II}) + ik(\mathrm{I}) + \overset{l}{\underset{k}{\mathrm{H}}}(\mathrm{I}) + lm(\mathrm{I}) \\ & + \left[ml(\mathrm{III}) + \overset{3}{\underset{l}{\mathrm{H}}}(\mathrm{III}) + \overset{m}{\underset{3}{\mathrm{H}}}(\mathrm{III})\right] \\ & + ml(\mathrm{III}) + lm(\mathrm{I}) + \overset{1}{\underset{m}{\mathrm{H}}}(\mathrm{I}).\end{aligned}$$

En remarquant que

$$\overset{4}{\underset{n}{\mathrm{H}}}(\mathrm{IV}) + \overset{p}{\underset{4}{\mathrm{H}}}(\mathrm{IV}) + pn(\mathrm{IV}) = \mathrm{H}(\mathrm{IV}) = 0,$$

$$rq(\mathrm{V}) + \overset{5}{\underset{q}{\mathrm{H}}}(\mathrm{V}) + \overset{r}{\underset{5}{\mathrm{H}}}(\mathrm{V}) = \mathrm{H}(\mathrm{V}) = 0,$$

$$ml(\mathrm{III}) + \overset{3}{\underset{l}{\mathrm{H}}}(\mathrm{III}) + \overset{m}{\underset{3}{\mathrm{H}}}(\mathrm{III}) = \mathrm{H}(\mathrm{III}) = 0,$$

nous aurons

$$\begin{aligned}\int u\,\partial v = {} & \overset{i}{\underset{1}{\mathrm{H}}}(\mathrm{I}) + ik(\mathrm{I}) \\ & + \Big[ki(\mathrm{II}) + \overset{n}{\underset{i}{\mathrm{H}}}(\mathrm{II}) + np(\mathrm{II}) \\ & \qquad + \overset{q}{\underset{p}{\mathrm{H}}}(\mathrm{II}) + qr(\mathrm{II}) + \overset{2}{\underset{r}{\mathrm{H}}}(\mathrm{II}) + \overset{k}{\underset{2}{\mathrm{H}}}(\mathrm{II})\Big] \\ & + \overset{l}{\underset{k}{\mathrm{H}}}(\mathrm{I}) + lm(\mathrm{I}) + \overset{1}{\underset{m}{\mathrm{H}}}(\mathrm{I}).\end{aligned}$$

En remarquant que

$$ki(\mathrm{II}) + \overset{n}{\underset{i}{\mathrm{H}}}(\mathrm{II}) + np(\mathrm{II}) + \overset{q}{\underset{p}{\mathrm{H}}}(\mathrm{II})$$
$$+ qr(\mathrm{II}) + \overset{2}{\underset{r}{\mathrm{H}}}(\mathrm{II}) + \overset{k}{\underset{2}{\mathrm{H}}}(\mathrm{II}) = \mathrm{H}(\mathrm{II}) = 0,$$

nous aurons

$$\int u\,\partial v = \overset{i}{\underset{1}{\mathrm{H}}}(\mathrm{I}) + ik(\mathrm{I}) + \overset{l}{\underset{k}{\mathrm{H}}}(\mathrm{I})$$
$$+ lm(\mathrm{I}) + \overset{1}{\underset{m}{\mathrm{H}}}(\mathrm{I}) = \mathrm{H}(\mathrm{I}) = 0,$$

C. Q. F. D.

II.

Les deux théorèmes prouvés donnent la possibilité de trouver un lien entre les périodes des deux intégrales abéliennes indépendantes de première espèce. Posons que, moyennant les coupures, le passage continuel d'une feuille à une autre est garanti d'après le théorème premier; l'intégrale

$$\int u\,\partial v,$$

suivant le chemin indiqué, est égale à zéro. Considérons un point critique quelconque a permutant deux racines y_α, y_β; soit le lacet

$$(a)_\alpha^\beta$$

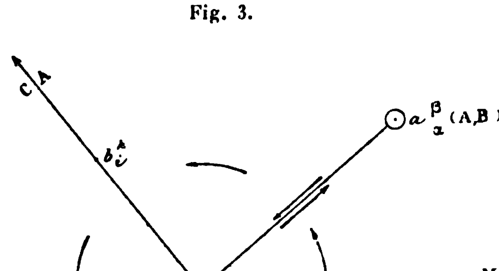
appartenant, par l'indice α, à la feuille A et par l'indice β à la feuille B, ce qui est indiqué sur la *fig.* 3.

Posons que, pour le passage de la feuille A à la feuille B, existent deux coupures : l'une, par le point critique b_i^k, donnant le passage de la feuille A à la feuille C,

et la seconde, par le point critique c_l^m, donnant passage de là feuille C à la feuille B.

Posons qu'en effectuant l'intégration, nous ayons déjà passé dans la feuille A et ensuite dans la feuille B. Au moment où nous arriverons à l'origine des coordonnées

Fig. 3.



avec la racine y_A, l'intégrale u a une certaine signification déterminée; désignons-la par Q. Alors, décrivant l'angle MOa dans la feuille A, nous arriverons à l'origine des coordonnées ayant la signification

$$u = Q + \overset{\alpha}{\underset{A}{H}}(A).$$

Après le passage du lacet

$$(a)_\alpha^\beta$$

par la variable complexe, l'intégrale

$$\int u\, dv$$

acquerra la valeur

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^a \left[Q + \overset{\alpha}{\underset{A}{H}}(A) + u_\alpha\right] \partial v_\alpha - \int_0^a \left[Q + \overset{\alpha}{\underset{A}{H}}(A) + \alpha\beta(A) + u_\beta\right] \partial v_\beta \\ &\quad = \left[Q + \overset{\alpha}{\underset{A}{H}}(A)\right] \int_0^a \partial v_\alpha - \left[Q + \overset{\alpha}{\underset{A}{H}}(A) + \alpha\beta(A)\right] \int_0^a \partial v_\beta \\ &\quad + \int_0^a u_\alpha \, \partial v_\alpha - \int_0^a u_\beta \, \partial v_\beta ; \end{aligned}\right.$$

ou, désignant

$$\int_0^a \partial v_\alpha = L_\alpha^a, \qquad \int_0^a \partial v_\beta = L_\beta^a,$$

nous aurons pour (6) l'expression

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &\left[Q + \overset{\alpha}{\underset{A}{H}}(A)\right] (L_\alpha^a - L_\beta^a) \\ &\quad - \alpha\beta(A) L_\beta^a + \int_0^a u_\alpha \, \partial v_\alpha - \int_0^a u_\beta \, \partial v_\beta . \end{aligned}\right.$$

Pour le même point critique dans la feuille B, nous trouverons

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} &\left[Q + \overset{\alpha}{\underset{A}{H}}(A) + \alpha\beta(A) + \overset{i}{\underset{\beta}{H}}(A) + \overset{l}{\underset{i}{H}}(C) + \overset{B}{\underset{l}{H}}(B)\right] \\ &\quad \times (L_\beta^a - L_\alpha^a) - \beta\alpha(B) L_\alpha^a + \int_0^a u_\beta \, \partial v_\beta - \int_0^a u_\alpha \, \partial v_\alpha , \end{aligned}\right.$$

et comme le lacet

$$(a)_\alpha^\beta(A, B)$$

n'appartient qu'aux deux feuilles A et B, la partie de l'intégrale

$$\int u \, \partial v$$

correspondant à un seul point critique sera exprimée

par la somme (7), (8) et, par conséquent, sera égale à

$$\left[\alpha\beta(A)+\overset{i}{\underset{\beta}{H}}(A)+\overset{l}{\underset{i}{H}}(C)+\overset{B}{\underset{l}{H}}(B)+\overset{\beta}{\underset{B}{H}}(B)\right]$$
$$\times(L^{\alpha}_{\beta}-L^{a}_{\alpha})-\alpha\beta(A)(L^{a}_{\beta}-L^{a}_{\alpha}),$$

ou

$$\left[\overset{i}{\underset{\beta}{H}}(A)+\overset{l}{\underset{i}{H}}(C)+\overset{B}{\underset{l}{H}}(B)+\overset{\beta}{\underset{B}{H}}(B)\right](L^{a}_{\beta}-L^{a}_{\alpha}).$$

La quantité

$$\overset{i}{\underset{\beta}{H}}(A)+\overset{l}{\underset{i}{H}}(C)+\overset{B}{\underset{l}{H}}(B)+\overset{\beta}{\underset{B}{H}}(B),$$

que nous désignerons par

$$\Omega_a,$$

formera la période. Désignons encore

$$L^{a}_{\beta}-L^{a}_{\alpha}=L^{a}_{\beta\alpha};$$

alors la partie de l'intégrale

$$\int u\,dx,$$

correspondant à un seul point critique

$$a^{\alpha}_{\beta}(A,B),$$

s'exprimera par

$$\Omega_a L^{a}_{\beta\alpha}.$$

Si nous désignons les points critiques, sans compter ceux par lesquels les coupures sont faites, par

$$a_1,\quad a_2,\quad a_3,\quad \ldots,\quad a_m,$$

alors

(9) $$\int u\,dx=\sum_{1}^{t=m}\Omega_{a_t}L^{a_t}_{\beta_t\alpha_t}=0.$$

Maintenant il faut prendre soin que l'équation (9) ne

contient que les périodes des deux intégrales u et v. Comme l'intégrale

$$\int dv$$

relativement au lacet

$$(a)_\alpha^\beta,$$

que nous avons désignée par $L^a_{\alpha\beta}$, désignons l'intégrale

$$\int du$$

relativement à ce même lacet par $\mathfrak{A}^a_{\alpha\beta}$. Raisonnant relativement à l'intégrale

$$\int v\, du,$$

comme nous avons raisonné relativement à

$$\int u\, dv,$$

nous avons l'équation analogique

$$\sum_{i=1}^{i=m} E^{a_i} \mathfrak{A}^{a_i}_{\alpha_i \beta_i} = 0,$$

où E est formé des L comme Ω est formé des $\mathfrak{A}$; et par conséquent

$$(10) \qquad \sum_{i=1}^{i=m} \Omega_{a_i} L^{a_i}_{\beta_i \alpha_i} = \sum_{i=1}^{i=m} E_{a_i} \mathfrak{A}^{a_i}_{\alpha_i \beta_i} = 0.$$

Choisissons maintenant les lacets fondamentaux qui pourraient servir au passage de y_1 à toutes les autres racines

$$y_2, \quad y_3, \quad \ldots, \quad y_\alpha, \quad y_\beta, \quad \ldots, \quad y_n,$$

et désignons par U_α la valeur de l'intégrale u, prise suivant les lacets fondamentaux unissant y_1 avec y_α ; soit V_α ayant la même signification pour l'intégrale v. Si nous

posons

$$\Omega_{a_i} = \mathfrak{A}^{a_i}_{\alpha_i \beta_i} + \mathfrak{A}^{b_i}_{\beta_i \gamma_i} + \ldots + \mathfrak{A}^{o_i}_{\omega_i d_i},$$

on peut écrire

$$\begin{aligned}\Omega_{a_i} = & \left[U_{\alpha_i} + \mathfrak{A}^{a_i}_{\alpha_i \beta_i} - U_{\beta_i} \right] \\ & + \left[U_{\beta_i} + \mathfrak{A}^{b_i}_{\beta_i \gamma_i} - U_{\gamma_i} \right] + \ldots [U_{\omega_i} + \mathfrak{A}_{\omega_i \alpha_i} - U_{\alpha_i}];\end{aligned}$$

mais alors chaque quantité de la forme

$$\mathfrak{A}^{a_i}_{\beta \alpha_{ii}},$$

donnera une période que nous désignerons ainsi

$$(\mathfrak{A}^{a_i}_{\alpha_i \beta_i}).$$

D'où il suit que la partie droite de l'équation (10) ne changera pas si, dans chaque quantité de la forme

$$E_{ai},$$

on substitue, à la place de

$$L^{a_i}_{\alpha_i \beta_i},$$

la période

$$V_{\alpha_i} + L^{a_i}_{\alpha_i \beta_i} - V_{\beta_i} = (L^{a_i}_{\alpha_i \beta_i}),$$

et, par conséquent, la partie gauche de la même équation ne changera pas à la suite d'une telle substitution, et nous aurons l'équation (9) dans la forme

$$\sum_{i=1}^{i=m} \Omega_{a_i} (L^{a_i}_{\alpha_i \beta_i}) = 0, \tag{11}$$

équation donnant le lien entre les périodes.

Si nous désignons par N le nombre des points critiques de l'équation

$$f(x, y) = 0$$

et par n le nombre de ses racines, nous aurons $(n-1)$

lacets fondamentaux; de même le nombre des coupures sera $(n-1)$.

Comme les périodes (L) qui ne contiennent que les lacets fondamentaux sont égales à zéro, le nombre de toutes les périodes de l'intégrale abélienne sera

$$2p = \mathrm{N} - 2(n-1) = m.$$

L'application des théorèmes démontrés aux intégrales hyperelliptiques est surtout intéressant. Prenons deux intégrales hyperelliptiques indépendantes

$$u = \int \frac{f(x)\,\partial x}{\sqrt{\mathrm{R}(x)}}, \qquad v = \int \frac{\varphi(x)\,\partial x}{\sqrt{\mathrm{R}(x)}},$$

où

$$\mathrm{R}(x) = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_{2p})(x-a_{2p+1})(x-a_{2p+2}),$$

$f(x)$ et $\varphi(x)$ sont des fonctions entières dont les degrés ne surpassent pas $(p-1)$. Posons que les points critiques sont disposés sur le plan dans l'ordre marqué par leurs numéros.

L'équation

$$y^2 = \mathrm{R}(x)$$

a seulement deux racines et, par conséquent, il y a deux feuilles; chaque point critique appartient à deux feuilles et, par conséquent, il suffit de faire une coupure qu'il faut tracer de l'origine des coordonnées par un point critique quelconque; menons la coupure $\mathrm{O}a_{2p+2}$; il faudra faire deux tours. Le premier tour donnera :

pour le point critique a_1,

$$\int_0^{a_1} u\,\partial v + \int_0^{a_1} (2\mathrm{A}_1 - u)\,\partial v = 2\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1;$$

pour le point a_2,

$$-\int_0^{a_2} (2\mathrm{A}_1 - u)\,dv$$
$$-\int_0^{a_2} (2\mathrm{A}_1 - 2\mathrm{A}_2 + u)\,\partial v = -4\mathrm{A}_1\mathrm{B}_2 + 2\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2;$$

pour le point a_3,

$$4(A_1 - A_2)B_3 + 2A_3B_3;$$

pour le point a_4,

$$-4(A_1 - A_2 + A_3)B_4 + 2A_4B_4, \quad \ldots;$$

enfin pour le point a_{2p+1},

$$4(A_1 - A_2 + \ldots + A_{2p})B_{2p+1} + 2A_{2p+1}B_{2p+1}.$$

Le second tour donnera

$$\begin{aligned}
&-4(A_1 - A_2 + A_3 - A_4 + \ldots - A_{2p} + A_{2p+1})B_1 + 2A_1B_1\\
&-4(A_2 - A_3 + A_4 - \ldots\ldots + A_{2p} - A_{2p+1})B_2 + 2A_2B_2\\
&-4(A_3 - A_4 + \ldots\ldots\ldots\ldots - A_{2p} + A_{2p+1})B_3 + 2A_3B_3\\
&-4(A_4 - A_5 + \ldots\ldots\ldots\ldots + A_{2p} - A_{2p+1})B_4 + 2A_4B_4\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&-4(A_{2p} - A_{2p+1})B_{2p} + 2A_{2p}B_{2p}\\
&-4A_{2p+1}B_{2p+1} + 2A_{2p+1}B_{2p+1}.
\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
\int u\,dv = &-4(A_1 - A_2)B_2\\
&+4(A_1 - A_2)B_3\\
&-4(A_1 - A_2 + A_3 - A_4)B_4\\
&+4(A_1 - A_2 + A_3 - A_4)B_5\\
&-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&-4(A_1 - A_2 + A_3 - \ldots + A_{2p-1} - A_{2p})B_{2p}\\
&+4(A_1 - A_2 + A_3 - \ldots + A_{2p-1} - A_{2p})B_{2p+1}\\
&+4(A_2 - A_3 + A_4 - \ldots + A_{2p} - A_{2p+1})B_1\\
&-4(A_2 - A_3 + A_4 - \ldots + A_{2p} - A_{2p+1})B_2\\
&+4(A_4 - A_5 + A_5 + \ldots + A_{2p} - A_{2p+1})B_3\\
&-\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\qquad\qquad -4(A_{2p} - A_{2p+1})B_{2p} = 0;
\end{aligned}$$

d'où il suit

$$
\begin{aligned}
&4(A_1 - A_2)(B_2 - B_3 + \ldots + B_{2p} - B_{2p+1}) \\
&- 4(B_1 - B_2)(A_2 - A_3 + \ldots + A_{2p} - A_{2p+1}) \\
&+ 4(A_3 - A_4)(B_4 - B_5 + \ldots + B_{2p} - B_{2p+1}) \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ 4(A_{2p-1} - A_{2p})(B_{2p} - B_{2p+1}) \\
&\qquad - 4(B_{2p-1} - B_{2p})(A_{2p} - A_{2p+1}) = 0.
\end{aligned}
$$

En posant

$$
\begin{aligned}
&2(A_1 - A_2) = \omega_2, \qquad 2(B_1 - B_2) = \varepsilon_2, \\
&2(A_3 - A_4) = \omega_4, \qquad 2(B_3 - B_4) = \varepsilon_4, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots, \\
&2(A_{2p-1} - A_{2p} = \omega_{2p}, \qquad 2(B_{2p-1} - B_{2p}) = \varepsilon_{2p}, \\
&2(A_2 - A_3 + \ldots + A_{2p} - A_{2p+1}) = \omega_1, \\
&2(A_4 - A_5 + \ldots + A_{2p} - A_{2p+1}) = \omega_3, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
&2(A_{2p} - A_{2p+1}) = \omega_{2p-1}, \\
&2(B_2 - B_3 + \ldots + B_{2p} - B_{2p+1}) = \varepsilon_1, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
&2(B_{2p} - B_{2p+1}) = \varepsilon_{2p-1},
\end{aligned}
$$

nous aurons

$$\sum_{i=1}^{i=p} (\omega_{2i-1}\,\varepsilon_{2i} - \varepsilon_{2i-1}\,\omega_{2i}) = 0.$$

Dans cette forme remarquable, on a presque immédiatement une relation entre les périodes de toutes les intégrales abéliennes de première espèce. Pour éviter les abstractions inutiles, analysons en détail l'exemple emprunté de l'Ouvrage de Clebsch et Gordan : *Theorie der abelschen Functionen*, 1886. Les discussions que nous offrirons possèdent la généralité nécessaire. Les points critiques sont disposés dans la direction positive dans l'ordre suivant

$$
\begin{aligned}
&a^1_{1,2}, \quad a^2_{2,3}, \quad a^3_{1,4}, \quad a^4_{2,4}, \quad a^5_{3,4}, \quad a^6_{1,3}, \\
&a^7_{2,4}, \quad a^8_{1,2}, \quad a^9_{2,3}, \quad a^{10}_{2,4}, \quad a^{11}_{3,4}, \quad a^{12}_{3,4}.
\end{aligned}
$$

Dans les lignes suivantes est présenté le rapport de chaque lacet à deux feuilles; les numéros des feuilles sont indiqués par les chiffres romains avec la condition que l'indice arabe de gauche corresponde au même indice romain. Ainsi nous avons

$$a^1_{1,2}(\mathrm{I, II}),\quad a^2_{2,3}(\mathrm{III}),\quad a^3_{1,4}(\mathrm{II, IV}),\quad a^4_{2,4}(\mathrm{III, II}),$$
$$a^5_{3,4}(\mathrm{I, III}),\quad a^6_{1,3}(\mathrm{IV, III}),\quad a^7_{2,4}(\mathrm{II, I}),\quad a^8_{1,2}(\mathrm{III, I}),$$
$$a^9_{2.3}(\mathrm{III, IV}),\quad a^{10}_{2,4}(\mathrm{IV, II}),\quad a^{11}_{3,4}(\mathrm{III, IV}),\quad a^{12}_{3,4}(\mathrm{IV, III}).$$

Les coupures sont faites à travers les points

$$a^6_{1,3}(\mathrm{IV, III}),\quad a^7_{2,4}(\mathrm{II, I}),\quad a^8_{1,2}(\mathrm{III, I}).$$

Après la formule

$$\Omega_{a_i} L^{a_i}_{\beta_i \alpha_i} = \left[\overset{i}{\underset{\beta}{\mathrm{H}}}(\mathrm{A}) + \overset{l}{\underset{i}{\mathrm{H}}}(\mathrm{C}) + \overset{\mathrm{B}}{\underset{l}{\mathrm{H}}}(\mathrm{B}) + \overset{\theta}{\underset{\mathrm{B}}{\mathrm{H}}}(\mathrm{B}) \right] L^{a_i}_{\beta_i \alpha_i},$$

nous avons, pour le point $a^1_{12}(\mathrm{I, II})$,

$$(\mathfrak{A}^2_{2,3} + \mathfrak{A}^5_{3,4} + \mathfrak{A}^{10}_{4,2})\, L^1_{21};$$

pour le point $a^2_{2,3}(\mathrm{I, III})$,

$$(\mathfrak{A}^5_{34} + \mathfrak{A}^{10}_{42} + \mathfrak{A}^1_{21} + \mathfrak{A}^3_{14} + \mathfrak{A}^4_{42} + \mathfrak{A}^9_{23} + \mathfrak{A}^{11}_{34} + \mathfrak{A}^{12}_{43})\, L^2_{32};$$

pour le point $a^3_{14}(\mathrm{II, IV})$,

$$\begin{aligned}(&\mathfrak{A}^4_{42} + \mathfrak{A}^9_{23} + \mathfrak{A}^{11}_{34} + \mathfrak{A}^{12}_{43} + \mathfrak{A}^2_{32}\\ &\mathfrak{A}^4_{24} + \mathfrak{A}^5_{43} + \mathfrak{A}^9_{32} + \mathfrak{A}^{10}_{24} + \mathfrak{A}^{11}_{43} + \mathfrak{A}^{12}_{34})\, L^3_{41}\\ &= (\mathfrak{A}^2_{23} + \mathfrak{A}^5_{34} + \mathfrak{A}^{10}_{42})\, L^3_{14};\end{aligned}$$

pour le point $a^4_{24}(\mathrm{III, II})$,

$$(\mathfrak{A}^9_{23} + \mathfrak{A}^{11}_{34} + \mathrm{A}^{12}_{43} + \mathfrak{A}^2_{32})\, L^4_{24};$$

pour le point $a^5_{34}(\mathrm{I, III})$,

$$\begin{aligned}(&\mathfrak{A}^{10}_{42} + \mathfrak{A}^1_{21} + \mathfrak{A}^3_{14} + \mathfrak{A}^4_{42} + \mathfrak{A}^9_{24}\\ &+ \mathfrak{A}^{11}_{34} + \mathfrak{A}^{12}_{43} + \mathfrak{A}^2_{32} + \mathfrak{A}^4_{24})\, L^5_{43};\end{aligned}$$

pour le point a^{9}_{23}(III, IV),

$$(\mathfrak{A}^{11}_{34} + \mathfrak{A}^{12}_{43} + \mathfrak{A}^{2}_{32} + \mathfrak{A}^{4}_{24} + \mathfrak{A}^{5}_{43})\, L^{9}_{32};$$

pour le point a^{10}_{42}(II, IV),

$$\begin{aligned}(\mathfrak{A}^{1}_{21} + \mathfrak{A}^{3}_{14} + \mathfrak{A}^{4}_{42} + \mathfrak{A}^{9}_{23} + \mathfrak{A}^{11}_{34} \\ + \mathfrak{A}^{12}_{43} + \mathfrak{A}^{2}_{32} + \mathfrak{A}^{4}_{24} + \mathfrak{A}^{5}_{43} + \mathfrak{A}^{9}_{32})\, L^{10}_{24} \\ = (\mathfrak{A}^{1}_{21} + \mathfrak{A}^{3}_{14} + \mathfrak{A}^{11}_{34} + \mathfrak{A}^{12}_{43} + \mathfrak{A}^{2}_{32} + \mathfrak{A}^{5}_{43})\, L^{10}_{24};\end{aligned}$$

pour le point a^{11}_{34}(III, IV),

$$(\mathfrak{A}^{12}_{43} + \mathfrak{A}^{2}_{32} + \mathfrak{A}^{4}_{24} + \mathfrak{A}^{5}_{43} + \mathfrak{A}^{9}_{32} + \mathfrak{A}^{10}_{24})\, L^{11}_{43};$$

pour le point a^{12}_{43}(III, IV),

$$(\mathfrak{A}^{2}_{32} + \mathfrak{A}^{4}_{24} + \mathfrak{A}^{5}_{43} + \mathfrak{A}^{9}_{32} + \mathfrak{A}^{10}_{24} + \mathfrak{A}^{11}_{43})\, L^{12}_{34}.$$

En posant que les lacets

$$a^{3}_{1,4}, \quad a^{4}_{4,2}, \quad a^{9}_{2,3}$$

sont des lacets fondamentaux, nous aurons

$$\mathfrak{A}^{3}_{14} = \mathfrak{A}^{4}_{42} = \mathfrak{A}^{9}_{23} = L^{3}_{14} = L^{4}_{42} = L^{9}_{23} = 0.$$

Nous aurons la relation entre les périodes dans la forme (11) :

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned}&(\mathfrak{A}^{2}_{23} + \mathfrak{A}^{5}_{34} + \mathfrak{A}^{10}_{42})\, L^{1}_{21} \\ &\quad + (\mathfrak{A}^{1}_{12} + \mathfrak{A}^{5}_{43} + \mathfrak{A}^{10}_{24} + \mathfrak{A}^{11}_{43} + \mathfrak{A}^{12}_{34})\, L^{2}_{23} \\ &\quad + (\mathfrak{A}^{1}_{12} + \mathfrak{A}^{2}_{23} + \mathfrak{A}^{10}_{24} + \mathfrak{A}^{11}_{43} + \mathfrak{A}^{12}_{34})\, L^{5}_{34} \\ &\quad + (\mathfrak{A}^{1}_{12} + \mathfrak{A}^{2}_{23} + \mathfrak{A}^{5}_{34} + \mathfrak{A}^{11}_{43} + \mathfrak{A}^{12}_{34})\, L^{10}_{42} \\ &\quad + (\mathfrak{A}^{2}_{23} + \mathfrak{A}^{5}_{34} + \mathfrak{A}^{10}_{42} + \mathfrak{A}^{12}_{34})\, L^{11}_{34} \\ &\qquad\qquad + (\mathfrak{A}^{2}_{23} + \mathfrak{A}^{5}_{34} + \mathfrak{A}^{10}_{42} + \mathfrak{A}^{11}_{34})\, L^{12}_{43} = 0.\end{aligned}\right.$$

L'expression (13) est symétrique par rapport à $\mathfrak{A}$ et L. Les deux premières lignes contiennent les deux membres symétriques

$$\mathfrak{A}^{2}_{23}\, L^{1}_{21}, \quad \mathfrak{A}^{1}_{12}\, L^{2}_{23};$$

par conséquent, prenons les deux premières lignes pour le point de départ de notre transformation et formons

le binôme symétrique

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} &(\mathfrak{A}^{1}_{12}+\mathfrak{A}^{5}_{43}+\mathfrak{A}^{10}_{24}+\mathfrak{A}^{11}_{43}+\mathfrak{A}^{12}_{34})(L^{2}_{23}+L^{5}_{34}+L^{10}_{42})\\ &\quad-(\mathfrak{A}^{2}_{23}+\mathfrak{A}^{5}_{34}+\mathfrak{A}^{10}_{42})\\ &\quad\quad\times(L^{1}_{12}+L^{5}_{43}+L^{10}_{24}+L^{11}_{43}+L^{12}_{34})\\ &\quad=\omega_1\varepsilon_2-\varepsilon_1\omega_2. \end{aligned}\right.$$

Faisons la soustraction (13), (14) ; nous aurons évidemment pour résultat une fonction symétrique semblable et, avec cela, le nombre des lignes sera diminué de deux unités. Ainsi nous avons pour reste

$$\begin{aligned} &\mathfrak{A}^{10}_{24}L^{5}_{34}+\mathfrak{A}^{12}_{34}L^{10}_{42}+\mathfrak{A}^{12}_{34}L^{11}_{34}+\mathfrak{A}^{11}_{34}L^{12}_{43}\\ &\quad=(\mathfrak{A}^{10}_{24}L^{5}_{34}-\mathfrak{A}^{5}_{34}L^{10}_{24})+(\mathfrak{A}^{12}_{34}L^{11}_{34}-\mathfrak{A}^{11}_{34}L^{12}_{34}). \end{aligned}$$

Nous avons, par conséquent, la relation entre les périodes dans la forme suivante :

$$(15)\quad \left\{\begin{aligned} &[(\mathfrak{A}^{1}_{12}+\mathfrak{A}^{5}_{43}+\mathfrak{A}^{10}_{24}+\mathfrak{A}^{11}_{43}+\mathfrak{A}^{12}_{34})\\ &\quad\times(L^{2}_{23}+L^{5}_{34}+L^{10}_{42})-(\mathfrak{A}^{2}_{23}+\mathfrak{A}^{5}_{34}+\mathfrak{A}^{10}_{42})\\ &\quad\times(L^{1}_{12}+L^{5}_{43}+L^{10}_{24}+L^{11}_{43}+L^{12}_{34})]\\ &\quad+[\mathfrak{A}^{10}_{24}L^{5}_{34}-\mathfrak{A}^{5}_{34}L^{10}_{24}]+[\mathfrak{A}^{12}_{34}L^{11}_{34}-\mathfrak{A}^{11}_{34}L^{12}_{34}]=0. \end{aligned}\right.$$

Les périodes normales sont

$$\begin{aligned} \omega_1&=\mathfrak{A}^{1}_{12}+\mathfrak{A}^{5}_{43}+\mathfrak{A}^{10}_{24}+\mathfrak{A}^{11}_{43}+\mathfrak{A}^{12}_{34},\\ \omega_2&=\mathfrak{A}^{2}_{23}+\mathfrak{A}^{5}_{34}+\mathfrak{A}^{10}_{42},\\ \omega_3&=\mathfrak{A}^{10}_{24},\\ \omega_4&=\mathfrak{A}^{5}_{34},\\ \omega_5&=\mathfrak{A}^{12}_{34},\\ \omega_6&=\mathfrak{A}^{11}_{34};\\ \varepsilon_1&=L^{1}_{12}+L^{5}_{43}L^{10}_{24}+L^{11}_{43}+L^{12}_{34},\\ \varepsilon_2&=L^{2}_{23}+L^{5}_{34}+L^{10}_{42},\\ \varepsilon_3&=L^{10}_{24},\\ \varepsilon_4&=L^{5}_{34},\\ \varepsilon_5&=L^{12}_{34},\\ \varepsilon_6&=L^{11}_{34}. \end{aligned}$$

Il est facile de prouver que chacune des périodes (13) s'exprimera par une fonction entière et linéaire des

périodes normales avec les coefficients ± 1. Nous avons évidemment

$$\mathcal{A}^{1}_{12}+\mathcal{A}^{5}_{43}+\mathfrak{A}^{10}_{24}+\mathcal{A}^{11}_{43}+\mathcal{A}^{12}_{34}=\omega_1,$$
$$\mathcal{A}^{2}_{23}+\mathfrak{A}^{5}_{34}+\mathcal{A}^{10}_{42}=\omega_2,$$
$$\mathfrak{A}^{1}_{12}+\mathcal{A}^{2}_{23}+\mathcal{A}^{10}_{24}+\mathcal{A}^{11}_{43}+\mathcal{A}^{12}_{34}=\omega_1+\omega_2+\omega_3,$$
$$\mathcal{A}^{1}_{12}+\mathfrak{A}^{2}_{23}+\mathfrak{A}^{5}_{34}+\mathcal{A}^{11}_{43}+\mathcal{A}^{12}_{34}=\omega_1+\omega_2+\omega_4,$$
$$\mathcal{A}^{2}_{23}+\mathcal{A}^{5}_{34}+\mathcal{A}^{10}_{42}+\mathcal{A}^{12}_{34}=\omega_2+\omega_5,$$
$$\mathcal{A}^{2}_{23}+\mathcal{A}^{5}_{34}+\mathcal{A}^{10}_{42}+\mathfrak{A}^{11}_{34}=\omega_2+\omega_6.$$

On peut former aussi les périodes normales par d'autres moyens. Par exemple, posons

$$\begin{aligned}&(\mathcal{A}^{2}_{23}+\mathcal{A}^{5}_{34}+\mathcal{A}^{10}_{42}+\mathfrak{A}^{12}_{34})(L^{2}_{23}+L^{5}_{34}+L^{10}_{42}+L^{11}_{34})\\&\quad-(\mathcal{A}^{2}_{23}+\mathcal{A}^{5}_{34}+\mathcal{A}^{10}_{42}+\mathcal{A}^{11}_{34})(L^{2}_{23}+L^{5}_{34}+L^{10}_{42}+L^{12}_{34})\\&=\omega_1\varepsilon_2-\varepsilon_1\omega_2.\end{aligned}$$

En faisant la soustraction de ce binôme de (13), nous aurons à la place de six lignes seulement quatre :

$$(16)\qquad\left\{\begin{aligned}&(\mathfrak{A}^{2}_{23}+\mathcal{A}^{5}_{34}+\mathcal{A}^{10}_{42})L^{1}_{21}\\&+(\mathcal{A}^{1}_{12}+\mathcal{A}^{5}_{34}+\mathcal{A}^{10}_{24})L^{2}_{23}\\&+(\mathcal{A}^{1}_{12}+\mathcal{A}^{2}_{23}+\mathcal{A}^{5}_{34})L^{10}_{42}\\&+(\mathfrak{A}^{1}_{12}+\mathcal{A}^{2}_{23}+\mathcal{A}^{10}_{24})L^{5}_{34}.\end{aligned}\right.$$

Posons

$$\begin{aligned}&(\mathfrak{A}^{1}_{12}+\mathfrak{A}^{5}_{43}+\mathcal{A}^{10}_{24})(L^{2}_{23}+L^{5}_{34}+L^{10}_{42})\\&\quad-(\mathcal{A}^{2}_{23}+\mathcal{A}^{5}_{34}+\mathcal{A}^{10}_{42})(L^{1}_{12}+L^{5}_{43}+L^{10}_{24})=\omega_3\varepsilon_4-\varepsilon_3\omega_4.\end{aligned}$$

En faisant la soustraction de ce binôme de (16), nous aurons

$$\mathcal{A}^{5}_{34}L^{10}_{42}-\mathcal{A}^{10}_{42}L^{5}_{34}=\omega_5\varepsilon_6-\varepsilon_5\omega_6.$$

Par conséquent

$$\omega_1=\mathcal{A}^{2}_{23}+\mathcal{A}^{5}_{34}+\mathcal{A}^{10}_{42}+\mathcal{A}^{12}_{34},$$
$$\omega_2=\mathcal{A}^{2}_{23}+\mathcal{A}^{5}_{34}+\mathcal{A}^{10}_{42}+\mathcal{A}^{11}_{34},$$
$$\omega_3=\mathfrak{A}^{1}_{12}+\mathcal{A}^{5}_{43}+\mathcal{A}^{10}_{24},$$
$$\omega_4=\mathcal{A}^{2}_{23}+\mathcal{A}^{5}_{34}+\mathcal{A}^{10}_{42},$$
$$\omega_5=\mathfrak{A}^{5}_{34};$$
$$\omega_6=\mathfrak{A}^{10}_{42}.$$

Les périodes (13) s'exprimeront au moyen des périodes normales, de la manière suivante :

$$\mathfrak{A}^{2}_{23}+\mathfrak{A}^{5}_{34}+\mathfrak{A}^{10}_{42}=\omega_4,$$
$$\mathfrak{A}^{1}_{12}+\mathfrak{A}^{5}_{43}+\mathfrak{A}^{10}_{24}+\mathfrak{A}^{11}_{43}+\mathfrak{A}^{12}_{34}=-\omega_1+\omega_2+\omega_3,$$
$$\mathfrak{A}^{1}_{12}+\mathfrak{A}^{2}_{23}+\mathfrak{A}^{10}_{24}+\mathfrak{A}^{11}_{43}+\mathfrak{A}^{12}_{34}=\omega_1-\omega_2+\omega_3+\omega_4-\omega_6,$$
$$\mathfrak{A}^{1}_{12}+\mathfrak{A}^{2}_{23}+\mathfrak{A}^{5}_{34}+\mathfrak{A}^{11}_{43}+\mathfrak{A}^{12}_{34}=\omega_1-\omega_2+\omega_3+\omega_4+\omega_5,$$
$$\mathfrak{A}^{2}_{23}+\mathfrak{A}^{5}_{34}+\mathfrak{A}^{10}_{42}+\mathfrak{A}^{12}_{34}=\omega_1,$$
$$\mathfrak{A}^{2}_{23}+\mathfrak{A}^{5}_{34}+\mathfrak{A}^{10}_{42}+\mathfrak{A}^{11}_{34}=\omega_2.$$

La propriété des périodes obtenues à l'intégration immédiate de s'exprimer par une fonction entière et linéaire des périodes normales avec les coefficients ± 1 peut être prouvée, en général, de la manière suivante. Effectivement, après l'intégration, nous aurons une relation entre les périodes à laquelle nous pouvons donner la forme suivante :

$$(17)\quad \left\{\begin{aligned} &(a^1_1+a^1_2+a^1_3+\ldots+a^1_{i_1})\,b^1\\ &+(a^2_1+a^2_2+a^2_3+\ldots+a^2_{i_2})\,b^2\\ &+(a^3_1+a^3_2+a^3_3+\ldots+a^3_{i_3})\,b^3\\ &+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &+(a^{2p}_1+a^{2p}_2+a^{2p}_3+\ldots+a^{2p}_{i_{2p}})\,b^{2p}=0,\end{aligned}\right.$$

où les lettres a et b marquent les périodes des intégrales qui contiennent des cycles simples. Pour former la première paire des périodes normales, on prend deux lignes quelconques du (17); soit

$$a^1_1+a^1_2+a^1_3+\ldots+a^1_{i_1}=\omega_1,$$
$$a^2_1+a^2_2+a^2_3+\ldots+a^2_{i_2}=\omega_2.$$

En retranchant de (17) le binôme

$$\omega_1\varepsilon_2-\varepsilon_1\omega_2$$

et en désignant, en général, par α^k_i le nombre égal à

zéro ou à ± 1, nous aurons

$$
(18)\quad \left\{
\begin{aligned}
&(a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + \ldots + a_{i_3}^3 + \alpha_1^3\,\omega_1 + \alpha_2^3\,\omega_2)\,b^3 \\
&+ (a_1^4 + a_2^4 + a_3^4 + \ldots + a_{i_4}^4 + \alpha_1^4\,\omega_1 + \alpha_2^4\,\omega_2)\,b^4 \\
&+ (a_1^5 + a_2^5 + a_3^5 + \ldots + a_{i_5}^5 + \alpha_1^5\,\omega_1 + \alpha_2^5\,\omega_2)\,b^5 \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ (a_1^{2p} + a_2^{2p} + a_3^{2p} + \ldots + a_{i_{2p}}^{2p} + \alpha_1^{2p}\,\omega_1 + \alpha_2^{2p}\,\omega_2)\,b^{2p}.
\end{aligned}
\right.
$$

Posons que, pour la formation de la seconde paire des périodes normales, on prend

$$
\begin{aligned}
&a_1^3 + a_2^3 + \ldots + a_{i_3}^3 + \alpha_1^3\,\omega_1 + \alpha_2^3\,\omega_2 = \omega_3, \\
&a_1^4 + a_2^4 + \ldots + a_{i_4}^4 + \alpha_1^4\,\omega_1 + \alpha_2^4\,\omega_2 = \omega_4\,;
\end{aligned}
$$

en retranchant de (18) le binôme

$$
\omega_3\,\varepsilon_4 - \varepsilon_3\,\omega_4,
$$

nous aurons pour reste

$$
\begin{aligned}
&(a_1^5 + a_2^5 + a_3^5 + \ldots + a_{i_5}^5 + \alpha_1^3\,\omega_1 + \alpha_2^3\,\omega_2 + \alpha_3^3\,\omega_3)\,b^5 \\
&+ (a_1^6 + a_2^6 + a_3^6 + \ldots + a_{i_6}^6 + \alpha_1^4\,\omega_1 + \alpha_2^4\,\omega_2 + \alpha_3^4\,\omega_3)\,b^6 \\
&+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ (a_1^{2p} + a_2^{2p} + a_3^{2p} + \ldots + a_{i_{2p}}^{2p} + \alpha_1^{2p}\,\omega_1 + \alpha_3^{2p}\,\omega_2 + \alpha_2^{2p}\,\omega_3)\,b^{2p}.
\end{aligned}
$$

En continuant cette transformation nous aurons définitivement

$$
\begin{aligned}
\Omega_1 &= \omega_1, \\
\Omega_2 &= \omega_2, \\
\Omega_3 &= -\alpha_1^3\,\omega_1 - \alpha_2^3\,\omega_2 + \omega_3, \\
\Omega_4 &= -\alpha_1^4\,\omega_1 - \alpha_2^4\,\omega_2 + \omega_4, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\Omega_{2p} &= -\alpha_1^{2p}\,\omega_1 - \alpha_2^{2p}\,\omega_2 - \ldots + \omega_{2p}.
\end{aligned}
$$

SUR LES FORMES QUADRATIQUES ET SUR L'ÉQUATION DITE EN s;

PAR M. H. LAURENT.

Les méthodes connues pour la discussion de la fameuse équation en s, que l'on rencontre dans une foule de théories et, en particulier, dans celle des plans principaux des quadriques, ont l'inconvénient d'être trop particulières ou de s'appuyer sur des identités déduites de la théorie de la multiplication des déterminants, qui n'est pas exigée par les programmes officiels. Voici une nouvelle démonstration très générale et qui ne présente pas ces inconvénients; elle est d'ailleurs fort simple, comme on va le voir.

Soit $a_{ij} = a_{ji}$. Il s'agit de trouver la condition nécessaire et suffisante pour que la résultante en s,

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} a_{11}-s & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-s & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-s \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{ou} \qquad S = 0,$$

des équations

$$(2)\qquad \begin{cases} (a_{11}-s)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-s)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn}-s)x_n = 0, \end{cases}$$

ait une racine double, triple, etc.

Rien n'empêche de supposer que la première des équations (2) est précisément l'équation $S = 0$ elle-même; il suffit de supposer que $x_1, x_2, \dots, x_n$ y sont remplacés par leurs valeurs, tirées des autres équa-

tions (2), auxquelles on peut adjoindre

$$(2) \qquad x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 0$$

(bien que cela ne soit pas nécessaire, la démonstration se faisant aussi bien en supposant $x_n = 1$). En égalant alors à zéro la dérivée du premier membre de la première formule (2) prise par rapport à s, on aura la condition pour que $S = 0$ ait une racine double; en prenant cette dérivée, on introduira les quantités $\frac{dx_i}{ds}$ qui devront être éliminées en faisant usage des autres formules (2) également différentiées; ainsi l'équation $\frac{dS}{ds} = 0$ sera la résultante des équations

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} (a_1 - s)\frac{dx_1}{ds} + a_{12}\frac{dx_2}{ds} + \ldots + a_{1n}\frac{dx_n}{ds} - x_1 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n1}\frac{dx_1}{ds} + a_{n2}\frac{dx_2}{ds} + \ldots + (a_{nn} - s_n)\frac{dx_n}{ds} - x_n = 0, \\ \qquad x_1\frac{dx_1}{ds} + x_2\frac{dx_2}{ds} + \ldots + x_n\frac{dx_n}{ds} = 0, \end{array} \right.$$

provenant de l'élimination des dérivées $\frac{dx_i}{ds}$, et aussi des quantités x_i à l'aide du système (2). Or, si l'on multiplie la première des équations (3) par $\frac{\partial S}{\partial a_{11}}$, la seconde par $\frac{\partial S}{\partial a_{21}}, \ldots$, la $n^{\text{ième}}$ par $\frac{\partial S}{\partial a_{n1}}$ et si on les ajoute, on trouve, en observant que $S = 0$,

$$x_1\frac{\partial S}{\partial a_{11}} + x_2\frac{\partial S}{\partial a_{21}} + \ldots + x_n\frac{\partial S}{\partial a_{n1}} = 0;$$

mais $x_1, x_2, \ldots$, en vertu de (2), sont proportionnels à $\frac{\partial S}{\partial a_{11}}, \frac{\partial S}{\partial a_{12}} = \frac{\partial S}{\partial a_{21}} = \ldots$, donc

$$\left(\frac{\partial S}{\partial a_{11}}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial a_{21}}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial S}{\partial a_{n1}}\right)^2 = 0.$$

Telle est la forme que l'on peut donner à l'équation $\frac{\partial S}{\partial s} = 0$; en la combinant avec $S = 0$, cela exige que tous les mineurs de S soient nuls, si les a_{ij} sont réels.

Cherchons la condition pour que $S = 0$ ait une racine triple; des considérations analogues nous conduisent à différentier les formules (3) et l'on a

$$(a_{11} - s)\frac{d^2 x}{ds^2} + \ldots + a_{1n}\frac{d^2 x_n}{ds^2} - 2\frac{dx_1}{ds} = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

En multipliant la seconde par $\frac{\partial_2 S}{\partial a_{11}\partial a_{12}}$, la suivante par $\frac{\partial^2 S}{\partial a_{11}\partial a_{13}}$, ... et en les ajoutant, on a

$$\frac{dx_2}{ds}\frac{\partial^2 S}{\partial a_{11}\partial a_{22}} + \frac{dx_3}{ds}\frac{\partial^2 S}{\partial a_{11}\partial a_{23}} + \ldots = 0;$$

mais $\frac{dx_2}{ds}, \frac{dx_3}{ds}, \ldots$ étant proportionnels à leurs coefficients, on a encore

$$\frac{\partial_2 S}{\partial a_{11}\partial a_{22}} = 0, \qquad \frac{\partial_2 S}{\partial a_{11}\partial a_{23}} = 0, \qquad \ldots,$$

et ainsi de suite.

L'esprit de cette méthode s'applique encore dans une foule d'autres circonstances : par exemple, dans la théorie des intersections des coniques et des quadriques. Pour ne pas trop allonger cet article, nous considérerons seulement les applications aux quadriques.

Soient $f = 0$, $g = 0$ les équations de deux quadriques, f et g désignant des fonctions de x, y, z, t homogènes. Nous ferons

$$f_1 = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad f_2 = \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad \ldots,$$

$$f_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \qquad f_{12} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \qquad \ldots.$$

Cherchons un point x, y, z, t ayant même plan polaire par rapport aux deux quadriques, il sera déterminé par les équations

$$\frac{f_1}{g_1} = \frac{f_2}{g_2} = \frac{f_3}{g_3} = \frac{f_4}{g_4},$$

ou, en égalant ces rapports à $-s$,

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{ll} f_1 + g_1 s = 0, & f_2 + g_2 s = 0, \\ f_3 + g_3 s = 0, & f_4 + g_4 s = 0. \end{array}\right.$$

Si l'on élimine x, y, z, t entre ces formules, on obtient une équation du quatrième degré en s

$$S = 0,$$

qui, en général, aura quatre racines distinctes, à chacune desquelles correspondra un point x, y, z, t donné par les formules (4); tout cela est bien connu.

1° *Je dis que si l'équation* $S = 0$ *a une racine double, les surfaces* $f = 0$, $g = 0$ *sont tangentes.* En effet, l'équation $S = 0$ peut être considérée comme étant la première des équations (1), où x, y, z sont remplacés par leurs valeurs tirées des autres formules (1). En différentiant ces équations, on aura

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} (f_{11} + g_{11} s)\dfrac{dx}{ds} + (f_{12} + g_{12} s)\dfrac{dy}{ds} + (f_{13} + g_{13} s)\dfrac{dz}{ds} + g_1 = 0, \\ (f_{21} + g_{21} s)\dfrac{dx}{ds} + (f_{22} + g_{22} s)\dfrac{dy}{ds} + (f_{23} + g_{23} s)\dfrac{dz}{ds} + g_2 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (f_{41} + g_{41} s)\dfrac{dx}{ds} + (f_{42} + g_{42} s)\dfrac{dy}{ds} + (f_{43} + g_{43} s)\dfrac{dz}{ds} + g_4 = 0. \end{array}\right.$$

On en tire

$$\left|\begin{array}{cccc} f_{11} + g_{11} s & f_{12} + g_{12} s & f_{13} + g_{13} s & g_1 \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots \\ f_{41} + g_{41} s & f_{42} + g_{42} s & f_{43} + g_{43} s & g_4 \end{array}\right| = 0;$$

ajoutant les lignes avec la dernière après les avoir multipliées par x, y, z, t, on a, en vertu de (1) et du théorème des fonctions homogènes,

$$\begin{vmatrix} f_{11}+g_{11}s & f_{12}+g_{12}s & f_{13}+g_{13}s & g_1 \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & g \end{vmatrix} = 0,$$

d'où l'on conclut $g = 0$ et, par suite, en vertu de (1), $f = 0$. Les surfaces $g = 0$, $f = 0$ en leur point commun x, y, z sont donc tangentes.

2° Cette démonstration est en défaut quand les mineurs de S sont nuls, car le multiplicateur de g, dans la formule précédente, est nul. Mais alors les formules (1) se réduisent à deux distinctes; il y a une infinité de pôles x, y, z en ligne droite répondant à la racine double; la droite de ces points rencontre $f = 0$ en deux points où l'on a aussi $g = 0$: les surfaces $f = 0$, $g = 0$ sont alors bitangentes; elles se coupent d'ailleurs suivant deux courbes planes, puisque $f + \lambda g = 0$ représente alors deux plans.

3° Si tous les mineurs de second ordre de S étaient nuls, un raisonnement analogue prouverait que $S = 0$ a une racine triple et que les pôles correspondants x, y, z seraient dans un plan; les deux surfaces $f = 0$, $g = 0$ circonscrites l'une à l'autre se toucheraient suivant une courbe plane.

NOTE SUR UN DÉVELOPPEMENT DES QUANTITÉS NUMÉRIQUES, QUI PRÉSENTE QUELQUE ANALOGIE AVEC CELUI EN FRACTIONS CONTINUES;

PAR M. E. CAHEN,
Professeur au lycée de Rennes.

1. Soit une quantité numérique x, en appelant a_1 sa partie entière

$$x = a_1 + \frac{1}{x_0},$$

x_0 étant < 1.

Soit u_0 la partie entière de x_0,

$$u_0 < x_0 < u_0 + 1,$$

$\frac{1}{u_0}$ est une valeur approchée de $\frac{1}{x_0}$ par excès, à moins de

$$\frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_0 + 1} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{u_0(u_0 + 1)}.$$

On peut donc poser

$$x = a_1 + \frac{1}{u_0} - \frac{1}{x_1},$$

$$\frac{1}{x_0} < \frac{1}{u_0(u_0 + 1)} \quad a \ fortiori \quad < 1.$$

En appelant u_1 la partie entière de x, on peut écrire de même

$$x = a_1 + \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_1} + \frac{1}{x_2},$$

et ainsi de suite.

Finalement

$$(1) \qquad x = a_1 + \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} - \ldots \pm \frac{1}{u_n} \mp \ldots$$

et l'erreur commise, quand on s'arrête au terme $\frac{1}{u_n}$, est du signe de u_n et plus petite en valeur absolue que

$$\frac{1}{u_n(u_n+1)}.$$

2. On peut développer x par une série analogue d'une façon un peu différente.

Soit a_1 la partie entière de x

$$x = a_1 + \frac{1}{x_0}.$$

Soit $U_0 - 1$ la partie entière de x_0. $\frac{1}{U_0}$ est une valeur de $\frac{1}{x_0}$ approchée par *défaut* à moins de $\frac{1}{U_0-1} - \frac{1}{U_0}$ ou $\frac{1}{U_0(U_0-1)}$ près.

On peut donc poser

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = a_1 + \dfrac{1}{U_0} + \dfrac{1}{X_1}, \\ \dfrac{1}{X_1} < \dfrac{1}{U_0(U_0-1)} \quad \textit{a fortiori} \quad < 1, \end{array} \right.$$

et ainsi de suite.

Finalement

$$x = a_1 + \frac{1}{U_0} + \frac{1}{U_1} + \frac{1}{U_2} + \ldots + \frac{1}{U_n} + \ldots.$$

L'erreur commise en s'arrêtant au terme $\frac{1}{U_n}$ est positive et inférieure à

$$\frac{1}{U_n(U_n-1)}.$$

3. Le développement en séries de cette nature n'est évidemment possible que d'une seule manière. Si x est incommensurable, le développement est évidemment illimité. Je dis que, si x est commensurable, le dévelop-

pement est limité. Considérons, par exemple, le développement en série (1).

Je peux supposer $x < 1$ pour ne pas embarrasser les calculs du terme irrégulier a_1.

Soit alors

$$x = \frac{A}{B},$$

A, B étant entiers :

$$\frac{A}{B} = \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} - \dots$$

Considérons

$$\frac{A}{B} - \frac{1}{u_0} = -\frac{(B - Au_0)}{Bu_0} = -\frac{A_0}{B_0},$$

en posant

$$A_0 = B - Au_0,$$
$$B_0 = Bu_0;$$

$$\frac{A}{B} - \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} = -\frac{A_0}{B_0} + \frac{1}{u_1} = \frac{B_0 - A_0 u_1}{B_0 u_1} = \frac{A_1}{B_1},$$

en posant

$$A_1 = B_0 - A_0 u_1,$$
$$B_1 = B_0 u_1.$$

D'une façon générale,

$$\frac{A}{B_0} - \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} - \dots \pm \frac{1}{u_p} = \frac{A_p}{B_p},$$
$$A_p = B_{p-1} - A_{p-1} u_p,$$
$$B_p = B_{p-1} u_p.$$

Je dis que les nombres entiers A_p vont en décroissant, c'est-à-dire que

$$B_p - A_p u_{p+1} < A_p$$

ou

$$\frac{A_p}{B_p} > \frac{1}{u_{p+1} + 1}.$$

Or c'est ce qui résulte de la façon même dont la série a

été formée. On a déterminé u_{p+1}, justement par la condition

$$\frac{1}{u_{p+1}} > \frac{A_p}{B_p} > \frac{1}{u_{p+1}+1}.$$

Les nombres entiers et positifs,

$$A_0, \quad A_1, \quad \ldots, \quad A_p,$$

allant en décroissant, l'un d'eux est forcément nul et la série est limitée.

Exemple :

$$\frac{355}{113} = 3 + \frac{1}{7} - \frac{1}{791}.$$

4. Pour qu'une série

$$a_1 + \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} - \ldots$$

soit une série de la forme (1), il faut et il suffit que, pour toute valeur de n,

$$\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n-1}} + \frac{1}{u_{n-2}} - \ldots < \frac{1}{u_{n-1}(u_{n-1}+1)}.$$

Si, en effet, cette condition est remplie, on voit facilement qu'en développant la quantité

$$x = a_1 + \frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_1} + \ldots$$

en série (1), on retrouve justement ce développement.

De même pour une série

$$a_1 + \frac{1}{U_0} + \frac{1}{U_1} + \ldots,$$

la condition est que

$$\frac{1}{U_n} + \frac{1}{U_{n+1}} + \ldots < \frac{1}{U_{n-1}(U_{n-1}-1)}.$$

Conséquence. — *Si, dans une série illimitée de la*

forme

$$\frac{1}{u_0} - \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} - \ldots,$$

on a, pour toute valeur de n, ou tout au moins à partir d'une certaine valeur de n, constamment

$$\frac{1}{u_n(u_n+1)} > \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_{n+2}} + \ldots,$$

la série a pour somme un nombre incommensurable.

En particulier, cette condition est remplie si

$$\frac{1}{u_n(u_n+1)} > \frac{1}{u_{n+1}}$$

ou

$$\frac{1}{u_n(u_n+1)} > \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_{n+2}} + \frac{1}{u_{n+3}}, \qquad \ldots,$$

ce qui donne des caractères permettant de reconnaître si la somme d'une série est un nombre incommensurable.

On aurait un théorème analogue pour la série

$$\frac{1}{U_0} + \frac{1}{U_1} + \frac{1}{U_2} + \ldots.$$

Une telle série représente un nombre incommensurable, si l'on a constamment

$$\frac{1}{U_n(U_n-1)} > \frac{1}{U_{n+1}} + \frac{1}{U_{n+2}} + \ldots.$$

Exemple. — Soit

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{42} + \frac{1}{1806} - \frac{1}{3263442} + \ldots,$$

chaque dénominateur est égal au précédent multiplié par lui-même plus un.

On a donc ici

$$\frac{1}{u_n(u_n+1)} = \frac{1}{u_{n+1}}$$

et, par conséquent,

$$\frac{1}{u_n(u_n+1)} > \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_{n+2}} + \frac{1}{u_{n+3}} - \cdots.$$

Donc la série a pour somme un nombre incommensurable.

Autre exemple. — La série dont le terme général est

$$\frac{1}{a^{1.2.3\ldots n}},$$

a étant > 1.

On voit facilement que la somme de cette série est incommensurable.

D'ailleurs Liouville a montré que cette somme n'est pas non plus un nombre algébrique.

5. On peut généraliser le résultat précédent, en considérant des séries de la forme

$$\frac{v_0}{u_0} - \frac{v_1}{u_1} + \frac{v_2}{u_2} - \cdots$$

ou

$$\frac{v_0}{u_0} + \frac{v_1}{u_1} + \frac{v_2}{u_2} + \cdots,$$

$u_0, u_1, \ldots, v_0, v_1, \ldots$ étant des nombres entiers.

On démontrera sans peine que la somme de la première est un nombre incommensurable, si l'on a constamment

$$\frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} - \frac{v_{n+2}}{u_{n+2}} + \cdots < \frac{v_n}{u_n(u_{n+1})}.$$

En particulier, cette condition est remplie si

$$\frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} < \frac{v_n}{u_n(u_n+1)},$$

ou si

$$\frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} - \frac{v_{n+2}}{u_{n+2}} + \frac{v_{n+3}}{u_{n+3}} < \frac{v_n}{u_n(u_n+1)}, \qquad \cdots.$$

La somme de la seconde série est un nombre incom-

mensurable, si

$$\frac{v_{n+1}}{u_{n+1}} + \frac{v_{n+2}}{u_{n+2}} + \ldots < \frac{v_n}{u_n(u_n - 1)}, \qquad \ldots.$$

CONCOURS D'ADMISSION A L'ÉCOLE CENTRALE EN 1891 (SECONDE SESSION).

Géométrie analytique.

On donne deux axes rectangulaires et un cercle C passant par l'origine et dont le centre a pour coordonnées $x = -\frac{a}{2}$, $y = -\frac{b}{2}$. Dans ce cercle on mène deux cordes de longueur d, passant par l'origine. D'un point de l'axe des x, dont l'abscisse est p, on mène des droites perpendiculaires à ces cordes. Cela étant :

1° On demande l'équation Δ du lieu des points tels que le produit de leurs distances aux cordes soit dans un rapport donné λ avec le produit de leurs distances aux droites perpendiculaires à ces cordes et le lieu des centres des coniques représentées par l'équation Δ lorsque λ varie;

2° On discutera la nature des coniques représentées par l'équation Δ;

3° Le rapport λ étant choisi de façon que la conique Δ devienne un cercle, on demande de trouver le lieu du centre de ce cercle lorsque le centre du cercle C décrit l'hyperbole $x^2 + nxy = \frac{d^2}{4}$.

Physique.

1° Un récipient de capacité invariable renferme 1^{kg} d'air sec à $0°$; cet air s'y trouve sous la pression de $0^m,760$ de mercure.

On y refoule $2^{kg},313$ de gaz oxygène sec et $7^{kg},687$ de gaz azote sec, puis on élève à $100°$ la température du récipient.

On demande la pression finale dans cet appareil, connaissant :

Le poids de 1^{lit} d'air à $0°$ et $0^m,760$.....	$\overset{gr}{1},293$
La densité de l'oxygène	1,1056
La densité de l'azote	0,972
Le coefficient de dilatation des gaz	0,00367

2° Énoncer très sommairement les principes du fonctionnement de la machine électrique à plateau de verre dite *machine de Ramsden.*

Chimie.

Les hydracides; leurs préparations. Comment établit-on, par analyse, leur composition?

Calcul trigonométrique.

Soient

a, b, c les côtés d'un triangle;
R le rayon du cercle circonscrit;
α, β, γ les hauteurs qui correspondent aux côtés a, b, c.

On donne les rapports $\frac{a}{R} = 1,543678$, $\frac{b}{R} = 1,254376$, et on demande de calculer les rapports $\frac{c}{R}$, $\frac{\alpha}{a}$, $\frac{\beta}{b}$, $\frac{\gamma}{c}$, en supposant l'angle A aigu.

Épure.

On donne deux cônes de révolution. Les deux axes (oz, $o'z'$) et (ωt, $\omega' t'$) sont de front, inclinés à 45° sur le plan horizontal et perpendiculaires entre eux. Le plan de front qui les contient est à $0^m,11$ en avant du plan vertical. La cote du sommet (o, o') est de $0^m,11$; celle du sommet (ω, ω') est de $0^m,08$; la distance $o\omega$ est de $0^m,06$; le milieu de $o\omega$ est à égale distance des grands côtés du cadre; le demi-angle au sommet de chacun des cônes est de 45°.

On demande de représenter par ses projections, ses contours apparents et leur ligne d'intersection, l'ensemble des deux cônes terminés d'une part au plan horizontal de projection et d'autre part au plan horizontal dont la cote est $0^m,17$.

On n'indiquera à l'encre rouge que les constructions nécessaires pour déterminer un point quelconque de l'intersection des deux cônes et la tangente en ce point, un point quelconque de chacune des sections planes qui limitent les cônes et les tangentes en ces points.

Placer la ligne de terre parallèlement aux petits côtés du cadre à $0^m,24$ du petit côté inférieur.

Titre extérieur. — Intersection de cônes.
Titre intérieur. — Assemblage de cônes.

Ce titre, en lettres dessinées, est de rigueur. Le cadre a $0^m,45$ sur $0^m,27$.

On exposera succinctement, sur une feuille à part, le procédé suivi pour chacune des déterminations précédentes.

NOTE SUR LE PROBLÈME DE MÉCANIQUE PROPOSÉ AU CONCOURS D'AGRÉGATION EN 1891;

EXTRAIT D'UNE LETTRE DE M. DE SAINT-GERMAIN A M. ROUCHÉ.

Je vais encore brièvement indiquer cette année, pour quelques lecteurs des *Nouvelles Annales*, une solution du problème de Mécanique qui a été proposé aux candidats à l'Agrégation des Sciences mathématiques.

On supposait qu'un trièdre trirectangle OXYZ, tournant avec une vitesse constante ω autour de l'arête OZ, dirigée en sens contraire de la pesanteur, entraîne avec lui le paraboloïde P, défini par l'équation

$$(1) \qquad x^2 - y^2 = 2pz.$$

Un point M, de masse 1, de poids g, assujetti à se mouvoir sur la surface de P, est attiré vers le sommet O par une force égale à $\frac{2g}{p}$ OM; en outre, MA, MB étant les perpendiculaires abaissées de M sur les génératrices

de P qui passent en O, M est sollicité par deux forces, respectivement dirigées suivant les *segments* AM, BM et égales à $\frac{3g}{p}$ AM, $\frac{3g}{p}$ BM. La position du point M est définie par les paramètres λ, μ qui figurent dans les équations

$$(2) \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{\lambda - p} + \dfrac{y^2}{\lambda + p} = \lambda - 2z, \\ \dfrac{x^2}{\mu + p} + \dfrac{y^2}{\mu - p} = \mu + 2z \end{cases}$$

des paraboloïdes homofocaux à P et passant en M. Cela posé, on demandait :

1° De former l'équation de Jacobi dont il suffirait de connaître une intégrale complète pour en déduire, par des différentiations, les équations du mouvement du point M;

2° De trouver cette intégrale complète et les équations du mouvement quand on suppose $\omega = 0$;

3° D'intégrer l'équation de la trajectoire et d'indiquer la forme de cette ligne quand, ω étant toujours nul, on a, pour $t = 0$,

$$x = y = p\sqrt{\frac{3}{2}},$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{3 + 3\sqrt{3}}{8}\sqrt{pg},$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{9 + \sqrt{3}}{8}\sqrt{pg}.$$

La première partie est une question de cours. Cherchons la demi-force vive T du point M. Soient x, y, z les coordonnées du mobile : sa vitesse, résultante de la vitesse relative et de la vitesse d'entraînement, a pour projections, sur OX, OY, OZ,

$$x' - \omega y, \quad y' + \omega x, \quad z',$$

et l'on a

$$(3)\quad T = \frac{1}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) + \omega(xy' - yx') + \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2).$$

Cherchons encore le travail δU correspondant à un déplacement virtuel du point M compatible avec les liaisons *telles qu'elles existent à l'instant même que nous considérons*, c'est-à-dire à un déplacement arbitraire sur le paraboloïde supposé fixe. Le travail du poids est $-g\,\delta z$, celui de l'attraction dirigée suivant MO, $-\frac{2g}{p}(x\,\delta x + y\,\delta y + z\,\delta z)$; si le point A est sur la génératrice pour laquelle y est égal à x, on trouve aisément que ses coordonnées sont

$$\frac{x+y}{2},\quad \frac{x+y}{2},\quad 0;$$

le travail de la force dirigée suivant AM est donc

$$\frac{3g}{p}\left[\frac{x-y}{2}(\delta x - \delta y) + z\,\delta z\right] = \frac{3g}{2p}\,\delta.\overline{AM}^2;$$

le travail de la force dirigée suivant BM est de même

$$\frac{3g}{p}\left[\frac{x+y}{2}(\delta x + \delta y) + z\,\delta z\right] = \frac{3g}{2p}\,\delta.\overline{BM}^2,$$

et l'on trouve, en ajoutant les travaux de toutes les forces,

$$\delta U = -g\,\delta z + \frac{g}{p}(x\,\delta x + y\,\delta y + 4z\,\delta z).$$

On voit, sans même invoquer la relation qui lie x, y, z, qu'il existe une fonction de forces correspondante [1] :

---

[1] Si l'on cherchait le mouvement relatif de M en introduisant les forces fictives de Coriolis, la valeur de T se simplifierait, mais

nous pouvons l'écrire

$$(4)\qquad U = -gz + \frac{g}{2p}(x^2 + y^2 + 4z^2).$$

Il faut exprimer U et T en fonction des variables λ, μ. Des équations (1) et (2) on déduit, soit par la méthode de Binet, soit par une résolution directe qui est ici bien simple,

$$(5)\qquad \left\{ \begin{aligned} x^2 &= \frac{(\lambda - p)(\mu + p)}{2}, \\ y^2 &= \frac{(\lambda + p)(\mu - p)}{2}, \\ z^2 &= \frac{\lambda - \mu}{2}. \end{aligned} \right.$$

On trouve alors

$$(6)\qquad \left\{ \begin{aligned} x' &= \frac{(\mu + p)\lambda' + (\lambda - p)\mu'}{2\sqrt{2(\lambda - p)(\mu + p)}}, \\ y' &= \frac{(\mu - p)\lambda' + (\lambda + p)\mu'}{2\sqrt{2(\lambda + p)(\mu - p)}}, \\ z' &= \frac{\lambda' - \mu'}{2}; \end{aligned} \right.$$

$$(7)\qquad x'^2 + y'^2 + z'^2 = \frac{ds^2}{dt^2} = \frac{\lambda(\lambda + \mu)}{4(\lambda^2 - p^2)}\lambda'^2 + \frac{\mu(\lambda + \mu)}{4(\mu^2 - p^2)}\mu'^2.$$

Ces résultats nous conduisent aisément aux valeurs

---

on devrait considérer le travail virtuel de la force centrifuge composée F_2, soit $2\omega(y'\,\delta x - x'\,\delta y)$; la fonction des forces n'existerait plus et on ne saurait former l'équation de Jacobi. Quant à croire que le travail virtuel de F_2 est nul parce que son travail réel le serait, c'est une grave erreur.

cherchées de U et de T,

$$(8)\qquad U = -g\frac{\lambda-\mu}{2} + \frac{g}{2p}(\lambda^2 - \lambda\mu + \mu^2 - p^2),$$

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} T = {} & \frac{\lambda(\lambda+\mu)}{8(\lambda^2-p^2)}\lambda'^2 + \frac{\mu(\lambda+\mu)}{8(\mu^2-p^2)}\mu'^2 \\ & + \frac{p\omega}{2}\sqrt{(\lambda^2-p^2)(\mu^2-p^2)}\left(\frac{\mu'}{\mu^2-p^2} - \frac{\lambda'}{\lambda^2-p^2}\right) \\ & + \frac{1}{2}\omega^2(\lambda\mu - p^2), \end{aligned}\right.$$

le radical ayant le signe du produit xy.

Comme la valeur de T n'est pas homogène par rapport à λ' et μ', nous devrons, pour former la fonction H d'Hamilton et l'équation de Jacobi, exprimer au moyen des variables canoniques la quantité

$$K = \lambda'\frac{\partial T}{\partial \lambda'} + \mu'\frac{\partial T}{\partial \mu'} - T.$$

Il convient d'abord de la simplifier en décomposant T en trois parties, T_0, T_1, T_2; T_0 est la somme des termes indépendants de λ' et μ', T_1 et T_2 sont les sommes des termes du premier et du second degré par rapport aux mêmes variables; le théorème d'Euler sur les fonctions homogènes donne la relation

$$\lambda'\left(\frac{\partial T_0}{\partial\lambda'} + \frac{\partial T_1}{\partial\lambda'} + \frac{\partial T_2}{\partial\lambda'}\right) + \mu'\left(\frac{\partial T_0}{\partial\mu'} + \frac{\partial T_1}{\partial\mu'} + \frac{\partial T_2}{\partial\mu'}\right) = T_1 + 2T_2,$$

$$K = T_2 - T_0,$$

ou, en se reportant à l'équation (9),

$$(10)\quad K = \frac{\lambda(\lambda+\mu)}{8(\lambda^2-p^2)}\lambda'^2 + \frac{\mu(\lambda+\mu)}{8(\mu^2-p^2)}\mu'^2 - \frac{1}{2}\omega^2(\lambda\mu - p^2).$$

Pour introduire les variables canoniques, nous consi-

dérerons l'expression (9) de T et nous poserons

$$(11)\quad \begin{cases} l = \dfrac{\partial T}{\partial \lambda'} = \dfrac{\lambda(\lambda+\mu)}{4(\lambda^2-p^2)}\lambda' - \dfrac{p\omega}{2}\sqrt{\dfrac{\mu^2-p^2}{\lambda^2-p^2}}, \\ m = \dfrac{\partial T}{\partial \mu'} = \dfrac{\mu(\lambda+\mu)}{4(\mu^2-p^2)}\mu' + \dfrac{p\omega}{2}\sqrt{\dfrac{\lambda^2-p^2}{\mu^2-p^2}}. \end{cases}$$

Dans l'équation (10) remplaçons λ' et μ' par leurs valeurs tirées des équations (11) en fonction de l et de m et reportons-nous à l'équation (8) : nous aurons immédiatement la quantité

$$H = K - U,$$

exprimée au moyen des variables λ, μ, l, m,

$$\begin{aligned} H = {} & \frac{2(\lambda^2-p^2)}{\lambda(\lambda+\mu)}\left(l + \frac{p\omega}{2}\sqrt{\frac{\mu^2-p^2}{\lambda^2-p^2}}\right)^2 \\ & + \frac{2(\mu^2-p^2)}{\mu(\lambda+\mu)}\left(m - \frac{p\omega}{2}\sqrt{\frac{\lambda^2-p^2}{\mu^2-p^2}}\right)^2 \\ & - \frac{1}{2}\omega^2(\lambda\mu-p^2) + \frac{1}{2}g(\lambda-\mu) - \frac{g}{2p}(\lambda^2-\lambda\mu+\mu^2-p^2). \end{aligned}$$

Si, dans cette expression, on remplace l, m par $\dfrac{\partial S}{\partial \lambda}$, $\dfrac{\partial S}{\partial \mu}$ et si, ajoutant au résultat obtenu le terme $\dfrac{\partial S}{\partial t}$, on égale la somme à zéro, on obtient une équation aux dérivées partielles propre à déterminer la variable S considérée comme une fonction inconnue de λ, μ, t. Jacobi a démontré qu'il suffirait d'en connaître une intégrale S_1 dépendant de deux constantes arbitraires α_1, α_2, autres que celle qu'on peut introduire par simple addition, pour en déduire les équations du mouvement sous la forme

$$(12)\quad \frac{\partial S_1}{\partial \alpha_1} = \beta_1, \qquad \frac{\partial S_1}{\partial \alpha_2} = \beta_2, \qquad \frac{\partial S_1}{\partial \lambda} = l, \qquad \frac{\partial S_1}{\partial \mu} = m;$$

$S = S_1 + \alpha_3$ est d'ailleurs une intégrale complète de l'équation de Jacobi.

Quand on fait $\omega = 0$, cette équation devient, en multipliant tous les termes par $\frac{\lambda+\mu}{2}$,

$$\frac{\lambda^2-p^2}{\lambda}\left(\frac{\partial S}{\partial\lambda}\right)^2+\frac{\mu^2-p^2}{\mu}\left(\frac{\partial S}{\partial\mu}\right)^2$$
$$+g\,\frac{\lambda^2-\mu^2}{4}-g\,\frac{\lambda^3+\mu^3}{4p}+\frac{\lambda+\mu}{2}\left(\frac{pg}{2}+\frac{\partial S}{\partial t}\right)=0;$$

elle présente une forme qu'on a bien souvent rencontrée dans les applications classiques du théorème de Jacobi, et aucun lecteur ne sera embarrassé pour trouver l'intégrale demandée : si nous posons, pour simplifier l'écriture,

$$\varphi(u) = gu^3 - pgu^2 + p(2h - pg)u + a,$$
$$\psi(u) = gu^3 + pgu^2 + p(2h - pg)u - a,$$

nous aurons

$$S_1 = \frac{1}{2}\int\frac{d\lambda\sqrt{\lambda\,\varphi(\lambda)}}{\sqrt{p(\lambda^2-p^2)}}+\frac{1}{2}\int\frac{d\mu\sqrt{\mu\,\psi(\mu)}}{\sqrt{p(\mu^2-p^2)}}-ht;$$

a et h sont deux constantes qui remplacent α_1 et α_2. L'intégrale des forces vives est vérifiée quand ω est nul et $T - U$ reste égal à h, en adoptant pour U les valeurs (4) et (8). Les formules (12) donnent les équations du mouvement; mais, aux deux premières, on peut substituer les équations suivantes, où λ_0, μ_0 désignent les valeurs de λ, μ pour $t = 0$, 1,

$$(13)\qquad \int_{\lambda_0}^{\lambda}\frac{\sqrt{\lambda}\,d\lambda}{\sqrt{(\lambda^2-p^2)\,\varphi(\lambda)}}=\int_{\mu_0}^{\mu}\frac{\sqrt{\mu}\,d\mu}{\sqrt{(\mu^2-p^2)\,\psi(\mu)}},$$

$$(14)\qquad \frac{2t}{\sqrt{p}}=\int_{\lambda_0}^{\lambda}\frac{\lambda^{\frac{3}{2}}\,d\lambda}{\sqrt{(\lambda^2-p^2)\,\varphi(\lambda)}}+\int_{\mu_0}^{\mu}\frac{\mu^{\frac{3}{2}}\,d\mu}{\sqrt{(\mu^2-p^2)\,\psi(\mu)}};$$

la première est l'équation de la trajectoire, la seconde

donne la loi du mouvement sur cette ligne. Enfin si, dans les deux dernières équations (12), on remplace l, m par leurs valeurs (11), sauf $\omega = 0$, on en pourra déduire

$$(15)\quad \lambda' = \frac{2\sqrt{(\lambda^2 - p^2)\varphi(\lambda)}}{(\lambda+\mu)\sqrt{p\lambda}}, \qquad \mu' = \frac{2\sqrt{(\mu^2 - p^2)\psi(\mu)}}{(\lambda+\mu)\sqrt{p\mu}};$$

les radicaux en λ et μ doivent avoir, à un instant quelconque, des valeurs de mêmes signes que λ' et μ', et ce sont les mêmes déterminations qui doivent figurer dans les équations (13) et (14).

Étudions maintenant la trajectoire dans le cas particulier proposé. A cet effet, nous déterminerons les constantes qui figurent dans son équation, et d'abord λ_0, μ_0. Pour que les intersections des paraboloïdes (1) et (2) soient réelles, il faut et il suffit que λ et μ soient de même signe et, en valeur absolue, au moins égaux à p : nous les prendrons positifs. En ayant égard aux valeurs de x_0, y_0, on voit que z_0 est nul : le point de départ M_0 du mobile est sur la génératrice OA ; les équations (3) donnent d'ailleurs

$$\lambda_0 = \mu_0 = 2p.$$

Nous déterminerons λ'_0, μ'_0 à l'aide des deux premières équations (4) : si l'on y remplace x', y', λ, μ par leurs valeurs initiales, on a

$$-\frac{3+3\sqrt{3}}{8}\sqrt{pg} = \frac{3\lambda'_0 + \mu'_0}{2\sqrt{6}},$$

$$-\frac{9+\sqrt{3}}{8}\sqrt{pg} = \frac{\lambda'_0 + 3\mu'_0}{2\sqrt{6}};$$

d'où l'on tire

$$\lambda'_0 = -\frac{3}{4}\sqrt{2pg}, \qquad \mu'_0 = -\frac{3}{4}\sqrt{6pg}.$$

Les intégrales premières (15) vont nous permettre de calculer facilement h et a : remplaçons $\varphi(\lambda)$ et $\psi(\mu)$ par leurs développements, donnons aux variables leurs valeurs initiales et élevons au carré : nous aurons

$$\frac{9}{8}pg = \frac{3(2gp^3+4p^2h+a)}{8p^2},$$
$$\frac{27}{8}pg = \frac{3(10gp^3+4p^2h-a)}{8p^2};$$

on en déduit

$$h = 0, \qquad a = gp^3.$$

On peut s'assurer directement que h est nul, car U_0 est égal à $\frac{3}{2}pg$, et l'équation (9) montre que telle est aussi la valeur initiale de T : écrivons alors l'équation différentielle de la trajectoire

$$(13\,bis) \qquad \frac{\sqrt{\lambda}\,d\lambda}{\sqrt{(\lambda^2-p^2)\varphi(\lambda)}} = \frac{\sqrt{\mu}\,d\mu}{\sqrt{(\mu^2-p^2)\psi(\mu)}};$$

$d\lambda$, $d\mu$ sont proportionnels à λ', μ' et, en se plaçant à l'instant initial, cette équation permettrait de calculer a. Les valeurs de a et de h donnent les identités

$$\varphi(u) = g(u^2-p^2)(u-p), \qquad \psi(u) = (u^2-p^2)(u+p),$$

et l'équation différentielle de la trajectoire peut s'écrire

$$(16) \qquad \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda-p}}\,\frac{d\lambda}{\lambda^2-p^2} = \pm\sqrt{\frac{\mu}{\mu+p}}\,\frac{d\mu}{\mu^2-p^2}.$$

Sans l'intégrer, on peut en tirer des indications précises sur la forme de la trajectoire : λ, μ partent tous deux de la valeur $2p$ et commencent par décroître, λ'_0, μ'_0 étant négatifs; il faut d'abord prendre le signe + dans le second membre de l'équation (16). Il est clair que μ commence par décroître plus rapidement que λ, parce

que le coefficient de $d\mu$ est d'abord moindre que celui de $d\lambda$; tant que μ décroîtra, il ne pourra être supérieur à λ. Quand μ atteint sa limite inférieure p, l'intégrale du second membre de l'équation (16) croît indéfiniment; il doit en être de même pour l'intégrale du premier membre et il faut pour cela que λ tende en même temps vers sa limite p; l'équation (14) montre que λ et μ n'atteignent leurs limites qu'au bout d'un temps infini. Ainsi μ et λ décroissent en même temps de $2p$ à p, λ restant au moins égal à μ, par conséquent, z au moins égal à zéro; la trajectoire se réduit à un arc fini M_0O situé au-dessus du plan OXY sur la région de la surface de P qui est comprise entre la génératrice OA et le plan ZOX.

Cherchons la tangente en un point quelconque M. L'expression (7) de ds^2 montre qu'entre quatre lignes de courbure correspondant aux paramètres λ et $\lambda + d\lambda$, μ et $\mu + d\mu$, $d\lambda$ et $d\mu$ étant infiniment petits, il existe un petit rectangle dont les côtés sont

$$\sqrt{\frac{\lambda(\lambda+\mu)}{\lambda^2-p^2}}\,\frac{d\lambda}{2},\qquad \sqrt{\frac{\mu(\lambda+\mu)}{\mu^2-p^2}}\,\frac{d\mu}{2};$$

il en résulte, eu égard à l'équation (16), que, si l'on appelle θ l'angle sous lequel la trajectoire coupe en M la ligne $\lambda = \text{const.}$, on a

$$\operatorname{tang}\theta = \sqrt{\frac{\lambda(\mu^2-p^2)}{\mu(\lambda^2-p^2)}}\,\frac{d\lambda}{d\mu} = \frac{\lambda-p}{\mu-p}\sqrt{\frac{\lambda+p}{\mu+p}}.$$

Au point M_0, la trajectoire coupe, sous un angle de 30°, la ligne de courbure $\lambda = 2p$ et, par suite, comme on le voit aisément, sous un angle de 15°, la génératrice M_0O.

Pour étudier la courbe dans le voisinage de l'origine, remplaçons λ, μ par $p+\alpha$, $p+\beta$; si α, β sont extrê-

mement petits, l'équation (16) se réduit sensiblement à

$$\alpha^{-\frac{3}{2}} d\alpha = \frac{d\beta}{\beta\sqrt{2}};$$

d'où l'on tire

$$\log\frac{\beta}{C} = -\sqrt{\frac{8}{\alpha}}, \qquad \beta = Ce^{-\sqrt{\frac{8}{\alpha}}};$$

β est plus petit qu'aucune puissance positive de α; donc, au point O, la trajectoire a un contact d'ordre infini avec la parabole $\mu = p$ située dans le plan ZOX et sa forme générale nous est maintenant bien connue.

Hâtons-nous de terminer en indiquant l'intégrale de l'équation (16). Le moyen le plus commode d'intégrer le premier membre est de poser

$$\frac{\lambda - p}{\lambda} = u^2;$$

d'où

$$\frac{\sqrt{\lambda}\, d\lambda}{(\lambda^2 - p^2)\sqrt{\lambda - p}} = \frac{2\, du}{pu^2(2 - u^2)}.$$

On obtient immédiatement l'intégrale en fonction de u et, par suite, de λ; l'intégrale du second membre s'en déduit en changeant λ en μ, p en $-p$: si l'on égale les deux intégrales prises à partir de $\lambda = 2p$ et de $\mu = 2p$, on trouve, pour l'équation qui définit la trajectoire,

$$\log\frac{(2-\sqrt{3})\sqrt{\mu - p}(\sqrt{2\lambda} + \sqrt{\lambda - p})}{\sqrt{3}\sqrt{\lambda + p}(\sqrt{2\mu} - \sqrt{\mu + p})}$$
$$= \sqrt{\frac{2\lambda}{\lambda - p}} + \sqrt{\frac{2\mu}{\mu + p}} - 2\,\frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}}.$$

RÉCLAMATION DE PRIORITÉ POUR UNE FAUTE;

PAR M. C. BRISSE.

On m'a signalé une faute dans mon *Recueil de problèmes de Géométrie analytique* à l'usage des classes de Mathématiques spéciales, paru en janvier 1888. Il paraît que cette faute s'offrait bien naturellement, puis que, dans un Ouvrage analogue, paru en 1891, et que je ne puis trouver qu'excellent, sans blesser la modestie de l'auteur, la même faute a été commise exactement au même endroit dans le même problème. La voici :

École Centrale, première session de 1883. — Le discriminant

$$h^2(h^2 - 3bh + 3b^2)$$

est faux et doit être remplacé, comme je l'ai fait dans ma deuxième édition, par

$$-\frac{ah^2}{2}(h-b)^2.$$

QUELQUES THÉORÈMES DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE;

PAR M. GEORGES LECHALAS.

Afin de faire comprendre le genre d'intérêt qui peut s'attacher aux démonstrations que nous allons donner, il convient de dire quelques mots d'une discussion à laquelle a donné lieu la Géométrie non euclidienne dans

quelques recueils philosophiques [1]. Tandis que, d'accord avec M. Calinon, nous soutenions qu'une science purement rationnelle ne doit s'appuyer que sur les principes de la raison pure, M. Renouvier et M. l'abbé de Broglie affirmaient hautement que la Géométrie repose en outre sur des jugements synthétiques *a priori* ou des intuitions. Dans ce débat, un des principaux arguments des adversaires de la *Géométrie générale* [2] consistait dans l'affirmation que, si l'on peut construire une Géométrie sans s'appuyer sur le postulatum d'Euclide, on ne saurait se passer d'une foule d'autres postulats, admis implicitement dans tous les traités de Géométrie, euclidiens ou non.

Déjà nous avons contesté cette assertion de M. Renouvier en discutant les exemples cités par lui [3], non pas que nous prétendions prendre la défense de maint exposé peu exact, mais en prenant pour point de départ les définitions données par M. Calinon. On conçoit qu'il est difficile de répondre, sans se jeter dans des développements exagérés, à toutes les demandes de démonstrations, surtout si elles touchent à des parties très différentes de la Géométrie, parce que les propositions indiquées en supposent parfois toute une série de préparatoires. Mais le P. Poulain, qui est intervenu en adversaire dans le débat [4], nous a fourni une excellente occasion de soumettre à une épreuve caractéristique cette

---

[1] *Revue philosophique, Critique philosophique, Annales de Philosophie chrétienne*.

[2] Les personnes désirant se faire une idée précise de cette Géométrie n'auront qu'à se reporter à l'*Introduction à la Géométrie des espaces à trois dimensions*, publiée par M. Calinon, chez Berger-Levrault et Gauthier-Villars et fils.

[3] *Revue philosophique* de juillet 1890.

[4] *Études religieuses*, mai 1891.

affirmation d'indémontrabilité d'une foule de propositions, en nous donnant l'énoncé d'un certain nombre de théorèmes sur la ligne droite et le plan dont il n'avait pu découvrir ni obtenir de personne la démonstration. Or nous avons pu lui fournir cette démonstration, *pour toutes les propositions indiquées,* en partant de la propriété du plan d'être une surface identique à elle-même, c'est-à-dire telle que toute figure qui y est située peut y être déplacée de toute façon sans déformation. Cette propriété, qui, jointe à la retournabilité, sert à définir le plan, intervenant seule dans les démonstrations, nous avons pu généraliser les énoncés du P. Poulain. La suite de nos théorèmes est d'ailleurs un peu plus longue que la sienne, parce que nous avons dû la compléter par quelques propositions préliminaires ou intermédiaires. Nous croyons pouvoir ajouter que nos démonstrations, revues sur ses bienveillantes indications, lui ont paru rigoureuses et qu'il nous a engagé à les publier.

Définitions. — Une surface est *identique à elle-même* quand toute figure qui est située sur elle peut y être déplacée d'une façon quelconque sans déformation.

Une *géodésique* d'une surface identique à elle-même est une ligne située sur cette surface et telle que, par deux points de celle-ci, il en passe toujours une, et généralement une seule.

Dans son *Étude sur la sphère, la ligne droite et le plan* (¹), M. Calinon a montré qu'il existe deux sortes de surfaces identiques à elles-mêmes: les unes dont les géodésiques se coupent mutuellement en deux points et sont des courbes fermées, les autres dont les géodésiques ne se coupent qu'en un point et sont indéfinies.

(¹) Berger-Levrault, 1888.

Nous considérerons d'abord ces dernières, puis nous montrerons comment les démonstrations données à leur égard peuvent être étendues aux premières.

I. — Surfaces identiques a elles-mêmes a géodésiques indéfinies.

Théorème I. — *Une demi-géodésique indéfinie étant donnée sur une surface identique à elle-même, elle engendre toute cette surface en tournant autour de son origine O, et cela d'un mouvement continu, sans retour sur les parties déjà engendrées.*

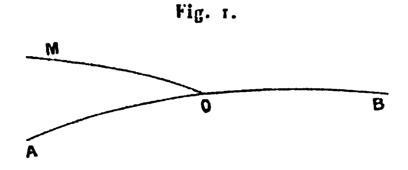
La géodésique peut se mouvoir sur la surface autour de son origine O, en vertu de la définition de la surface identique à elle-même. D'autre part, tout point de la surface détermine une géodésique passant aussi par le point O, d'où il résulte que, quand la géodésique décrit tous les mouvements possibles dans la surface autour de O, elle passe par le point considéré dans une de ses positions.

La rotation de la géodésique autour de O s'opère d'ailleurs d'une façon continue, et, pour revenir à sa position première, cette ligne n'a besoin d'opérer aucun mouvement en sens inverse du mouvement initial, car la définition de la surface identique à elle-même ne comporte aucune différence entre ses diverses parties, ce qui laisserait *sans raison suffisante* la nécessité d'une discontinuité ou d'un retour à partir d'une position quelconque. En vain objecterait-on qu'une rotation complète pourrait laisser non décrite une autre nappe, car, s'il y avait plus d'une nappe, les géodésiques joignant les points de deux nappes différentes appartiendraient, elles aussi, à la surface qui serait en réalité un espace à trois dimensions.

Théorème II. — *Une géodésique indéfinie partage une surface identique à elle-même en deux régions présentant un caractère distinctif.*

Soient la géodésique AB et un point quelconque O sur

Fig. 1.



cette géodésique. Si je fais tourner une demi-géodésique OM autour de ce point, à partir de la position OA, elle coïncidera avec OB à un certain moment de sa révolution, puis reviendra en OA sans rétrogradation, après avoir engendré toute la surface (théor. I). Tout point de celle-ci correspond à une position de OM, et, suivant que cette position a précédé ou suivi la coïncidence avec OB, le point appartient à deux régions distinctes auxquelles donne naissance la géodésique AB.

Théorème III. — *Sur une surface identique à elle-même, toute ligne continue, qui joint deux points appartenant à des régions différentes par rapport à une géodésique, rencontre celle-ci.*

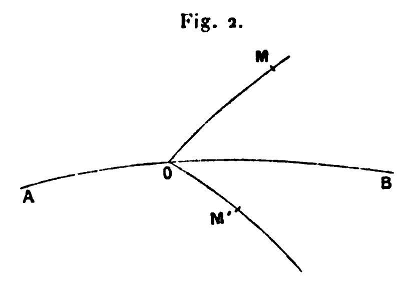
Nous démontrerons d'abord, à titre de lemme, que, si l'on joint les deux points donnés M et M′ par des géodésiques à un point quelconque O de la géodésique donnée AB, la demi-géodésique OM ne peut venir coïncider avec OM′, au moyen d'un mouvement continu autour de O, sans coïncider, à un certain moment, avec OA ou OB.

Si nous supposons d'abord un mouvement sans rétrogradation, s'effectuant dans le sens pour lequel M

est situé dans la première région, le passage de OM à OM′ entraîne forcément la coïncidence avec OB, en vertu du théorème II.

S'il s'agit d'une rotation également sans rétrograda-

Fig. 2.



tion mais en sens inverse, il y aura forcément coïncidence avec OA. En effet, les deux rotations partielles de OM à OM′ sont supplémentaires l'une de l'autre, c'est-à-dire qu'elles engendrent la totalité de la surface; d'où il résulte qu'elles entraînent la double coïncidence avec OA et OB. Comme, d'ailleurs, la première rotation n'a amené que la coïncidence avec OB, la seconde doit amener celle avec OA.

S'il s'agissait du passage de OM′ à OM, il y aurait naturellement inversion dans les coïncidences pour les mêmes sens de rotation.

Enfin, si l'on suppose des rotations oscillantes, les rétrogradations n'ont pour résultat que de faire décrire plusieurs fois certaines zones de la surface et de rendre possibles plusieurs coïncidences avec les deux demi-géodésiques OA et OB.

Ce lemme étant établi, le théorème se démontre simplement. Soient C et D les deux points donnés, reliés par une ligne continue quelconque, et considérons un point mobile suivant cette ligne. Pour prouver qu'il rencontrera la géodésique AB, il suffit de montrer que

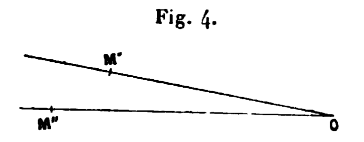
la géodésique mobile OM passant constamment par ce point mobile et par un point fixe quelconque O, pris sur AB, coïncide avec cette dernière ligne dans une des

Fig. 3.

positions qu'elle occupe pendant le mouvement de C en D. Or cela résultera du lemme, s'il est prouvé que la géodésique OM se déplace d'une façon continue en même temps que M.

Or dire que OM ne se déplacerait pas d'une façon continue, ce serait dire qu'il y a saut d'une position OM′ à une position OM″ faisant, avec elle, un angle fini

Fig. 4.



et que, par suite, la trajectoire de OM ne pénètre pas dans la région que décrirait OM entre les positions OM′ et OM″ si son mouvement était continu. Or la surface identique à elle-même est composée d'un certain nombre de régions semblables juxtaposées (¹), d'où il

(¹) Cela résulte du théorème I, puisque toute la surface est engendrée par une rotation de OM. Il va de soi d'ailleurs que nous employons une expression abrégée, ne supposant qu'en apparence l'exacte divisibilité de la rotation complète par la rotation M′OM″.

résulte que ces régions ne peuvent avoir une dimension infiniment petite qu'à une distance infiniment petite de O : la ligne joignant C à D serait, dès lors, discontinue, à moins de passer par O, c'est-à-dire de rencontrer AB.

Théorème IV. — *Quand deux géodésiques indéfinies se rencontrent, il y a sur chacune des points qui sont de côtés différents par rapport à l'autre.*

Soient les deux géodésiques AB et CD se rencontrant en O. Je dis que OD est, par rapport à AB, du côté opposé à OC. Si, en effet, on considère une demi-géodésique OM qui, d'abord en coïncidence avec OA, tourne

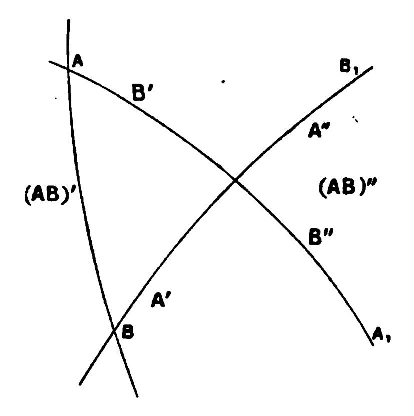
Fig. 5.

autour du point O, cette géodésique engendre toute la surface identique dans sa rotation continue (théor. I), et je vais montrer que, si elle rencontre OC avant OB, elle ne peut rencontrer OD qu'après OB. Faisons tourner COD autour de O : si OD est du même côté que OC et située au delà, au point de vue de la rotation de OM, elle arrivera la première en coïncidence avec OB, les deux moitiés de la géodésique tournant forcément dans le même sens, puisque leurs angles respectifs avec une autre géodésique ne diffèrent que par une constante; mais alors les deux géodésiques AB et CD coïncident dans toute leur étendue, ce qui est impossible, puisque, en tournant dans ce sens, OC ne peut venir en coïncidence avec OA qu'après avoir coïncidé avec OB, ce qu'il n'a pu encore faire.

Théorème V. — *Un triangle géodésique partage la surface sur laquelle il est situé en deux régions telles que toute ligne continue, reliant un point de l'une des régions à un point de l'autre, rencontre forcément un des côtés du triangle.*

Soient deux géodésiques indéfinies AA_1 et BB_1 se coupant en O : chacune d'elles partage la surface identique en deux régions distinctes A', A'' et B', B'', telles que leurs points respectifs soient situés de côtés différents par rapport à la géodésique considérée (théor. III); il résulte d'ailleurs du théorème IV que chaque géodésique divise en deux chacune des régions répondant à l'autre,

Fig. 6.



en sorte que la surface est partagée en quatre régions A'B', A'B'', A''B' et A''B''.

Si maintenant nous joignons deux points A et B, pris sur ces deux géodésiques dans les régions B' et A', nous donnons naissance à un triangle et, en même temps, nous partageons la surface en deux nouvelles régions (AB)' et (AB)'', la seconde contenant le point O;

le triangle OAB est la partie commune aux régions A′, B′ et (AB)″.

En vertu du théorème III, pour aller d'un point de cette partie de la surface à tout point qui n'y est pas situé, en suivant un chemin continu, il faut traverser la géodésique qui sépare les deux régions, c'est-à-dire traverser un côté du triangle *ou son prolongement*. Mais, si le passage a lieu sur un prolongement, c'est-à-dire en un point extérieur à la zone qui est constituée par le triangle, il a dû y avoir une précédente traversée, et l'on voit ainsi que la première a eu lieu sur un des côtés du triangle et non sur un prolongement.

Théorème VI. — *Un triangle géodésique enferme une aire.*

M. l'abbé de Broglie, qui a employé cette expression « enfermer une aire ou un espace » (1), a négligé de la définir. On pourrait croire de prime abord que la propriété démontrée au théorème précédent peut servir de définition; mais on s'aperçoit qu'elle ne répond pas à l'idée plus ou moins vague que nous attachons à l'expression en question, pour peu que l'on considère un cylindre sur lequel toute courbe continue rencontrant toutes les génératrices donne naissance à deux régions telles que celles dont parle le théorème V, sans qu'évidemment cette courbe renferme une aire. Nous croyons qu'on peut définir ainsi le sens de cette formule : Une ligne située sur une surface est dite enfermer une aire lorsque : 1° elle partage la surface en deux régions telles que toute ligne continue allant d'un point d'une des régions à un point de l'autre la rencontre forcément; et

---

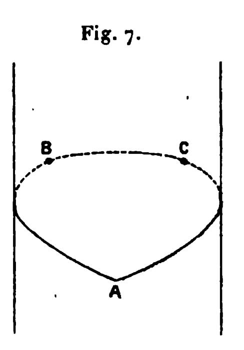
(1) *Annales de Philosophie chrétienne,* juillet 1891.

2° on peut décomposer l'une au moins de ces régions en aires telles que, si l'on joint successivement un point du contour limitant chacune de ces aires à tous les autres par une ligne située sur la surface, on passe ainsi, au moyen d'un mouvement continu et par une variation continue de la ligne, en forme et en longueur, d'un des éléments du contour voisins du point fixe à l'élément situé du côté opposé. Lorsque l'une seulement des régions peut subir cette décomposition, les points de cette région sont dits intérieurs au contour, et ceux de l'autre région lui sont dits extérieurs.

En vertu du théorème V, les triangles géodésiques jouissent de la première des propriétés susdites; quant à la seconde, ils en jouissent également, car, si l'on conçoit un segment de géodésique passant constamment par un sommet, coïncidant d'abord avec un des côtés et s'appuyant constamment sur le côté opposé, ce segment se confond avec le troisième côté lorsqu'il passe par le troisième sommet.

A titre de vérification de notre définition, reprenons l'exemple du cylindre et considérons une courbe l'enve-

Fig. 7.



loppant complètement, formée, par exemple, d'un arc plan BC et de deux arcs d'hélice AB et AC. Comme pré-

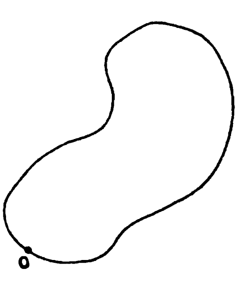
cédemment, nous pouvons considérer un arc d'hélice, de forme variable d'ailleurs, qui, passant constamment par le point A, se déplace en s'appuyant sur BC; mais, lorsque cet arc passera par C, il ne coïncidera pas avec le côté AC du triangle, en sorte que l'aire engendrée ne sera pas limitée par les trois côtés de celui-ci. Ainsi se trouve confirmée la pensée que nous avions bien reconnu les propriétés confusément groupées sous l'expression « enfermer une aire ».

Corollaire. — Tout contour résultant de la juxtaposition de plusieurs triangles géodésiques, accolés deux à deux par tout ou partie d'un côté, enferme une aire.

THÉORÈME VII. — *Tout contour fermé tracé sur une surface identique à elle-même enferme une aire.*

Soit un point O quelconque, pris sur le contour. Par ce point et tout autre du contour passe une géodésique, en sorte que, si l'on considère un point mobile M, par

Fig. 8.



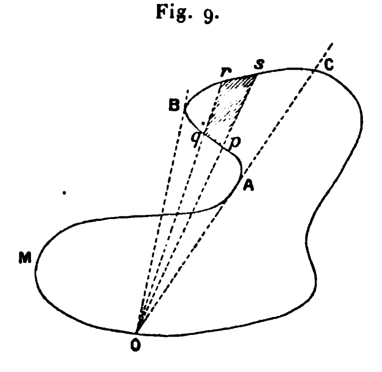
tant de O et y revenant après avoir suivi tout le contour, on a, pour chaque position, un segment de géodésique OM, et, si l'on prend deux positions infiniment voisines, elles forment un triangle avec la portion de contour comprise entre elles.

Cela posé, si la géodésique OM se meut tout le temps dans le même sens, on aura une série de triangles accolés, dont les deux extrêmes auront deux côtés sur le contour; en vertu du corollaire au théorème précédent, le présent théorème est démontré dans ce cas particulier.

Un géomètre, faisant appel à l'intuition, pourrait dire que tout contour peut donner lieu à une décomposition en contours partiels conformes au type précédent; mais nous sommes tenu à plus de rigueur. Nous allons donc établir une distinction entre les phases durant lesquelles la géodésique OM se meut dans le sens suivant lequel son mouvement doit s'achever et celles répondant à un mouvement inverse. On peut formuler à ce sujet le principe suivant. Les triangles élémentaires répondant aux premières de ces phases constituent les éléments d'une aire fermée dont on doit retrancher les triangles engendrés pendant les mouvements opposés à la rotation finale.

Si le contour considéré ne se recoupe pas lui-même,

Fig. 9.

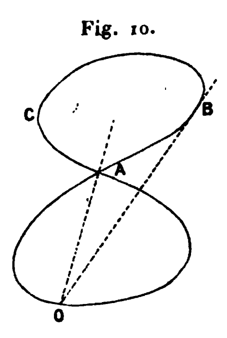


cette proposition s'établit simplement. Pendant que le point M décrit l'arc OMA, les triangles se juxtaposent régulièrement; mais, quand il y a retour en sens inverse,

de OA en OB, la première série reste ouverte en OA, puis il en est de même de la nouvelle série en OB. Seulement, tandis que celle-ci restera ouverte, l'autre se trouvera fermée quand le point M dépassera le point C, situé sur le prolongement de OA. Il est bien vrai qu'un nouveau mouvement rétrograde pourrait venir accoler d'autres triangles à OB; mais, de ce côté, on aboutira toujours à un dernier côté ouvert, puisque, par hypothèse, le mouvement doit reprendre finalement l'autre direction. Cela étant, on voit que les triangles dus à la rotation directe appartiennent en principe à une aire fermée, mais que l'on doit en retrancher les triangles engendrés pendant la rotation rétrograde, en sorte qu'il n'en reste alors qu'un quadrilatère élémentaire tel que *pqrs*.

Dans le cas où la courbe se recoupe elle-même, le principe précédent paraît en défaut, car les triangles correspondant à la région AB restent ouverts sur une

Fig. 10.

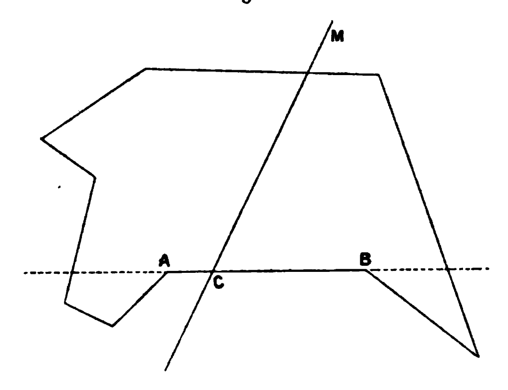


partie de la longueur du côté OB; mais on rentre dans l'énoncé général, si l'on a soin, en dépassant le point double A, de suivre la direction rétrograde AC. D'une façon générale, on doit, aux points multiples, suivre la direction la plus rétrograde, ou, si aucune n'est rétrograde, celle qui incline le moins dans le sens direct.

Corollaire. — Tous les points à l'infini sur une surface identique à elle-même sont extérieurs par rapport à toute ligne fermée tracée sur cette surface.

Lorsque du point A du contour fermé part un point mobile qui suit ce contour pour revenir en A, chacune de ses positions détermine une géodésique AM qui coupe le contour en un certain nombre de points, tous situés à distance finie du point A. Nous venons de voir que le contour enferme une aire et que cette aire est engendrée par tout ou partie du segment compris entre A et le point

Fig. 11.



mobile, d'où il résulte que les points à l'infini sur les diverses droites AM sont extérieurs à l'aire enfermée par le contour. Il en est de même d'ailleurs des points à l'infini situés sur les géodésiques issues de A qui ne rencontrent pas ailleurs le contour, puisque aucune partie de ces lignes n'engendre l'aire enfermée par celui-ci.

Théorème VIII. — *Si un point* C *d'une géodésique* AB *est situé entre* A *et* B, *et si une demi-géodésique* CD *est issue de* C : 1° *les deux angles qu'elle détermine n'ont pas de partie commune;* 2° *si* CD *tourne autour de* C *et si l'un des angles augmente, l'autre diminue.*

1° Chacune des deux géodésiques *entières* divise la surface en deux régions distinctes (théor. II), et chaque demi-géodésique est située par rapport à son supplément dans une région distincte, au point de vue de la division de la surface par l'autre géodésique, en vertu du théorème IV. Donc chaque demi-géodésique partage une de ces régions en deux régions distinctes.

On peut procéder aussi par démonstration directe, en remarquant que la demi-géodésique CD, partant de la position CA, décrit d'un mouvement continu, sans retour en arrière, toute une moitié de la surface. Donc une quelconque de ses positions sépare une région précédemment engendrée d'une région à engendrer ultérieurement, sans qu'il puisse y avoir de point commun, car ce point déterminerait une position déjà occupée par la géodésique CD.

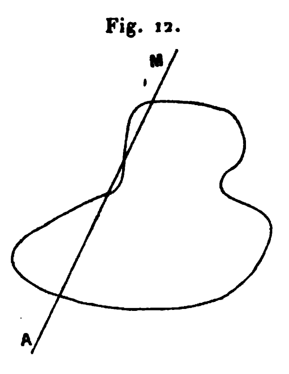
2° Les trois demi-géodésiques C (ADB) forment deux angles accolés dont la somme est, par définition, l'angle formé par les deux demi-géodésiques CA et CB situées dans le prolongement l'une de l'autre, en sorte que cette somme est constante. Donc, quand l'un des termes augmente, l'autre diminue.

Théorème IX. — *Si une géodésique rencontre en un point* C *le périmètre d'un polygone quelconque, ailleurs qu'en un sommet, elle rencontre ce périmètre en un second point.*

Si nous considérons un point qui part de A et arrive en B, après avoir suivi tout le périmètre sauf le côté AB, la géodésique joignant C à ce point mobile a pu éprouver des mouvements alternatifs; mais, quels que soient ces mouvements, elle a forcément engendré toute l'une des deux régions entre lesquelles est partagée la surface par la géodésique AB. Or toute géodésique passant par

C a l'une de ses moitiés dans cette région (théor. IV), et par suite cette moitié coïncide avec l'une des positions

Fig. 12.



de CM, laquelle a un deuxième point commun avec le contour.

II. — Surfaces identiques à elles-mêmes, à géodésiques fermées.

Nous ne reprendrons pas chaque théorème en détail. Qu'il nous suffise d'indiquer que, sous réserve des différences que nous allons signaler, énoncés et démonstrations sont également valables, pourvu qu'on substitue à toute demi-géodésique indéfinie, issue d'un point, une moitié de géodésique comprise entre ce point et le point commun d'intersection de toutes les géodésiques passant par le premier point considéré.

Les quatre premiers théorèmes ne donnent lieu à aucune difficulté qui mérite d'être mentionnée (¹); mais

(¹) Notons cependant, au sujet du théorème III, que le contour supposé ne pas entrer dans la zone comprise entre les géodésiques OM′ et OM″ pourrait passer par le point de rencontre des géodésiques issues de O aussi bien que par ce dernier point : dans un cas comme dans l'autre, il rencontre AB.

il n'en est pas de même des théorèmes suivants, en raison de ce que les géodésiques se coupent mutuellement en deux points. Il en résulte que, lorsqu'on veut reproduire la démonstration du théorème V, la géodésique AB se trouve diviser en deux régions chacune des quatre régions précédentes, tandis que, sur une surface indéfinie, elle n'en divisait que trois. Sans entrer dans une analyse détaillée, nous ferons remarquer que la difficulté disparaît si l'on ne considère que des triangles ayant des côtés inférieurs à une demi-géodésique : alors les démonstrations des théorèmes V et VI sont valables.

Pour le but que nous nous proposons, il nous suffira d'étudier, en outre, les triangles ayant deux côtés supérieurs à une demi-géodésique.

Ces deux côtés se coupent en un point compris entre le sommet dont ils sont issus et leurs secondes extrémités, en sorte que le triangle est formé de ce qu'on peut appeler un fuseau et d'un triangle du premier type : les démonstrations des théorèmes V et VI s'y appliquent sans difficulté, pourvu qu'on ait soin d'attribuer à l'origine des deux grands côtés le rôle de sommet principal, c'est-à-dire d'en faire le point O du théorème V et d'en faire l'origine de la géodésique mobile du théorème VI.

Cela posé, le théorème VII se démontre comme sur une surface indéfinie, mais donne lieu à quelques remarques : 1° Si le contour ne passe pas par le point où se coupent toutes les géodésiques passant par le point O, tous les segments de géodésique engendrant l'aire enfermée sont ou plus grands ou plus petits qu'une demi-géodésique ; suivant qu'on les prend plus grands ou plus petits, on engendre deux aires différentes dont la réunion forme la totalité de la surface, puisque les segments des deux séries sont, deux à deux, supplémentaires les uns des autres. 2° Si le contour passe par le point opposé au

point O, les segments engendrant une même aire sont, les uns, plus petits et les autres plus grands qu'une demi-géodésique; mais ici encore les segments supplémentaires engendrent le reste de la surface.

3° Dans le cas précédent, le segment générateur aboutissant au point opposé au point O est tangent en ce point au contour, y ayant, à la limite, deux points communs, le point mobile sur le contour et le point par lequel passent toutes les géodésiques génératrices. Il en résulte que, si le contour forme un angle en ce point, on a deux géodésiques distinctes; on doit admettre alors que la demi-géodésique génératrice pivote autour de ses extrémités pour passer d'une des positions à l'autre : elle engendre ainsi un fuseau qui constitue une aire fermée, ainsi qu'on le montre par un raisonnement analogue, mais plus simple que celui qui concerne les triangles.

Ce qui précède montre que tout contour fermé enferme deux aires composant la totalité de la surface.

Le théorème VIII ne donne lieu à aucune difficulté. Quant au théorème IX, il paraît, à première vue, en soulever une, attendu que, semble-t-il, il peut falloir plus d'une demi-géodésique pour relier successivement le point C aux divers points du contour.

Mais ici les remarques faites à l'occasion du théorème VII interviennent utilement, car nous avons vu que l'on peut engendrer toute une des aires limitées par le contour au moyen d'un segment inférieur à une demi-géodésique, sauf dans le cas où le contour passerait par le point de concours des géodésiques issues de C; mais alors le théorème n'a pas besoin de démonstration, puisque ce point est forcément un deuxième point de rencontre. Sauf dans ce cas particulier, qui, on vient de le voir, ne soulève pas de difficulté réelle, l'objection formulée est donc sans fondement.

BIBLIOGRAPHIE.

Nomographie. Les calculs usuels effectués au moyen des abaques. Essai d'une théorie générale. Règles pratiques. Exemples d'application, par M. *Maurice d'Ocagne,* ingénieur des Ponts et Chaussées. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1891. Gr. in-8° de 96 pages, avec 38 figures dans le texte et 8 planches. Prix : $3^{fr},50$.

Si le calcul numérique est d'une utilité journalière pour le financier, l'ingénieur, le marin, etc., il constitue, sans contredit, une besogne rebutante qu'on a depuis longtemps cherché à alléger par l'emploi de tables, de machines ou de tracés graphiques.

La méthode graphique peut venir en aide, au calculateur, de deux manières. Tantôt c'est, comme en Statique graphique, au moyen d'une épure que l'on exécute sur des données géométriques et qui fournit l'inconnue sous la même forme. D'autres fois, comme dans l'Ouvrage qui nous occupe, c'est par l'emploi d'abaques, c'est-à-dire de Tableaux représentant sur un plan à l'aide de lignes tracées, une fois pour toutes, les équations qui lient certaines variables entre elles : une simple lecture fournit alors le résultat demandé.

Les abaques employés jusqu'ici étaient construits à des points de vue très divers et par des procédés entièrement dissemblables. Ce n'est pas le moindre mérite de M. d'Ocagne que d'avoir, par une habile analyse comparative, su démêler un lien étroit entre des méthodes en apparence si disparates et d'être parvenu à constituer un véritable corps de doctrine en rattachant ces éléments épars à un même principe.

Rien de plus simple, d'ailleurs, que ce principe fondamental. Soit

$$(1) \qquad F(\alpha, \beta, \gamma) = 0$$

une équation donnée, dont la résolution permet de déterminer

la valeur de l'inconnue γ pour chaque système de valeurs attribuées à α et β. On veut substituer à ces calculs pénibles l'emploi d'un abaque donnant les mêmes résultats par de simples lectures. A cet effet, on choisit, à volonté, deux équations de la forme

$$(\text{I}_1) \qquad F_1(x, y, \alpha) = 0,$$

$$(\text{I}_2) \qquad F_2(x, y, \beta) = 0;$$

puis, on élimine α et β entre les trois relations précédentes, ce qui donne une nouvelle équation

$$(\text{I}_3) \qquad F_3(x, y, \gamma) = 0.$$

L'équation (I_1), où x et y désignent des coordonnées courantes, représente une famille de courbes auxquelles les Nomographes donnent le nom d'*isoplèthes,* relatives à α, pour rappeler que α conserve la même valeur en tous les points de l'une quelconque de ces courbes et ne varie que d'une courbe à l'autre. Les équations (I_2) et (I_3) définissent pareillement le système des isoplèthes relatives à β et le système des isoplèthes relatives à γ. Supposons qu'on ait construit ces trois groupes d'isoplèthes en plaçant sur chaque couche individuelle la valeur correspondante de celui du paramètre α, β, γ qui le concerne. Le Tableau graphique formé par ces trois systèmes de courbes cotées constitue un abaque représentatif de l'équation (1).

Voici comment on se servira de cet abaque : Veut-on la valeur de γ qui répond à un système de valeurs α' et β' attribuée à α et β? On prendra le point de rencontre M de l'isoplèthe (α') et de l'isoplèthe (β'); la cote γ' de celle des isoplèthes (γ) qui passe par M sera la valeur cherchée de γ. Si, bien que les isoplèthes (γ) soient assez voisines les unes des autres, l'isoplèthe (γ') qui passerait par M n'est pas tracée, on fera une interpolation à vue.

L'idée qui s'offre la première à l'esprit pour le choix des relations (I_1) et (I_2) consiste à prendre

$$(\text{I}'_1) \qquad x = \alpha,$$

$$(\text{I}'_2) \qquad y = \beta,$$

alors que l'équation (I_3) devient

$$(\text{I}'_3) \qquad F(x, y, \gamma) = 0.$$

Les isoplèthes (α) sont des droites parallèles à l'axe des y, les isoplèthes (β) des droites parallèles à l'axe des x, et si l'on opère sur du papier quadrillé, la construction de l'abaque se réduit au tracé des isoplèthes (γ).

Tels sont les Tableaux graphiques si utiles, construits par M. Eugène Pereire, pour des questions d'intérêt et de finance.

Tel est aussi l'abaque bien connu destiné à remplacer les Tables de multiplication et qui est relatif à l'équation

$$\gamma = \alpha\beta;$$

les isoplèthes (γ) sont alors des hyperboles équilatères ayant pour asymptotes les axes coordonnés.

Si, dans ce dernier abaque, on remplace les équations (I'_1) et (I'_2) par

$$x = \log\alpha, \qquad y = \log\beta,$$

l'équation (I'_3) devient

$$x + y = \log\gamma.$$

On tombe de la sorte sur un abaque à *triple réglure*, c'est-à-dire sur un abaque composé de trois systèmes d'isoplèthes rectilignes. Telle est l'origine d'un principe fondamental dans cette théorie, qu'on nomme *principe de l'anamorphose* et que l'on doit au savant M. Lalanne, l'un des fondateurs de la Science nomographique.

Dans l'impossibilité de tout citer, nous renverrons au Livre de M. d'Ocagne pour l'exposition générale du principe de l'anamorphose et pour la recherche du type des équations susceptibles d'être représentées par des abaques à triple réglure.

Nous voulons surtout attirer l'attention sur deux points :

Le premier concerne l'exposition des recherches si ingénieuses et si justement appréciées de M. l'ingénieur des Mines Lallemand, Directeur du Service du nivellement général de la France. Grâce à ses nouveaux abaques, dits *hexagonaux*, M. Lallemand est parvenu à faire exécuter en quelques miminutes une besogne qui se répète chaque jour et qui, auparavant, absorbait tous les instants d'un groupe d'employés. Cet exemple n'est-il pas une leçon? Que de spécialités dans lesquelles les abaques pourraient offrir un pareil avantage! Les abaques hexagonaux s'appliquent à un type général d'équa-

tions que l'on rencontre fréquemment dans la pratique. M. Lallemand n'a publié sur ses méthodes qu'une Note succincte dans le t. CII des *Comptes rendus* et quelques feuilles lithographiées pour les besoins de son service, mais non livrées au public. Ces procédés si élégants et si utiles pouvaient donc être considérés comme inédits, et l'on doit remercier M. d'Ocagne de les avoir fait connaître en les rattachant à la méthode générale.

Le second point se rapporte aux *abaques à points isoplèthes*. On nous permettra d'y insister un peu, vu que, à notre sens, c'est la partie la plus originale du Livre de M. d'Ocagne.

Considérons un abaque à triple réglure et construisons sa figure *corrélative;* à chaque droite de l'ancienne figure répondra un point de la nouvelle, et réciproquement, de telle sorte, à trois droites de la première passant par un même point, correspondront trois points de la seconde situés en ligne droite. Ainsi, tandis que, dans l'ancien abaque, les isoplèthes étaient des droites enveloppant trois certaines courbes, dans le nouveau les isoplèthes seront des points distribués sur trois autres lignes; à chaque système de valeurs de α, β, γ satisfaisant à l'équation proposée, répondront, non plus trois droites concourantes, mais trois points placés respectivement sur ces trois lignes et situés en ligne droite.

Pour rendre pratique cette idée nouvelle, il fallait choisir un mode de corrélation aussi simple que possible. Pour cela, M. d'Ocagne n'avait pas à chercher bien loin; il lui a suffi d'utiliser ses *coordonnées parallèles de droites*. Les lecteurs de ce journal savent, par les intéressantes Communications de cet ingénieur distingué aux *Nouvelles Annales*, en 1887, 1889 et 1890, ce qu'on entend par coordonnées parallèles d'une droite MN (*fig.* 1). Ce sont les segments $AM = u$, $BM = v$ que cette droite intercepte sur deux axes parallèles AU, BV, ces segments étant comptés à partir des extrémités A et B d'une perpendiculaire commune à ces axes. Cela posé, nous aurons défini clairement le mode de corrélation adopté, en disant qu'il consiste dans le changement des coordonnées cartésiennes de points en coordonnées parallèles de droites.

Rien n'est plus simple actuellement, étant donné un abaque à triple système de droites isoplèthes, que de construire l'abaque corrélatif à triple système de points isoplèthes. On

prendra les coordonnées cartésiennes

$$(x = a, y = b) \quad \text{et} \quad (x = a', y = b')$$

de deux points appartenant à une droite quelconque du premier abaque. Le point qui répondra à cette droite dans le second abaque sera le point commun aux deux droites dont les coordonnées parallèles sont $(u = a,\ v = b)$ et $(u = a',\ v = b')$.

Fig. 1.

Considérons, par exemple, l'abaque construit par M. Lalanne pour la recherche des racines positives d'une équation du troisième degré

$$z^3 + pz + q = 0$$

privée du terme en z^2. On prend pour (I_1) et (I_2) les équations $x = p$, $y = q$, et l'équation (I_3) est alors

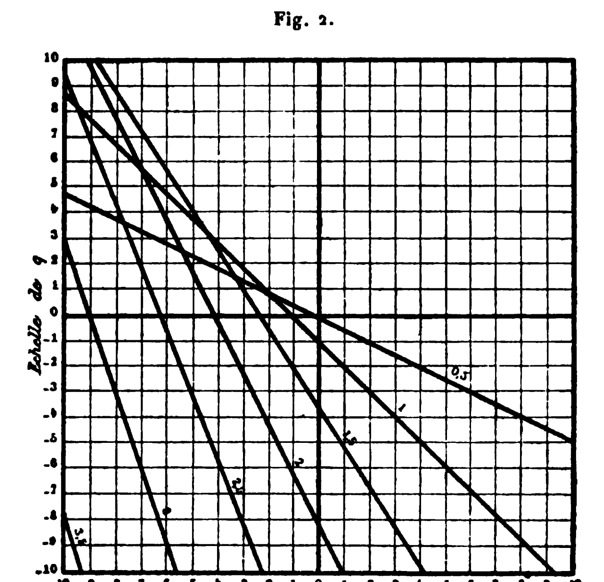
$$z^3 + zx + y = 0.$$

C'est donc un abaque à triple réglure : il est représenté par la *fig.* 2. En le transformant par le procédé indiqué, on obtient l'abaque à points isoplèthes représenté par la *fig.* 3. Les points isoplèthes (p) et (q) sont distribués respectivement sur les deux droites parallèles auprès desquelles on a inscrit *échelle de p*, *échelle de q*; les points isoplèthes (z) sont sur la courbe marquée en trait fort et sur laquelle on a inscrit *échelle* des z. Veut-on, par exemple, la racine positive de l'équation

$$z^3 + 2z - 6 = 0;$$

on joindra par une droite le point 2 de l'axe des p au point (— 6) de l'axe des q; le point où la courbe en trait fort est coupée par cette droite porte la cote 1,46; ce nombre est la racine demandée. Pour n'avoir pas à tracer de ligne sur

Fig. 2.



l'abaque, on emploiera un fil qu'on tendra entre les points 2 et (— 6).

Remarquons, d'ailleurs, bien vite que l'emploi des coordonnées parallèles ne servira pas seulement à la transformation des abaques préalablement construits à l'aide des coordonnées cartésiennes. L'application immédiate des coordonnées parallèles à une équation à triple réglure permettra de construire directement l'abaque à points isoplèthes correspondant à cette équation.

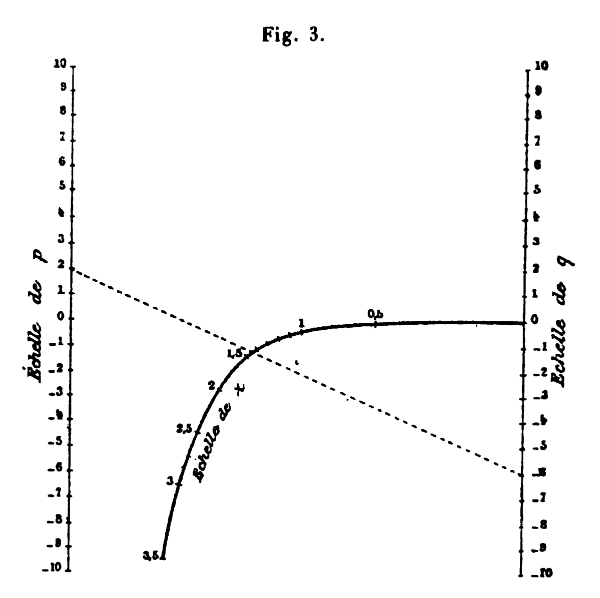
Les abaques à points isoplèthes se recommandent par une plus grande facilité dans la lecture et dans l'interpolation à vue; ils offrent, en outre, sur les abaques à droites isoplèthes, l'avantage de permettre l'introduction d'une quatrième va-

riable. Considérons, par exemple, l'équation complète du troisième degré

$$z^3 + nz^2 + pz + q = 0.$$

Pour construire l'abaque correspondant en droites isoplèthes, il faut faire d'abord disparaître le terme en z^2. Cela n'est pas nécessaire pour l'abaque à points isoplèthes. L'introduction du

Fig. 3.



coefficient n comme quatrième variable entraîne seulement la construction d'autant de courbes successives, analogues à la courbe en trait fort de la *fig.* 3, qu'on attribue de valeurs à n; et comme ces courbes sont parfaitement distinctes, aucune confusion n'est à redouter : on pourra s'en assurer en jetant un coup d'œil sur la dernière planche du Volume, planche que ses dimensions ne nous permettent pas de reproduire ici.

En résumé, la création d'un nouveau corps de doctrine bien défini, l'exposition claire et méthodique des principaux résultats antérieurement obtenus et surtout des beaux travaux, à peu près inédits, de M. Lallemand, enfin, l'invention des abaques à points isoplèthes : telle est la part considérable qui revient à M. d'Ocagne dans ce remarquable Opuscule qu'un

juge éminent a naguère présenté à l'Académie des Sciences dans les termes les plus flatteurs. E. R.

PUBLICATIONS RÉCENTES.

ŒUVRES COMPLÈTES D'AUGUSTIN CAUCHY, publiées sous la direction scientifique de l'Académie des Sciences et sous les auspices de M. le Ministre de l'Instruction publique. IIe série, t. IX. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1891. In-4° de 452 pages. Prix : 25fr.

TRAITÉ D'ANALYSE, Cours de la Faculté des Sciences de Paris, par *Émile Picard*, Membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences. T. I : INTÉGRALES SIMPLES ET MULTIPLES. L'ÉQUATION DE LAPLACE ET SES APPLICATIONS. DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIES. APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DU CALCUL INFINITÉSIMAL. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1891. Grand in-8° de XII-457 pages, avec 21 figures dans le texte. Prix : 15fr.

TRAITÉ D'OPTIQUE, par M. *E. Mascart*, Membre de l'Institut, professeur au Collège de France, directeur du Bureau Central météorologique. T. II. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1891. Grand in-8° de VI-643 pages, avec 113 figures dans le texte et Atlas de deux Planches sur cuivre, dont une en couleur. Prix : 24fr.

ARCHITECTURE NAVALE. THÉORIE DU NAVIRE, par *J. Pollard* et *A. Dudebout*, Ingénieurs de la Marine, professeurs à l'École du Génie maritime. T. I : CALCUL DES ÉLÉMENTS GÉOMÉTRIQUES DES CARÈNES DROITES ET INCLINÉES. GÉOMÉTRIE DU NAVIRE. T. II : STATIQUE DU NAVIRE. DYNAMIQUE DU NAVIRE : ROULIS EN MILIEU CALME, RÉSISTANT OU NON RÉSISTANT. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1890 et 1891. 2 vol. grand in-8° de LIV-354 pages et VI-432 pages, avec 191 et 229 figures dans le texte et deux Planches. Prix : 13fr et 13fr.

COURS DE MATHÉMATIQUES SUPÉRIEURES, à l'usage des candidats à la Licence ès Sciences physiques, par M. l'abbé *Stoffaes*, professeur à la Faculté catholique des Sciences de Lille. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1891. In-8° de VII-431 pages, avec 155 figures dans le texte. Prix : 8fr,50.

ÉTUDE SUR LES ARGUMENTS DE ZÉNON D'ÉLÉE CONTRE LE MOUVEMENT, par *G. Frontera*. Paris, Hachette; 1891. In-8° de 23 pages.

NEUE RECHNUNGSMETHODEN DER HÖHEREN MATHEMATIK, von Dr *Julius Bergbohm*. Stuttgart, J. Bergbohm; 1891. In-8° de 30 pages.

COURS ABRÉGÉ D'ALGÈBRE ÉLÉMENTAIRE à l'usage des élèves de la classe de Mathématiques élémentaires et de l'enseignement secondaire moderne, par *Eug. Combette*, ancien élève de l'École Nor-

male supérieure, ancien professeur de Mathématiques au lycée Saint-Louis, Inspecteur d'Académie à Paris. 3e édition, conforme aux derniers programmes officiels des 24 janvier et 15 juin 1891. Paris, Félix Alcan; 1892. In-8° de 479 pages. Prix : 4fr,50.

COURS DE TRIGONOMÉTRIE, à l'usage des candidats au Baccalauréat, suivi de compléments pour les candidats aux grandes Écoles de l'État, conformément aux derniers programmes officiels, par *E. Combette*, ancien élève de l'École Normale supérieure, ancien professeur de Mathématiques au lycée Saint-Louis, Inspecteur d'Académie à Paris. Paris, Félix Alcan; 1892. In-8° de 276 pages. Prix : 4fr.

COURS ÉLÉMENTAIRE DE STATIQUE, à l'usage des élèves de la classe de Mathématiques élémentaires et des aspirants au Baccalauréat (Programme du 24 janvier 1891), par *E. Combette*, ancien élève de l'École Normale supérieure, ancien professeur de Mathématiques au lycée Saint-Louis, Inspecteur d'Académie à Paris. Paris, Félix Alcan; 1892. In-8° de 212 pages. Prix 3fr.

EL PROGRESO MATEMATICO, periodico de Matematicas puras y applicadas. Director : don *Zoel G. de Galdeano*, catedratico de Geometria analitica de la Universidad de Zaragoza. Año I., num. 4°, 5°, 6°, 7° et 8°. Zaragoza; 1891. Precios de subscripcion : un año, 11fr.

TIRAGES A PART.

Sur une équerre cycloïdale propre à effectuer la rectification des arcs de cercle, par M. GUIMARAES. Extrait du *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XIX.

Contributions à la géométrie du triangle; sur les triangles orthologiques et sur divers sujets de la géométrie du triangle, par M. E. LEMOINE. Extraits du *Bulletin de l'Association française pour l'avancement des Sciences;* 1889 et 1890.

Sur la génération des deux quadriques gauches et leur intersection avec une ligne droite; par M. C. ROUBAUDI. Cluny; 1890.

Teoremi sulle coniche nella metrica projettiva. Nota di E. D'OVIDIO. Extrait des *Atti* delle R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. XXVI; 1891.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE

(TOME X, 3e SÉRIE).

Algèbre.

Géométrie pure.

Géométrie analytique à deux et à trois dimensions.

Calcul différentiel et intégral.

Mécanique.

Sujets de composition donnés à divers concours.

Mélanges.

TABLE DES AUTEURS PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE

(TOME X, 3e SÉRIE).

(On a mis à la droite de chaque nom d'auteur les numéros de la Table précédente auxquels il faut se reporter pour trouver les titres des Mémoires et l'indication des pages correspondantes.)

16881 Paris. — Impr. GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

EXERCICES.

Pour satisfaire au désir exprimé par plusieurs de nos abonnés, nous consacrerons désormais régulièrement dans chaque numéro quelques pages à l'énoncé de questions proposées et à leur solution. Toutefois, comme il importe beaucoup, dans l'intérêt du Journal, que ce nombre de pages soit assez restreint pour ne pas nuire à la publication des Mémoires originaux, nous prions nos Correspondants de vouloir bien rédiger leurs solutions avec une extrême sobriété, en supprimant les développements qui ne présentent pas de difficulté sérieuse.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1595. Les rayons de courbure aux extrémités d'une corde quelconque d'une conique sont proportionnels aux cubes des distances de ces points au pôle de la corde. (A. DEMOULIN.)

1596. Étant donnés, dans un plan, une courbe générale de $n^{\text{ième}}$ classe et un point, il existe $2n(n+1)$ paraboles, ayant un même paramètre, qui ont pour foyer le point donné et sont tangentes à la courbe donnée.

La somme des angles que font, avec une direction quelconque Δ du plan, les axes de ces paraboles, est égale, à un multiple de π près, au quadruple de la somme des angles que font avec la direction Δ les droites joignant le foyer commun des paraboles aux n foyers de la courbe, augmenté du double de la somme des angles que font avec Δ les $n(n-1)$ directions asymptotiques de cette courbe. (G. FOURET.)

1597. Pierre tire quatre cartes d'un jeu de piquet; il donne les trois premières à Paul et garde la quatrième pour lui. Pierre a gagné si sa carte n'est de la couleur d'aucune des cartes de Paul, ou si, étant de la couleur de l'une ou de plusieurs d'entre elles, elle a une valeur supérieure. La mise de Paul étant de 1^{fr}, quelle doit être celle de Pierre pour que le jeu soit équitable? (E. ROUCHÉ.)

1598. Le lieu des centres des hyperboles équilatères osculatrices en chaque point d'une ellipse donnée est une courbe du quatrième ordre qui peut être considérée comme la podaire du centre d'une ellipse concentrique à la première.

(E. Barisien.)

1599. Si l'on pose

$$E_1 = \frac{4}{3}\pi(ab + bc + ca),$$

$$R = \frac{2\pi}{15b}[a^2(b-c)^2 + b^2(c-a)^2 + c^2(a-b)^2],$$

et si l'on désigne par E l'aire de l'ellipsoïde dont les demi-axes rangés par ordre de grandeur décroissante sont a, b, c, on a

$$E = E_1 + \frac{R}{c - \theta(a-c)},$$

θ étant un nombre convenablement choisi entre o et 1.

(G. Peano.)

1600. Soient X'X une droite horizontale indéfinie, A et B deux points pris sur cette droite et C un point pris au-dessous, de manière que sa projection sur X'X tombe entre A et B. n points P_1, P_2, ..., P_n dont les masses respectives sont m_1, m_2, ..., m_n parcourent la ligne brisée X'ACBX, de telle sorte que leur ordre de succession reste le même et que les projections sur X'X de leurs distances mutuelles restent constantes. On demande de trouver : 1° le lieu du centre de gravité de ce système de points; 2° la position du système pour laquelle le centre de gravité est le plus bas. (E. Rouché.)

QUESTIONS RÉSOLUES.

Question 1594.

On donne un triangle abc. On trace une circonférence qui passe par a, elle coupe ab en c' et ac en b'. On trace une circonférence qui passe par b et c', elle coupe bc en a' et la première circonférence en i : les points i, a', c, b' sont sur une même circonférence.

On prend un point arbitraire O *sur le plan abc. La*

droite O*a coupe en* α *la circonférence qui passe par* a. *La droite* O*b coupe en* β *la circonférence qui passe par* b. *Enfin sur la troisième circonférence on a* γ *à sa rencontre avec* O*c*.

Démontrer que les points O, α, β, γ, *i sont sur une même circonférence.* (MANNHEIM.)

SOLUTION

Par MM. E. LEMOINE; A. ANDERSON, professeur à Galway (Irlande); J. CHAPRON, caporal au 26e de ligne; BAUDIAU, élève au lycée de Rouen, et DE MONTILLE, élève au lycée Saint-Louis.

Les points i, b', a, c' étant sur une même circonférence, les angles $ib'a$, $ic'b$ sont égaux; de même la situation des points i, c', b, a' sur une même circonférence entraîne l'égalité des angles $ic'b$, $ia'c$. Donc les angles $ib'a$, $ia'c$ sont égaux et par suite les points i, b', c, a' appartiennent à une même circonférence.

D'ailleurs, les angles Oac et Oca étant respectivement égaux à $\alpha ib'$, $\gamma ib'$, leur somme est égale à l'angle $\alpha i\gamma$; mais cette somme est égale à l'angle αOγ ou à son supplément; donc la circonférence qui passe par les trois points O, α, i passe par γ, et l'on démontrerait de même qu'elle passe par β.

N. B. — Une solution analytique de ce problème généralisé a été déjà donnée (t. IX, 3e série, p. 556).

Question 1477.

ABC *est un triangle rectangle en* A. *D'un point quelconque* M *pris sur le côté* AB *on abaisse sur la hauteur* AH *la perpendiculaire* MP; *par le point* P *on élève à la droite* CP *la perpendiculaire* PQ *qui coupe* AB *prolongé au point* Q. *Démontrer que* AQ = BM. (D'OCAGNE.)

SOLUTION

Par M. LEMAIRE, professeur au lycée de Douai.

Si l'on mène PL parallèle à AB jusqu'à sa rencontre L avec AC, on a évidemment MB = PL et il suffit de démontrer l'égalité de PL et de AQ. Or PL et AP étant deux des hauteurs du triangle CAL, CP est la troisième hauteur; donc PQ et AL sont parallèles comme perpendiculaires à la même droite CP, et par suite PL et AQ sont égales comme parallèles comprises entre parallèles.

Question 1575.

Les côtés d'un triangle PQR *inscrit à une parabole rencontrent l'axe* AS *aux points* L, M, N, *et l'on prend sur* AS *des points* L', M', N', *tels que*

$$AL.AL' = AM.AM' = AN.AN' = -\overline{AS}^2,$$

A *étant le sommet,* S *le foyer; démontrer par la Géométrie pure que les droites* PL', QM', RN' *se rencontrent sur la courbe.* (R.-W. Genèse.)

SOLUTION

Par M. Servais.

Nous traitons la question plus générale : *Les côtés d'un triangle inscrit à une conique rencontrent une parallèle* AI, *menée d'un point* A *de la courbe à une asymptote, aux points* L, M, N; *on prend sur* AI *des points* L', M', N', *tels que*

$$AL.AL' = AM.AM' = AN.AN' = \pm a^2;$$

les droites PL', QM', RN' *se recontrent sur la courbe.*

Soit S le point où PL' rencontre la courbe, la sécante AI rencontre la courbe et les côtés du quadrilatère PQRS en des couples de points A et I, L et L', M et M'', N et N'' d'une involution; mais le point I est à l'infini, donc A est le point central de cette involution et l'on a

$$AL.AL' = AM.AM'' = AN.AN'' = \pm a^2;$$

ce qui montre que les points M' et M'', N' et N'' coïncident.

Corollaire. — *Les côtés d'un triangle* PQR *inscrit à une hyperbole et la tangente à cette courbe au point* P *rencontrent une asymptote aux points* L, M, N, T; *on a* LM = NT.

Ce corollaire permet de construire la tangente en un point d'une hyperbole donnée par une asymptote et trois points.

Deux tangentes à l'hyperbole et leur corde de contact rencontrent une asymptote aux points T, T', C; *on a* CT = CT'.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1601. Inscrire dans une sphère donnée un polygone dont chaque côté passe par un point donné. (G. Tarry.)

On propose de démontrer la construction suivante du polygone en question.

Inscrivons dans la sphère deux lignes brisées $A_1A_2A_3\ldots A_{n+1}$, $PB_2B_3\ldots B_{n+1}$ dont les côtés passent respectivement par les points donnés d_1, d_2, d_3, ..., d_n, puis la ligne brisée $PC_nC_{n+1}\ldots C_1$ dont les côtés passent par les mêmes points pris dans l'ordre inverse d_n, d_{n-2}, ..., d_1.

Menons un plan perpendiculaire au diamètre de la sphère qui passe par le point P et désignant par A'_1, A'_{n+1}, B'_{n+1}, C'_1 les intersections de ce plan avec les droites PA_1, PA_{n+1}, PB_{n+1}, PC_1 et par Q les intersections des droites $B'_{n+1}A'_{n+1}$ et $C'_1A'_1$.

Dans ce plan, construisons le triangle de base $B'_{n+1}C'_1$ dans lequel, 1° le produit des deux autres côtés est égal au produit des segments $B'_{n+1}A'_{n+1}$ et $C'_1A'_1$; 2° la somme ou la différence des angles à la base est la même que dans le triangle $QB'_{n+1}C'_1$, suivant que le nombre de points donnés est pair ou impair.

Soit S le sommet de ce triangle.

Une droite PS coupe la sphère au point S_1, sommet d'un polygone $S_1S_2S_3\ldots S_n$ dont les côtés passent respectivement par les points donnés.

Le problème comporte deux solutions. Ces solutions sont toujours réelles lorsque le polygone cherché a un nombre impair de côtés.

1602. Par les sommets A, B, C d'un triangle inscrit dans une conique, on mène à la courbe des tangentes qui rencontrent les côtés opposés en A', B', C'; les milieux de AA', BB', CC' sont en ligne droite.

Dans le cas particulier du cercle, cette droite est l'axe radical du cercle circonscrit et du cercle des neuf points.

(F. Farjon.)

QUESTIONS RÉSOLUES.

Question 1398.

Un cercle roule sur une ellipse. Trouver :

1° *Le lieu des points* M *de contact des tangentes à ce cercle parallèles aux axes de l'ellipse;*

2° *Le lieu des points* S *de rencontre de ces tangentes;*

3° *La quadrature des courbes obtenues.*

(E. Fauquembergue.)

SOLUTION

Par M. H. Brocard.

Soient k le rayon du cercle, α, β les coordonnées de son centre C. Celles des points M et S seront

$$(\mathrm{M}) \qquad [(\alpha+k,\beta),(\alpha,\beta+k),(\alpha-k,\beta),(\alpha,\beta-k)],$$

$$(\mathrm{S}) \qquad \left\{\begin{array}{l} [(\alpha+k,\beta+k),(\alpha-k,\beta+k), \\ (\alpha-k,\beta+k),(\alpha-k,\beta-k)]. \end{array}\right.$$

Le lieu du point C est la courbe parallèle à l'ellipse, nommée aussi *toroïde*, parce qu'elle représente le contour apparent du tore.

Cette courbe est aujourd'hui bien connue; M. Catalan a donné son équation sous la forme très simple

$$(\mathrm{AB}-9\mathrm{C})^2 = 4(\mathrm{A}^2+3\mathrm{B})(\mathrm{B}^2+3\mathrm{AC})$$

avec

$$\mathrm{A} = \alpha^2+\beta^2-a^2-b^2-k^2,$$

$$\mathrm{B} = a^2\beta^2+b^2\alpha^2-a^2k^2-b^2k^2-a^2b^2,$$

$$\mathrm{C} = a^2b^2k^2$$

(*Nouv. Ann.*, p. 553; 1884). Il restera donc à remplacer α et β par les valeurs (M) et (S) pour en déduire les équations des courbes demandées, qui sont, naturellement, autant de toroïdes égales à la première, transportées parallèlement.

L'aire de ces courbes est donc égale à l'aire de la toroïde, et, d'après une étude générale publiée par Crelle dans un

Mémoire sur le parallélisme des lignes et surfaces courbes (*Ann. de Gergonne*, t. XII, p. 1-35; juillet 1821), on reconnaît que l'espace compris entre les courbes parallèles a pour mesure le rectangle qui, ayant pour base la courbe enveloppante (ou enveloppée), aurait pour hauteur la distance entre les deux courbes, moins (ou plus) le cercle qui aurait cette même distance pour rayon (*loc. cit.*, p. 18).

Question 1452.

L'expression

$$8\beta - 3(\alpha^2 + 2\alpha) + 1$$

se réduisant à un carré pour des valeurs entières de α *et* β, *l'équation indéterminée*

$$(1) \qquad x^3 - (\alpha^3 - \beta^2) = y^2$$

est résoluble en nombres entiers x, y, *indépendamment de la solution immédiate*

$$x = \alpha, \qquad y = \beta.$$

(S. Réalis.)

SOLUTION

Par M. H. Brocard.

L'équation (1) peut s'écrire

$$(x - \alpha)(x^2 + \alpha x + \alpha^2) = (y - \beta)(y + \beta).$$

On pourra poser

$$x - \alpha = y - \beta,$$
$$x^2 + \alpha x + \alpha^2 = y + \beta.$$

L'élimination de x donne

$$y^2 + (3\alpha - 2\beta - 1)y + \beta^2 + 3\alpha^2 - 3\alpha\beta - \beta = 0,$$

d'où

$$B^2 - 4AC = t^2$$

ou

$$8\beta + 1 - 3(\alpha^2 + 2\alpha) = t^2,$$

ce qui est la relation énoncée.

Question 1558.

Le lieu des centres de toutes les coniques ayant un contact du troisième ordre, au même point d'une conique donnée, est une ligne droite. (Barisien.)

SOLUTION

Par M. H. Brocard.

Prenons pour axes des coordonnées la tangente et la normale au point considéré.

Pour que les deux coniques

$$x^2 + Bxy + Cy^2 + Ey = 0,$$
$$x^2 + bxy + cy^2 + ey = 0$$

admettent un contact du troisième ordre, il suffit d'exprimer que les trois premières dérivées sont identiques pour $x = y = 0$. On trouve ainsi les conditions

$$e = E, \qquad b = B.$$

Mais le centre des coniques variables est donné par les équations

$$2x = by = 2x + By = 0,$$
$$bx + 2cy + e = 0.$$

La première de ces équations est indépendante de la variable e, ce qui établit la proposition.

Question 1577.

Soit pour n infini

$$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = h,$$

dans une série à termes positifs. Démontrer que

$$\lim \sqrt[n]{\frac{u_n}{\sqrt[n]{u_1 u_2 \ldots u_n}}} = \sqrt{h}.$$

(E. Cesaro.)

SOLUTION

Par M. Servais.

Soit

$$\frac{u_2}{u_1} = p_1, \qquad \frac{u_3}{u_2} = p_2, \qquad \ldots, \qquad \frac{u_n}{u_{n-1}} = p_{n-1};$$

on a

$$p_1 p_2 \ldots p_{n-1} = \frac{u_n}{u_1},$$

$$p_2 p_3 \ldots p_{n-1} = \frac{u_n}{u_2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$p_{n-1} = \frac{u_n}{u_{n-1}};$$

donc

$$\sqrt[n]{\frac{u_n}{\sqrt[n]{u_1 u_2 \ldots u_n}}} = \sqrt[n^2]{p_1 p_2^2 p_3^3 \ldots p_{n-1}^{n-1}}.$$

Or, dans la série

$$p_1 p_2 p_2 p_3 p_3 p_3 \ldots p_{n-1} p_{n-1} \ldots p_{n-1},$$
$$\lim p_{n-1} = h;$$

donc

$$\lim \sqrt[\frac{n(n-1)}{2}]{p_1 p_2^2 \ldots p_{n-1}^{n-1}} = h;$$

par conséquent,

$$\lim \sqrt[n^2]{p_1 p_2^2 \ldots p_{n-1}^{n-1}} = \sqrt{h} = \sqrt[n]{\frac{u_n}{\sqrt[n]{u_1 u_2 \ldots u_n}}}.$$

Question 1578.

Si $\lim n^x a_n = a$. *pour* n *infini, on a*

$$\lim n^x \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} = a e^x.$$

(E. Cesaro.)

SOLUTION

Par MM. Servais et Lemaire.

Posons $\sqrt[x]{a_n} = b_n$, on a

$$\lim n b_n = \sqrt[x]{a};$$

donc

$$\lim n \sqrt[n]{b_1 b_2 \ldots b_n} = \sqrt[x]{a}\, e,$$

d'où

$$n^x \sqrt{a_1 a^2 \ldots a_n} = a e^x.$$

QUESTIONS PROPOSÉES.

1603. Soit ABC un triangle de surface maximum inscrit dans une ellipse E. — Démontrer que les cercles osculateurs à l'ellipse aux sommets de ce triangle, le cercle circonscrit, et l'ellipse ont un point commun P. — Soit P′ le symétrique de P par rapport au centre de l'ellipse : prouver que les droites P′A, P′B, P′C enveloppent une développée d'ellipse.

(LEMAIRE.)

1604. Démontrer que, si une parabole P touche les diamètres conjugués égaux d'une ellipse E, les cordes communes à l'ellipse et aux cercles osculateurs à cette courbe aux points de contact des tangentes communes à P et à E passent par un même point; la polaire de ce point par rapport à l'ellipse est tangente à la parabole. (LEMAIRE.)

1605. SP_1 et SP_2 sont des tangentes à une parabole de foyer F; des points de contact P_1 et P_2 on abaisse des perpendiculaires sur la directrice; les deux pieds de ces perpendiculaires étant p_1 et p_2, montrer que les deux triangles

$$P_1FP_2 \quad \text{et} \quad p_1Sp_2$$

ont la même aire.

(H. SCHROETER.)

1606. Le rayon de courbure en un point M de la lemniscate de Bernoulli est égal au tiers de la normale limitée à la perpendiculaire abaissée du centre O sur le rayon vecteur OM.

(D'OCAGNE.)

1607. Trouver les trajectoires orthogonales d'une sphère de rayon constant dont le centre parcourt une ligne droite.

(LUCIEN LÉVY.)

1608. Démontrer, par des considérations géométriques et par le calcul, que les trajectoires orthogonales d'une sphère de rayon constant, dont le centre parcourt une circonférence, sont des courbes sphériques. (LUCIEN LÉVY.)

QUESTIONS RÉSOLUES.

Question 1595.

Les rayons de courbure ρ_1 et ρ_2 aux extrémités A *et* B *d'une corde quelconque d'une conique sont proportionnels aux cubes des distances* CA *et* CB *de ces points au pôle* C *de la corde.*

SOLUTION.

Par M. R. de Crès, ingénieur civil.

Nous prendrons pour points de départ :

1° La formule classique

$$\rho = r\frac{dr}{dp}, \tag{1}$$

où r et ρ désignent respectivement le rayon vecteur et le rayon de courbure en un point d'une courbe quelconque et p la distance de l'origine à la tangente en ce point;

2° La proposition élémentaire suivante :

Les distances d'un point quelconque d'une médiane d'un triangle aux deux côtés qui la comprennent sont inversement proportionnelles à ses côtés. Cela résulte de ce que la médiane partage le triangle en deux parties équivalentes.

Cela posé, soient A_1 et B_1 les points où les tangentes CA et CB rencontrent une corde A'B' parallèles à AB et infiniment voisine de AB. La formule (1), appliquée aux points A et B, le point C étant pris pour origine, donne

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \lim\left(\frac{CA}{CB}\,\frac{AA_1}{BB_1}\,\frac{CQ}{CP}\right),$$

P et Q désignant les projections de C sur les tangentes en A' et en B'. Or le second rapport est manifestement égal au premier; quant au troisième, puisque les tangentes en A' et en B' se croisent en un point C' du diamètre qui joint le point C au milieu de AB, il résulte de la remarque ci-dessus (2°),

que ce rapport est égal à $\frac{C'A'}{C'B'}$, et, par suite, a pour limite $\frac{CA}{CB}$.

On a donc

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{\overline{CA}^3}{\overline{CB}^3}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

N. B. — M. Barisien et M. Lez nous ont adressé des démonstrations analytiques, correctes, mais moins simples, de la Question 1595. Cette élégante proposition n'est pas nouvelle; elle a été énoncée et démontrée presque simultanément par Liouville dans le tome VI du *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, et par Umpfenbach dans le tome 30 du *Journal de Crelle.* Depuis, divers géomètres, parmi lesquels il faut surtout citer MM. Mannheim, Paucellier, d'Ocagne, Demoulin, l'ont retrouvée comme cas particulier de formules plus générales. On lira avec grand fruit sur ce sujet le supplément à la 15[e] Leçon du *Cours de Géométrie descriptive de l'École Polytechnique* (2[e] édition), par M. Mannheim.

Question 1550.

Étant donnés un cercle fixe et une droite tournant autour d'un point fixe, on considère un cercle de rayon constant tangent au cercle et à la droite; on demande le lieu du point de contact de ce cercle et de la droite.

(D'Ocagne.)

SOLUTIONS.

Par M. H. Brocard.

Première solution. — Soient

O le point fixe;
A le centre du cercle fixe de rayon b, OA $= a$;
C le centre du cercle mobile de rayon c;
OM une tangente à ce cercle en M;
OA l'axe des x;
α, β les coordonnées du point C.

Le cercle C aura pour équation

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = c^2,$$

avec

$$(\alpha - a)^2 + \beta^2 = (b \pm c)^2.$$

La polaire MM′ de l'origine O a pour équation

$$\alpha x + \beta y + c^2 = 0.$$

Il reste donc à éliminer α, β entre ces trois équations, ce qui revient à éliminer α (ou β) entre deux équations du second degré.

Seconde solution. — Soient

$$\text{OM} = \rho, \qquad \text{MOA} = \omega, \qquad \text{CAX} = 0.$$

On a immédiatement les relations

$$\rho^2 + c^2 = a^2 + (b + c)^2 + 2a(c + b)\cos\theta,$$
$$a = \rho\cos\omega + c\sin\omega - (b + c)\cos\theta,$$

entre lesquelles l'élimination de θ donne l'équation du lieu (M),

$$b\rho = a(b + c)\cos\omega \pm \sqrt{\text{M}\sin^2\omega + \text{N}\sin\omega + \text{P}},$$

M, N, P désignant des fonctions entières de a, b, c.

Question 1562.

Soient donnés deux points P, P_1 *du plan d'un triangle* ABC *et l'on désigne de la manière suivante les points d'intersection*

$$\begin{array}{ll}
(\text{PA}, \text{BC}) = a, & (\text{P}_1\text{A}, \text{BC}) = a_1, \\
(\text{PB}, \text{CA}) = b, & (\text{P}_1\text{B}, \text{CA}) = b_1, \\
(\text{PC}, \text{AB}) = c, & (\text{P}_1\text{C}, \text{AB}) = c_1; \\
(bc_1, cb_1) = \text{A}_1, & (bc, b_1c_1) = \text{A}_2, \\
(ca_1, ac_1) = \text{B}_1, & (ca, c_1a_1) = \text{B}_2, \\
(ab_1, ba_1) = \text{C}_1, & (ab, a_1b_1) = \text{C}_2:
\end{array}$$

1° *Les cinq points* P, P_1, A_1, B_1, C_1, *sont en ligne droite;*
2° *Les quatre points*

A,	A_1,	B_2,	C_2	*sont en ligne droite*
B,	B_1,	C_2,	A_2	»
C,	C_1,	A_2,	B_2	»

3° *Les trois droites*

AA_2,	BB_2,	CC_2	*concourent au même point*		O,
aA_2,	bB_2,	cC_2	.	»	Q,
a_1A_2,	b_1B_2,	c_1C_2		»	R;

4° *Les huit points* a, b, c; a_1, b_1, c_1; Q, R *sont situés sur une même conique.* (H. Schroeter.)

SOLUTION.

Par M. Lez.

Prenons le triangle ABC pour triangle de référence, les équations des droites AP, BP, CP sont

$$(1)\qquad n\gamma - m\beta = 0, \qquad l\alpha - n\gamma = 0, \qquad m\beta - l\alpha = 0,$$

et celles de AP_1, BP_1, CP_1 sont

$$(2)\qquad n'\gamma - m'\beta = 0, \qquad l'\alpha - n'\gamma = 0, \qquad m'\beta - l'\alpha = 0.$$

Dès lors, on trouve facilement pour les droites

$$(3)\quad \left\{\begin{array}{ll} bc_1, & l'l\alpha - lm'\beta - l'n\gamma = 0 \\ cb_1, & l'l\alpha - l'm\beta - ln'\gamma = 0 \end{array}\right\} \text{ point } A_1,$$

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{ll} ca_1 & lm'\alpha - mm'\beta + mn'\gamma = 0 \\ ac_1 & l'm\alpha - mm'\beta + m'n\gamma = 0 \end{array}\right\} \text{ point } B_1,$$

$$(5)\quad \left\{\begin{array}{ll} ab_1, & l'n\alpha + mn'\beta - nn'\gamma = 0 \\ ba_1, & ln'\alpha + m'n\beta - nn'\gamma = 0 \end{array}\right\} \text{ point } C_1;$$

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{ll} bc, & l\alpha - m\beta - n\gamma = 0 \\ b_1c_1, & l'\alpha - m'\beta - n'\gamma = 0 \end{array}\right\} \text{ point } A_2,$$

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{ll} ca, & l\alpha - m\beta + n\gamma = 0 \\ c_1a_1, & l'\alpha - m'\beta + n'\gamma = 0 \end{array}\right\} \text{ point } B_2,$$

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{ll} ab, & l\alpha + m\beta - n\gamma = 0 \\ a_1b_1, & l'\alpha + m'\beta - n'\gamma = 0 \end{array}\right\} \text{ point } C_2.$$

Cela posé :

1° Une droite menée par le point T a pour équation

$$n\gamma = m\beta - \lambda(l\alpha - n\gamma) = 0;$$

elle passera par le point P_1 si cette équation est vérifiée par

$$n'\gamma - m'\beta = 0, \qquad l'\alpha - n'\gamma = 0;$$

de là la condition

$$\lambda = \frac{(m'n - mn')l'}{(ln' - l'n)m'},$$

ce qui donne pour l'équation de la droite PP_1,

$$ll'(m'n - mn')\alpha + mm'(ln' - nl')\beta + nn'(l'm - lm')\gamma = 0.$$

Cette droite passe par les points A_1, B_1, C_1, car son équation est vérifiée par les égalités (3, 4, 5).

2° A l'aide des équations (3, 4, 5), on trouve que les droites AA_1, BB_1, CC_1 sont représentées par

$$(lm' - l'm)\beta + (l'n - ln')\gamma = 0,$$
$$(lm' - l'm)\alpha + (mn' - m'n)\gamma = 0,$$
$$(l'n - ln')\alpha + (mn' - m'n)\beta = 0.$$

On voit de suite qu'elles passent : la première, par les points C_2, B_2; la deuxième, par les points A_2, C_2; la troisième, par les points A_2, B_2, car les coordonnées de A_2, B_2, C_2 sont respectivement

$$(9) \qquad -\frac{\alpha}{mn' - m'n} = \frac{\beta}{l'n - ln'} = \frac{\gamma}{lm' - l'm},$$

$$(10) \qquad \frac{\alpha}{mn' - m'n} = -\frac{\beta}{l'n - ln'} = \frac{\gamma}{lm' - l'm},$$

$$(11) \qquad \frac{\alpha}{mn' - m'n} = \frac{\beta}{l'n - ln'} = -\frac{\gamma}{lm' - l'm}.$$

3° L'équation d'une droite menée par le point A_2 étant de la forme

$$(12) \qquad l\alpha - m\beta - n\gamma - k(l'\alpha - m'\beta - n'\gamma) = 0,$$

cette droite passera par le point A, si son équation est satisfaite par $\gamma = 0$, $\beta = 0$; de là la condition $k = \frac{l}{l'}$, ce qui donne pour l'équation de la droite A_2A

$$-(lm' - l'm)\beta + (l'n - ln')\gamma = 0.$$

De même, on trouve pour les droites B_2B, C_2C,

$$+(lm' - l'm)\alpha - (mn' - m'n)\gamma = 0,$$
$$-(l'n - ln')\alpha + (mn' - m'n)\beta = 0,$$

Ces trois droites sont concourantes, car on obtient une somme nulle en ajoutant les trois équations préalablement multipliées : la première, par $(mn' - m'n)$; la deuxième, par $(l'n - ln')$; la troisième, par $(lm' - l'm)$.

De même la droite (12) passera par le point a, si son équation est vérifiée par $\alpha = 0$, $n\gamma - m\beta = 0$, ce qui donne

$$k = \frac{2mn}{m'n + mn'},$$

et, par suite, pour l'équation de $A_2 a$,

$$\begin{aligned} &n(lm' - l'm)\alpha - m(l'n - ln')\alpha \\ &\quad - m(mn' - m'n)\beta + n(mn' - m'n)\gamma = 0. \end{aligned}$$

On trouve aussi pour $B_2 b$, $C_2 c$

$$\begin{aligned} &l(l'n - ln')\alpha - n(lm' - l'm)\beta \\ &\quad + l(mn' - m'n)\beta - n(l'n - ln')\gamma = 0, \\ &- l(lm' - l'm)\alpha + m(lm' - l'm)\beta \\ &\quad + m(l'n - ln')\gamma - l(mn' - m'n)\gamma = 0. \end{aligned}$$

Ces trois droites sont encore concourantes et les coordonnées de leur point de rencontre Q sont

$$(13) \qquad \frac{\alpha}{l(mn' - m'n)^2} = \frac{\beta}{m(l'n - ln')^2} = \frac{\gamma}{n(lm' - l'm)^2}.$$

Enfin, la même droite (12) passera par le point a_1 si son équation est vérifiée par $\alpha = 0$, $n'\gamma - m'\beta = 0$, ce qui donne

$$k = \frac{2m'n'}{mn' + m'n}.$$

Par suite, l'équation de $A_2 a_1$ sera

$$\begin{aligned} &n'(l'm - lm')\alpha - m'(ln' - l')\alpha \\ &\quad - m'(m'n - mn')\beta + n'(m'n - mn')\gamma = 0; \end{aligned}$$

c'est du reste celle de $A_2 a$ dans laquelle on a permuté les accents.

Pour les droites $B_2 b_1$, $C_2 c_1$, on a

$$\begin{aligned} &l'(ln' - l'n)\alpha - n'(l'm - lm')\beta \\ &\quad + l'(m'n - mn')\beta - n'(ln' - l'n)\gamma = 0, \\ &- l'(l'm - lm')\alpha + m'(l'm - lm')\beta \\ &\quad + m'(ln' - l'n)\gamma - l'(m'n - mn')\gamma = 0, \end{aligned}$$

Ces droites concourent au point R, ayant pour coordonnées

$$(14)\quad \frac{\alpha}{l'(mn'-m'n)^2}=\frac{\beta}{m'(l'n-ln')^2}=\frac{\gamma}{n'(lm'-l'm)^2}.$$

4° Une conique représentée en général par

$$(15)\quad p\alpha^2+q\beta^2+r\gamma^2+2f\beta\gamma+2g\alpha\gamma+2h\alpha\beta=0,$$

passera par les points a, b, c, a_1, b_1, c_1, si les conditions suivantes sont satisfaites

$$\begin{aligned} &qn^2+rm^2+2fmn=0, &\quad &qn'^2+rm'^2+2fm'n'=0,\\ &pn^2+rl^2+2gln=0, &\quad &pn'^2+rl'^2+2gl'n'=0,\\ &pm^2+ql^2+2hlm=0, &\quad &pm'^2+ql'^2+2hl'm'=0. \end{aligned}$$

Ces relations fournissent de nouvelles égalités

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{qn^2+rm^2}{mn}=\frac{qn'^2+rm'^2}{m'n'}=-2f,\\ &\frac{pn^2+rl^2}{ln}=\frac{pn'+rl'^2}{l'n'}=-2g,\\ &\frac{pm^2+ql^2}{lm}=\frac{pm'^2+ql'^2}{l'm'}=-2h; \end{aligned}\right.$$

d'où l'on tire

$$qnn'-rmm'=pnn'-rll'=pmm'-qll'=0.$$

Alors on peut d'abord écrire

$$\frac{p}{ll'}+\frac{q}{mm'}=\frac{r}{nn'};$$

puis, les égalités (16) donnent

$$\begin{aligned} 2f&=-(mn'+m'n),\\ 2g&=-(l'n+ln'),\\ 2h&=-(l'm+lm'): \end{aligned}$$

par suite, l'équation (15) devient

$$ll'\alpha^2+mm'\beta^2+nn'\gamma^2-(mn'+m'n)\beta\gamma \\ -(l'n+ln')\alpha\gamma-(l'm+lm')\alpha\beta=0;$$

elle montre que cette conique passe encore par les points Q et R, car son équation est vérifiée par les coordonnées (13) et (14) de ces deux points.

N. B. — M. Emmerich nous a adressé une solution analogue.

Question 1553.

Soient A, B, a, b, c *des nombres entiers positifs, et* $100a + 10b + c$ *divisible par* $10A + B$; *démontrer que* $cA^2 - bAB + aB^2$ *est, de même, divisible.*

(P.-A. Mac-Mahon, R. A.)

SOLUTION.

Par M. H. Brocard.

Divisant $cA^2 - bAB + aB^2$ par $10A + B$ (après avoir ordonné par rapport aux puissances décroissantes de B), on trouve pour reste

$$(100a + 10b + c)A^2,$$

ce qui établit la proposition.

Question 1581.

Étant donné un quadrilatère complet, dont les six sommets opposés sont a, a_1, b, b_1, c, c_1, *on peut former les quatre triangles*

$$ab_1c_1, \quad bc_1a_1, \quad ca_1b_1, \quad abc.$$

Si l'on prend trois points en ligne droite

$$A, \quad B, \quad C,$$

les quatre coniques

$$(BCab_1c_1), \quad (BCbc_1a_1), \quad (BCca_1b_1), \quad (BCabc)$$

passent par un même point A_1;

$$(CAab_1c_1), \quad (CAbc_1a_1), \quad (CAca_1b_1), \quad (CAabc)$$

passent par un même point B_1;

$$(ABab_1c_1), \quad (ABbc_1a_1), \quad (ABca_1b_1), \quad (ABabc)$$

passent par un même point C_1.

Les points A, B_1, C_1 *sont en ligne droite; et il en est de même de* B, C_1, A_1, *et de* C, A_1, B_1. *De plus, les huit côtés des deux quadrilatères dont les sommets opposés sont* a, a_1, b, b_1, c, c_1 et A, A_1, B, B_1, C, C_1 *touchent une même conique.*

(H. SCHROETER.)

SOLUTION.

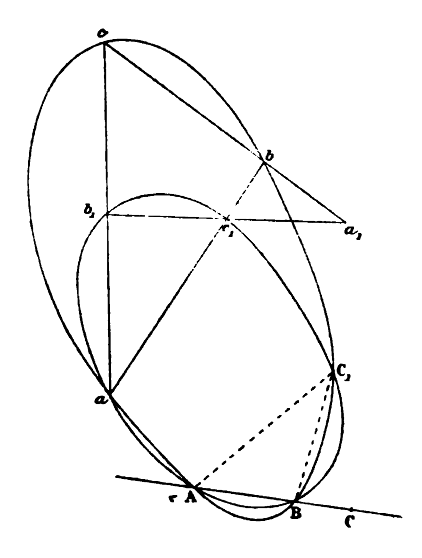
Par M. LEMAIRE.

On sait que, si plusieurs cubiques ont huit points communs, elles ont un neuvième point commun.

Il en résulte que les cubiques suivantes, formées d'une conique et d'une droite

$$(BCab_1c_1,\ a_1bc),$$
$$(BCbc_1a_1,\ b_1ca),$$
$$(BCca_1b_1,\ c_1ab),$$
$$(BCabc,\ a_1b_1c_1),$$

qui ont huit points communs : a, b, c, a_1, b_1, c_1, B et C, en ont un neuvième A_1 qui appartient forcément aux quatre



coniques. Même démonstration pour B_1 et C_1. Ceci posé, remarquons que les triangles ab_1c_1 et ABC_1 ont leurs six

côtés tangents à une même conique Δ, puisque ces deux triangles sont inscrits dans une même conique ($ABab_1c_1$).

Pour la même raison, les triangles abc et ABC_1 ont leurs six côtés tangents à une même conique Δ'.

Mais Δ et Δ' ont cinq tangentes communes, savoir : les trois côtés du triangle ABC_1 et les deux droites ab_1c et ac_1b. Par conséquent ces deux côtés coïncident, ce qui montre que la conique tangente aux quatre côtés du quadrilatère donné et à la droite ABC est tangente aux droites AC_1 et BC_1.

Elle est aussi tangente aux droites analogues BA_1 et CA_1 d'une part, CB_1 et AB_1 d'autre part.

Cette conclusion exige d'ailleurs que les six points A, A_1, B, B_1, C, C_1 soient les sommets d'un quadrilatère complet.

En effet, la conique précédente devant être à la fois tangente à AB, AC_1 et AB_1, deux de ces droites doivent se confondre, et comme A_1, B_1, C_1 ne sont pas sur ABC, les droites AC_1 et AB_1 se confondent nécessairement; autrement dit A, B_1, C_1 sont en ligne droite. Même démonstration pour B, C_1, A_1 et C, A_1, B_1.

N. B. — M. Demetreo Valeri, professeur à Modène (Italie), a également résolu la question.

Question 1603.

Soit ABC *un triangle de surface maximum inscrit dans une ellipse* E. *Démontrer que les cercles osculateurs à l'ellipse aux sommets de ce triangle, le cercle circonscrit et l'ellipse, ont un point commun* P. *Soit* P' *le symétrique de* P *par rapport au centre* O *de l'ellipse. Prouver que les droites* P'A, P'B, P'C *enveloppent une développée d'ellipse.*

(Lemaire.)

SOLUTION.

Par M. G. Darboux, élève de Mathématiques spéciales au lycée Louis-le-Grand.

Un triangle maximum inscrit dans une ellipse est la projection d'un triangle maximum inscrit dans le cercle, c'est-à-dire d'un triangle équilatéral. Par suite, les angles d'anomalie

excentrique des sommets d'un tel triangle sont

$$\varphi,\quad \varphi+\frac{2\pi}{3},\quad \varphi+\frac{4\pi}{3}.$$

On sait, d'autre part, que, si l'on appelle $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ les paramètres de quatre points d'une ellipse situés sur un même cercle, on a la relation

$$\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3+\varphi_4=2k\pi.$$

Considérons le cercle circonscrit au triangle ABC. Il coupe l'ellipse en un quatrième point dont nous allons chercher le paramètre φ'. On a

$$\varphi'+3\varphi+\frac{6\pi}{3}=2k\pi$$

ou

$$\varphi'+3\varphi=2k'\pi.$$

On peut supposer $k'=0$ et prendre $\varphi'=-3\varphi$. Soit P le point ainsi obtenu.

Considérons maintenant le cercle osculateur en un quelconque des sommets du triangle : nous pouvons toujours supposer que ce sommet est celui pour lequel l'angle d'anomalie excentrique est φ.

Ce cercle coupe l'ellipse en un quatrième point. La valeur φ'' de l'angle d'anomalie excentrique de ce point est donnée par

$$\varphi''+3\varphi=2k\pi.$$

On retrouve ainsi le point P.

La première partie de la proposition se trouve démontrée.

Soit P' la symétrique de P. L'angle d'anomalie qui lui correspond est $\pi-3\varphi$. La droite qui le joint au sommet déjà considéré du triangle a pour équation

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ a\cos\varphi & b\sin\varphi & 1 \\ a\cos(\pi-3\varphi) & b\sin(\pi-3\varphi) & 1 \end{vmatrix}=0,$$

ou, en développant et divisant par $ab(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi)$,

$$(1)\qquad \frac{x}{a\cos\varphi}+\frac{y}{b\sin\varphi}-2=0.$$

Cherchons l'enveloppe de cette droite. Nous avons pour cela à éliminer φ entre l'équation (1) et sa dérivée par rapport à φ, qui est

$$-\frac{x \sin\varphi}{a \cos^2\varphi} + \frac{y \cos\varphi}{b \sin^2\varphi} = 0.$$

On déduit de là

$$\frac{\sin^3\varphi}{ay} = \frac{\cos^3\varphi}{bx} = \frac{1}{\sqrt{ay^{\frac{2}{3}} + bx^{\frac{2}{3}}}}.$$

Par suite, l'équation de l'enveloppe est

$$\frac{x}{a\dfrac{(bx)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{ay^{\frac{2}{3}} + bx^{\frac{2}{3}}}}} + \frac{y}{b\dfrac{(ay)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{ay^{\frac{2}{3}} + bx^{\frac{2}{3}}}}} - 2 = 0$$

ou

$$(bx)^{\frac{2}{3}} + (ay)^{\frac{2}{3}} = (2ab)^{\frac{2}{3}}.$$

C'est bien l'équation de la développée d'une ellipse concentrique à l'ellipse E et dont l'équation est

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{4a^2b^2}{(a^2 - b^2)^2} = 0.$$

AUTRE SOLUTION.

Par M. BARISIEN.

On sait que les triangles d'aire maximum inscrits dans une ellipse jouissent de la propriété d'avoir leurs tangentes aux sommets A, B, C, parallèles aux côtés opposés. On sait aussi que les cordes communes à un cercle et à une ellipse sont également inclinées sur les axes de l'ellipse.

Ces propriétés étant rappelées, si P est le quatrième point de rencontre avec l'ellipse du cercle circonscrit au triangle ABC, les droites PA et CB sont également inclinées sur les axes de l'ellipse. Comme CB est parallèle à la tangente à l'ellipse en A, il en résulte que PA et cette tangente en A sont aussi également inclinées sur les axes de l'ellipse. Or, le cercle osculateur en A ayant en ce point trois points confondus, son

quatrième point d'intersection avec l'ellipse est le point P. Les cercles osculateurs en B et C ont, pour la même raison, leurs quatrièmes points d'intersection avec l'ellipse en P. Par conséquent, les cercles osculateurs en A, B, C, le cercle circonscrit à ABC et l'ellipse ont pour point commun le point P.

Il reste à trouver l'enveloppe des droites telles que P'A, laquelle sera évidemment la même que celle des droites P'B et P'C. AP et la tangente en A étant également inclinées sur les axes, il en résulte que les droites AP' et OA dont les directions sont respectivement conjuguées des précédentes, sont aussi également inclinées sur les axes.

L'équation de la droite AP' s'obtiendra donc en exprimant que son coefficient angulaire est égal et de signe contraire à celui de OA. Si φ est l'angle excentrique en A, cette équation de AP' est donc

$$y - b\sin\varphi = -\frac{b\sin\varphi}{a\cos\varphi}(x - a\cos\varphi).$$

C'est l'équation (1) de M. Darboux, et la solution s'achève comme ci-dessus. Ajoutons toutefois cette remarque :

Les normales à l'ellipse en A, B, C se coupent en un même point ω, puisque ce point est aussi le centre du cercle circonscrit au triangle formé par les pôles A', B', C' des côtés du triangle ABC. La quatrième normale abaissée de ce point ω sur l'ellipse est la droite ωP'. En effet, les quatre points A, B, C, P étant sur un même cercle, il résulte, du théorème de Joachimsthal, que le symétrique P' de P par rapport au centre de l'ellipse est le pied de la quatrième normale abaissée de ω.

AUTRE SOLUTION.

Par M. E. Lemoine.

Soient a et b les demi-axes de E; appelons E_1 le cercle qui, lorsque l'on réduit ses ordonnées dans le rapport $\frac{b}{a}$, reproduit E, les axes coordonnés étant les axes de E. Soit $A_1B_1C_1$ le triangle correspondant à ABC; P_1 et P'_1 les points qui correspondent à P et à P'.

On sait, d'après un théorème célèbre de Steiner, que par tout point P d'une ellipse E passent, en outre du cercle osculateur en P, trois autres cercles osculateurs qui coupent l'ellipse en

trois points A, B, C; on sait aussi que les points A, B, C ont pour correspondants sur le cercle E trois points A_1, B_1, C_1 qui sont les sommets d'un triangle équilatéral, c'est-à-dire que ABC est un des triangles à aire maxima inscrit à E.

La première partie de la question est la réciproque évidente de cette proposition.

Soient K et J les points où la droite $A_1P'_1$ coupe les axes des x et des y, A_1P_1 étant la droite symétrique de la tangente en A_1 au cercle E_1 par rapport à l'ordonnée de A_1 (puisque, d'après une propriété connue, AP est symétrique de la tangente en A au cercle E par rapport à l'ordonnée de A), on a facilement : angle $A_1KO = \varphi$; donc $A_1K = OA_1$, de même $A_1J = OA_1$.

Donc JK est une droite de longueur constante $2a$ qui appuie ses extrémités K et J sur les axes des x et des y; elle engendre donc une hypocycloïde à quatre rebroussements et la courbe correspondante, c'est-à-dire l'enveloppe de P'A, est la développée de l'ellipse qui a pour demi-axes $\frac{a^2 b}{a^2 - b^2}$, $\frac{ab^2}{a^2 - b^2}$, le grand axe étant dirigé comme l'axe des y. C. Q. F. D.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1609. Étudier les courbes enveloppées par les droites

$$x \cos\lambda + y \sin\lambda + P_n = 0.$$

P_n est un polynôme de degré n en λ, et λ un paramètre variable. Montrer que l'on peut disposer des constantes du polynôme P_n de manière que pour n pair les courbes n'aient aucun point de rebroussement et que pour n impair elles en aient un. Que peut-on dire des points de rebroussement lorsque les constantes demeurent quelconques?

(Lucien Lévy.)

1610. Trouver le lieu des pieds des normales abaissées d'un point donné sur les coniques d'un faisceau. (Darboux.)

1611. On donne deux faisceaux de coniques, et on demande

le lieu des points où une conique de l'un des faisceaux touche les diverses coniques de l'autre faisceau. (DARBOUX.)

1612. Démontrer que le point où la normale en un point quelconque M d'une conique rencontre l'axe non focal appartient à la droite qui joint un foyer de la conique à la projection du point M sur la directrice correspondant à ce foyer.

(E. ROUCHÉ.)

1613. Démontrer que le côté de l'heptagone régulier est égal, à moins de $\frac{1}{500}$ de sa valeur, à la moitié du côté du triangle équilatéral inscrit dans le même cercle.

(J. JOFFROY.)

1614. Dans l'espace, deux figures corrélatives peuvent toujours être placées de manière à être polaires réciproques par rapport à une quadrique réelle. (G. TARRY.)

1615. A, B, C étant trois points d'une conique, les parallèles menées par C aux tangentes en A et B coupent respectivement les rayons OA et OB issus du centre O aux points D et E; démontrer que DE est parallèle à la tangente en C.

(W.-G. GREENSTREAT M. A.)

QUESTIONS RÉSOLUES.

Question 1587.

On sait que le lieu des points d'où l'on peut mener à une ellipse des tangentes faisant entre elles un angle donné est une courbe de quatrième degré.

Démontrer que, si d'un point quelconque de cette courbe on abaisse les quatre normales à l'ellipse, réelles ou imaginaires, si N_1, N_2, N_3, N_4 *sont les distances du point aux pieds des normales,* ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4 *les rayons de courbure correspondant aux pieds des normales, on a la relation*

$$\frac{\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4}{N_1 N_2 N_3 N_3} = \text{const.}$$

(E. BARISIEN.)

SOLUTION.

Par M. L. Bosi, professeur au lycée de Chiavari (Italie).

Soit

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

l'équation de l'ellipse. Le lieu des points d'où l'on peut mener à l'ellipse des tangentes faisant entre elles un angle donné ψ a pour équation

$$(1)\quad 4(b^2\xi^2+a^2\eta^2-a^2b^2)=(\xi^2+\eta^2-a^2-b^2)^2\operatorname{tang}^2\psi,$$

où ξ, η sont les coordonnées courantes.

L'équation

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} f(x) = {} & x^4-\frac{2a^2\xi}{c^2}x^3 \\ & +\frac{a^2}{c^4}(a^2\xi^2+b^2\eta^2-c^4)x^2+\frac{2a^4\xi}{c^2}x-\frac{a^6\xi^2}{c^4}=0,\end{aligned}\right.$$

où $c^2=a^2-b^2$, donne les abscisses x_1, x_2, x_3, x_4 des pieds des normales à l'ellipse, abaissées d'un point $P(\xi,\eta)$.

Les projections de N_1, N_2, N_3, N_4 sur l'axe X sont

$$\xi-x_1,\quad \xi-x_2,\quad \xi-x_3,\quad \xi-x_4,$$

et celles de ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4 sur le même axe

$$\frac{c^2x_1}{a^4}\left(\frac{a^4}{c^2}-x_1^2\right),\quad \frac{c^2x_2}{a^4}\left(\frac{a^4}{c^2}-x_2^2\right),$$
$$\frac{c^2x_3}{a^4}\left(\frac{a^4}{c^2}-x_3^2\right),\quad \frac{c^2x_4}{a^4}\left(\frac{a^4}{c^2}-x_4^2\right).$$

On a donc

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} & \frac{\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4}{N_1N_2N_3N_4} \\ & =\frac{\left\{\begin{aligned} & c^8x_1x_2x_3x_4\left(\frac{a^2}{c}-x_1\right)\left(\frac{a^2}{c}-x_2\right)\left(\frac{a^2}{c}-x_3\right)\left(\frac{a^2}{c}-x_4\right) \\ & \qquad\times\left(\frac{a^2}{c}+x_1\right)\left(\frac{a^2}{c}+x_2\right)\left(\frac{a^2}{c}+x^3\right)\left(\frac{a_2}{c}+x_4\right)\end{aligned}\right\}}{a^{16}(\xi-x_1)(\xi-x_2)(\xi-x_3)(\xi-x_4)}.\end{aligned}\right.$$

Mais de (2) on tire

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = -\frac{a^6 \xi^2}{c^4},$$

$$\left(\frac{a^2}{c} - x_1\right)\left(\frac{a^2}{c} - x_2\right)\left(\frac{a^2}{c} - x_3\right)\left(\frac{a^2}{c} - x_4\right)$$
$$= f\left(\frac{a^2}{c}\right) = \frac{a^6 b^2}{c^6}(\xi^2 + \eta^2 + c^2 - 2c\xi),$$

$$\left(\frac{a^2}{c} + x_1\right)\left(\frac{a^2}{c} + x_2\right)\left(\frac{a^2}{c} + x_3\right)\left(\frac{a^2}{c} + x_4\right)$$
$$= f\left(-\frac{a^2}{c}\right) = \frac{a^6 b^2}{c^6}(\xi^2 + \eta^2 + c^2 + 2c\xi),$$

$$(\xi - x_1)(\xi - x_2)(\xi - x_3)(\xi - x_4)$$
$$= f(\xi) = \frac{b^2 \xi^2}{c^4}(b^2\xi^2 + a^2\eta^2 - a^2 b^2),$$

et, en substituant dans (3), on obtient

$$\frac{\rho_1 \rho_2 \rho_3 \rho_4}{N_1 N_2 N_3 N_4} = \frac{a^2 b^2 (\xi^2 + \eta^2 + c^2 - 2c\xi)(\xi^2 + \eta^2 + c^2 + 2c\xi)}{c^4 (b^2\xi^2 + a^2\eta^2 - a^2 b^2)},$$

ou, réductions faites,

$$(4) \qquad \frac{\rho_1 \rho_2 \rho_3 \rho_4}{N_1 N_2 N_3 N_4} = \frac{a^2 b^2}{c^4}\left[4 + \frac{(\xi^2 + \eta^2 - a^2 - b^2)^2}{b^2\xi^2 + a^2\eta^2 - a^2 b^2}\right].$$

Si le point $P(\xi, \eta)$ est pris sur la courbe (1), l'égalité (4) devient

$$\frac{\rho_1 \rho_2 \rho_3 \rho_4}{N_1 N_2 N_3 N_4} = \frac{4 a^2 b^2}{c^2 \sin^2 \varphi}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Question 1598.

Le lieu des centres des hyperboles équilatères osculateurs en chaque point d'une ellipse donnée est une courbe du quatrième ordre qui peut être considérée comme la podaire du centre d'une ellipse concentrique à la première.

(BARISIEN.)

SOLUTION.

Par M. AUDIBERT.

Soit

$$(1) \qquad a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$$

une ellipse rapportée à ses axes. Rapportons-la à la normale et

à la tangente en un de ses points M, son équation sera

$$x^2 + 2dxy + cy^2 + 2ey = 0,$$

et celle de l'hyperbole osculatrice en M,

$$x^2 + 2dxy - y^2 + 2ey = 0.$$

Le centre de cette hyperbole est donné par les relations

$$x + dy = 0, \tag{2}$$

$$dx - y + e = 0. \tag{3}$$

L'équation (2) représente le rayon vecteur qui passe par le centre O de l'ellipse (1) et par le point M. On voit qu'il coupe normalement la droite (3). Il en résulte que le lieu des centres des hyperboles osculatrices, quand le point M se déplace, est la podaire, relative au centre O de l'ellipse, de l'enveloppe de la droite (3).

On détermine l'équation de (3) rapportée aux axes de l'ellipse, en remarquant que cette droite, perpendiculaire au rayon vecteur OM, coupe la normale à l'ellipse en un point extérieur B tel que

$$\text{MB} = e = \text{rayon de courbure en M}(x, y).$$

Cette équation est

$$\text{Y}y + \text{X}x = a^2 + b^2$$

et celle de l'enveloppe

$$a^2\text{X}^2 + b^2\text{Y}^2 = (a^2 + b^2)^2.$$

Question 1605.

SP_1 et SP_2 sont des tangentes à une parabole de foyer F; des points de contact P_1 et P_2 on abaisse des perpendiculaires sur la directrice; les pieds de ces perpendiculaires étant p_1 et p_2, montrer que les triangles P_1FP_2 et p_1Sp_2 ont la même aire.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE.

Par M. LEMAIRE.

F et p_1 étant symétriques par rapport à SP_1, les triangles SFP_1 et Sp_1P_1 sont égaux. Il en est de même des triangles SFP_2 et Sp_2P_2.

Donc

$$\text{aire}\,\mathrm{S}p_1\mathrm{P}_1\mathrm{F}\mathrm{P}_2p_2 = 2(\text{aire}\,\mathrm{S}p_1\mathrm{P}_1 + \text{aire}\,\mathrm{S}p_2\mathrm{P}_2)$$
$$= 2 \times \text{aire}\,\mathrm{P}_1p_1p_2\mathrm{P}_2.$$

Les parties non communes à ces deux polygones sont équivalentes, ce qui démontre la proposition.

N. B. — M. Lemoine nous a envoyé aussi une solution géométrique. Quant à la vérification analytique, elle n'offre aucune difficulté : elle a été effectuée par MM. Audibert, Lez, Baudran, Louis Bardelli, Barisien et W.-J. Greenstreet M. A.

Question 1606.

Le rayon de courbure en un point M *de la lemniscate de Bernoulli est égal au tiers de la normale limitée à la perpendiculaire au rayon vecteur* OM *menée par le point* O.

(D'OCAGNE.)

SOLUTION.

Par M. LOUIS BARDELLI, élève ingénieur à l'Institut technique de Milan.

Désignons par r et θ les coordonnées polaires d'un point M d'une courbe plane, par ρ le rayon de courbure en ce point, par p la distance du pôle O à la tangente en M, enfin par n la normale en M limitée à la perpendiculaire menée par le pôle sur le rayon vecteur OM ; on a

$$(1) \qquad p = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}}, \qquad pn = r^2, \qquad \rho = r\frac{dr}{dp}.$$

L'application de la première formule à l'équation

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta$$

de la lemniscate de Bernoulli donne

$$p = \frac{r^3}{a^2}, \qquad \text{d'où} \qquad \frac{dr}{dp} = \frac{a^2}{3r^2},$$

et, en portant ces valeurs dans les deux dernières équa-

tions (1), on obtient

$$n = \frac{a^2}{r}, \qquad \rho = \frac{a^2}{3r} = \frac{n}{3}.$$

N. B. — Ont aussi résolu la question : MM. Lez, Audibert, Balitrand, Barisien, Dertoux et W.-J. Greenstreet M. A. M. Barisien fait observer que, pour la courbe plus générale,

$$r^m = a^m \cos m\theta,$$

on a

$$\rho = \frac{n}{m+1};$$

pour $m = 2$, on a le théorème énoncé. Pour $m = -2$, la courbe est une hyperbole équilatère, et l'on a

$$\rho = -n.$$

Question 1602.

Par les sommets A, B, C *d'un triangle inscrit dans une conique, on mène à la courbe des tangentes qui rencontrent les côtés opposés en* A′, B′, C′; *les milieux de* AA′, BB′, CC′ *sont en ligne droite.*

Dans le cas particulier du cercle, cette droite est l'axe radical du cercle circonscrit et du cercle des neuf points.

(F. Farjon.)

SOLUTION

Par M. E. Lemoine.

Soit

$$(1) \qquad Lyz + Mzx + Nxy = 0$$

l'équation en coordonnées normales de la conique circonscrite à ABC.

Les coordonnées de A′, B′, C′ seront

$$0, \ -M, \ N; \quad L, \ 0, \ -N; \quad -L, \ M, \ 0;$$

celles des milieux A_1, B_1, C_1 de AA′, BB′, CC′ seront

$$\begin{array}{ccc} bM - cN, & aM, & -aN, \\ -bL, & cN - aL, & bN, \\ cL, & -cM, & aL - bM, \end{array}$$

et ces trois points sont sur la droite

$$(2)\quad \begin{cases} ax(bM + cN - aL) \\ \quad + by(cN + aL - bM) + cz(aL + bM - cN) = 0. \end{cases}$$

Si la conique est le cercle circonscrit, L, M, N sont a, b, c, et cette droite devient

$$x \cos A + y \cos B + z \cos C = 0,$$

qui représente l'axe orthique du triangle ABC, qui est, en effet, l'axe radical du cercle circonscrit et du cercle de *Feuerbach*.

Remarques. — Si les équations (1) représentent des hyperboles équilatères, la droite (2) passe par le point

$$\cos A(b \cos B + c \cos C), \quad \ldots.$$

Si les équations (1) représentent des paraboles, la droite (2) enveloppera l'ellipse de *Steiner* inscrite au triangle.

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE

Par M. W.-J. Greenstreet M. A.

Soient A, B″, C, A″, B, C″ six points sur une conique. En supposant que A″, B″, C″ s'approchent de A, B, C, nous obtenons, à la limite, le triangle inscrit ABC avec les tangentes aux sommets. Le théorème de Pascal nous donne :

Les tangentes AA′, ... rencontrent BC, ... en trois points en ligne droite. Donc BCB′C′ est un quadrilatère complet, et les milieux des diagonales AA′, BB′, CC′ sont en ligne droite.

On peut remarquer que la droite sur laquelle ces milieux se trouvent est le lieu des centres de toutes les coniques inscrites dans BCB′C′ (*Nouv. Ann.*, t. I, p. 24; 1862).

Le cas particulier du cercle ne présente aucune difficulté.

Question 1607.

Trouver les trajectoires orthogonales d'une sphère de rayon constant dont le centre parcourt une ligne droite.

(Lucien Lévy.)

SOLUTION

Par M. Dertoux.

Soit Ox la ligne droite parcourue par le centre de la sphère. Les trajectoires orthogonales ont leurs tangentes normales

aux plans tangents de la sphère mobile; ces tangentes passent donc constamment par le centre de la sphère, c'est-à-dire rencontrent la droite Ox. Si nous considérons les plans osculateurs déterminés par trois tangentes infiniment voisines, on voit que ces deux plans ont une tangente commune et contiennent aussi la droite Ox; donc ils se confondent et l'on en conclut que la courbe est plane. Le segment de la tangente intercepté entre le point de contact et Ox est constant et égal au rayon de la sphère.

Les trajectoires orthogonales sont donc des tractrices.

Traitons la question par l'Analyse.

Soit α la distance du centre de la sphère à l'origine O.

L'équation de la sphère est

$$(x-\alpha)^2+y^2+z^2=R^2.$$

Les équations différentielles des trajectoires orthogonales sont

$$\frac{dx}{x-\alpha}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z},$$

où

$$x-\alpha=\sqrt{R^2-y^2-z^2};$$

d'où

$$\frac{y\,dy+z\,dz}{y^2+z^2}=\frac{dx}{\sqrt{R^2-y^2-z^2}}$$

et, en posant,

$$y^2+z^2=u^2, \qquad dx=\frac{du\sqrt{R^2-u^2}}{u},$$

ce qui est l'équation différentielle de la tractrice.

[Les deux dernières équations (1) donnent $y=Cz$ et montrent que la courbe est plane.]

Question 1608.

Démontrer, par des considérations géométriques et par le calcul, que les trajectoires orthogonales d'une sphère de rayon constant, dont le centre parcourt une circonférence, sont des courbes sphériques.

SOLUTION

Par M. Dertoux.

Les tangentes aux trajectoires orthogonales rencontrent constamment la circonférence C que décrit le centre de la

sphère, et le segment intercepté entre le point de contact et la circonférence C est toujours égal à R (rayon de la sphère).

Les trajectoires orthogonales sont donc des courbes équitangentielles.

Soient

DA, EB deux tangentes à une trajectoire, infiniment voisines;
D, E les points de contact;
A et B les points de rencontre avec la circonférence C.

Menons, dans le plan ADB des deux tangentes, les normales DO, EO qui se rencontrent au centre de courbure O.

Les triangles rectangles DOA, EAB sont égaux et

$$AO = BO.$$

Le point O est donc sur la perpendiculaire élevée dans le plan ABD sur le milieu de AB; et, à la limite, le centre de courbure est sur la normale à la circonférence C menée en A dans le plan osculateur correspondant de la trajectoire.

Le plan osculateur étant tangent en A à la circonférence C, l'axe de ce plan mené en O se trouve dans le plan normal en A à la circonférence C; il rencontre donc la perpendiculaire m au plan de cette circonférence menée par le centre.

On voit que les axes des plans osculateurs d'une trajectoire orthogonale rencontrent constamment la perpendiculaire m. Deux plans normaux quelconques de la trajectoire infiniment voisins rencontrent donc la perpendiculaire m au même point, et comme chacun n'a qu'un point sur cette ligne, il est facile d'en conclure que tous la rencontrent au même point et que la trajectoire orthogonale est sphérique.

Traitons la question par l'Analyse.

Prenons pour xOy le plan de C, et la perpendiculaire élevée au centre pour Oz.

Soient α et β les coordonnées du centre de la sphère.

L'équation de la sphère est

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+z^2=R^2.$$

Les équations différentielles des trajectoires sont

$$\frac{dx}{x-\alpha}=\frac{dy}{y-\beta}=\frac{dz}{z}.$$

L'équation du plan normal à une trajectoire est

$$(1)\qquad (X-x)\,dx+(Y-y)\,dy+(Z-z)\,dz=0$$

ou

$$(2)\quad (X-x)(x-\alpha)+(Y-y)(y-\beta)+(Z-z)z=0.$$

L'équation du plan normal infiniment voisin est

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &(X-x-dx)(x-\alpha+dx-d\alpha)\\ &\quad+(Y-y-dy)(y-\beta+dy-d\beta)\\ &\qquad\qquad+(Z-z-dz)(z+dz)=0.\end{aligned}\right.$$

Les équations (2) et (3) déterminent l'axe du plan osculateur au point (x, y, z).

En tenant compte de (1) et de (2), l'équation (3) devient

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &X\,d\alpha+Y\,d\beta-x\,d\alpha-y\,d\beta\\ &\quad+(x-\alpha)\,dx+(y-\beta)\,dy+z\,dz=0.\end{aligned}\right.$$

Or, en différentiant l'équation de la sphère, on obtient, en remarquant que $\alpha\,d\alpha+\beta\,d\beta=0$,

$$(x-\alpha)\,dx+(y-\beta)\,dy+z\,dz-x\,d\alpha-y\,d\beta=0.$$

L'équation (4) se réduit donc à

$$X\,d\alpha+Y\,d\beta=0.$$

Ce qui montre que l'axe du plan osculateur rencontre Oz, condition suffisante pour que la courbe soit sphérique.

Question 1610.

Trouver le lieu des pieds des normales abaissées d'un point donné sur les coniques d'un faisceau. (Darboux.)

SOLUTION

Par M. Barisien.

Le faisceau des coniques passant par les points d'intersection de

$$S=ax^2+2bxy+cy^2+2dx+2ey+f=0,$$
$$S'=a'x^2+2b'xy+c'y^2+2d'x+2e'y+f'=0$$

a pour équation

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} S+\lambda S'=[(a+\lambda a')x^2&+2(b+\lambda b')xy\\ &+(c+\lambda c')y^2+2(d+\lambda d')x\\ &\qquad+2(e+\lambda e')y+f+\lambda f']=0.\end{aligned}\right.$$

D'autre part, l'hyperbole des pieds des normales abaissées du point donné (α, β) a pour équation

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &[(b+\lambda b')x+(c+\lambda c')y+e+\lambda e'](\alpha-x)\\ &\quad=[(a+\lambda a')x+(b+\lambda b')y+d+\lambda d'](\beta-y).\end{aligned}\right.$$

Pour avoir le lieu demandé, il faut éliminer λ entre (1) et (2), ce qui donne

$$\begin{aligned} &S'[(bx+cy+e)(\alpha-x)-(ax+by+d)(\beta-y)]\\ &\quad=S[(b'x+c'y+e')(\alpha-x)-(a'x+b'y+d')(\beta-y)].\end{aligned}$$

Or les quantités entre crochets représentent les hyperboles des normales abaissées de (α, β) sur les coniques S et S'. Si nous représentons ces hyperboles par H et H', l'équation du lieu peut s'écrire

$$(3)\qquad S'H-SH'=0.$$

C'est donc une quartique passant par les seize points d'intersection de

$$\left\{\begin{aligned}S&=0,\\ S'&=0,\end{aligned}\right.\quad \left\{\begin{aligned}H&=0,\\ H'&=0,\end{aligned}\right.\quad \left\{\begin{aligned}S&=0,\\ H&=0,\end{aligned}\right.\quad \left\{\begin{aligned}S'&=0,\\ H'&=0.\end{aligned}\right.$$

Si $a=a'$, $b=b'$, $c=c'$, c'est-à-dire si les deux coniques S et S' ont mêmes directions et mêmes longueurs d'axes, la quartique (3) se réduit à une conique.

Question 1612.

Démontrer que le point N, *où la normale en un point quelconque* M *d'une conique rencontre l'axe non focal, appartient à la droite qui joint un foyer* F *de la conique à la projection* D *du point* M *sur la directrice correspondant à ce foyer.* (E. Rouché.)

SOLUTION

Par M. H. BROCARD.

Soit P la projection du point M sur l'axe non focal YPN. O étant le centre de la conique, on aura

$$\mathrm{ON} = \frac{c^2}{b^2} y.$$

La propriété énoncée sera établie si l'on a la proportion

$$\frac{\mathrm{OF}}{\mathrm{PD}} = \frac{\mathrm{ON}}{\mathrm{ON} + \mathrm{OP}}$$

ou

$$\frac{c^2}{a^2} = \frac{\mathrm{ON}}{\mathrm{ON} + y}.$$

Elle donne pour ON la même valeur $\frac{c^2}{b^2} y$.

N. B. — Solution analogue de M. H. Lez.

Question 1613.

Démontrer que le côté de l'heptagone régulier est égal, à moins de $\frac{1}{500}$ de sa valeur, à la moitié du côté du triangle équilatéral inscrit dans le même cercle. (J. JOFFROY.)

SOLUTION

Par M. H. BROCARD.

Cette construction fournit une solution approchée du problème proposé et résolu, il y a quarante ans, dans ce *Journal*, et attribué à Viète :

Soit une circonférence, A *le centre,* CAB *un diamètre. Sur* CB *prolongé prenez un point* D *tel que l'on ait*

$$\mathrm{DB}.\overline{\mathrm{DC}}^2 = \mathrm{AD}.\overline{\mathrm{AB}}^2.$$

Du point D *comme centre, et d'un rayon* AB, *décrivez une circonférence coupant en* E *une circonférence donnée. L'arc* BE *est la septième partie de la circonférence.* (Question 226, t. IX, p. 151 et 233; 1850.)

La construction de l'énoncé 1613 donnerait

$$x = \cos\frac{2\pi}{7} = \frac{5}{8};$$

celle du n° 226 donnerait

$$8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0.$$

La substitution

$$x = \frac{5}{8} \quad \text{donne} \quad \frac{1}{81}.$$

Notes. — 1. Sur le même sujet, voir *loc. cit.*, p. 51 et 279.
2. Viète a également indiqué une construction de l'ennéagone régulier (Ritter, *Ass. fr. Congrès de Montpellier*, p. 149; 1879).

Question 1562 [1].

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE.

Par M. P. Sondat.

1. Les pascales

$$\left\{\begin{array}{l} bBb_1cCc_1,\\ aAa_1cCc_1,\\ aAa_1bBb_1,\end{array}\right. \quad \text{savoir} \quad \left\{\begin{array}{l} rr_1A_1,\\ rr_1B_1,\\ rr_1C_1,\end{array}\right.$$

ayant deux points communs se superposent, donc on a la droite $rr_1A_1B_1C_1$.

2 et 3. Comme on a

$$\left(\frac{aB}{aC}\,\frac{bC}{bA}\,\frac{cA}{cB}\right)\left(\frac{a_1B}{a_1C}\,\frac{b_1C}{b_1A}\,\frac{c_1A}{c_1B}\right) = +1,$$

puisque chacun des produits entre parenthèses est égal à -1, l'hexagone $abca_1b_1c_1$ est inscriptible dans une conique, d'où les nouvelles pascales

$$(1) \qquad \left\{\begin{array}{l} cabc_1a_1b_1\\ cbac_1b_1a_1\\ acba_1c_1b_1\end{array}\right. \quad \text{ou} \quad \left\{\begin{array}{l} A_1B_2C_2,\\ B_1A_2C_2,\\ C_1A_2B_2.\end{array}\right.$$

---

[1] Voir l'énoncé, p. 13*.

Désignons par

λ, μ, ν les points (B_2C_2, bc), (A_2C_2, ac), (A_2B_2, ab),
λ_1, μ_1, ν_1 » (B_2C_2, b_1c_1), (A_2C_2, a_1c_1), (A_2B_2, a_1b_1),
L, M, N » (BC, B_2C_2), (AC, A_2C_2), (AB, A_2B_2),
I, H, K » (BC, bc), (AC, ac), (AB, ab),
I_1, H_1, K_1 » (BC, b_1c_1), (AC, a_1c_1), (AB, a_1b_1).

Il résulte des pascales

$$\begin{cases} cabBA_2C, \\ cbaAB_2C, \\ acbBC_2A, \end{cases} \quad \text{savoir} \quad \begin{cases} r\mu\nu, \\ r\lambda\nu, \\ r\lambda\mu, \end{cases}$$

que $\lambda\mu\nu$ est une droite passant par r, d'où le système homologique

$$(\text{centre Q}) \left| \begin{matrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ a & b & c \end{matrix} \right| (\text{axe } \lambda\mu\nu).$$

Il est évident qu'on a de même

$$(\text{centre R}) \left| \begin{matrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{matrix} \right| (\text{axe } \lambda_1\mu_1\nu_1)$$

et que $\lambda_1\mu_1\nu_1$ passe par r_1.

En considérant le triangle $A_2B_2C_2$ comme coupé par les deux sécantes $\lambda\mu\nu$ et $\lambda_1\mu_1\nu_1$, on voit que les pascales

$$\begin{cases} \nu\mu_1\, B_2\,\mu\nu_1\, C_2, \\ \lambda\nu_1\, C_2\,\nu\lambda_1\, A_2, \\ \lambda\mu_1\, C_2\,\mu\lambda_1\, A_2, \end{cases}$$

forment un triangle inscrit dans $A_2B_2C_2$, et, comme ce triangle n'est autre que ABC, les points A, B, C appartiennent respectivement aux droites (1).

On a alors les pascales

$$\begin{cases} C_2A_2B_2bAc, \\ C_2R_2A_2aBc, \\ A_2C_2B_2bCa, \end{cases} \quad \text{savoir} \quad \begin{cases} QMN, \\ QLN, \\ QLM; \end{cases}$$

LMN est donc une droite passant par Q, et l'on a le système

homologique

$$(\text{centre O}) \left| \begin{matrix} A & B & C \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{matrix} \right| (\text{axe LMN}).$$

Les pascales

$$\left\{ \begin{matrix} CABB_2aC_2, \\ CBAA_2bC_2, \\ ACBB_2cA_2, \end{matrix} \right. \quad \text{savoir} \quad \left\{ \begin{matrix} OKH, \\ OIK, \\ OIH \end{matrix} \right.$$

montrent aussi que IHK est une droite passant par O.

On prouverait de même, en remplaçant a, b, c par a_1, b_1, c_1, que LMN passe par R et $I_1 H_1 K_1$ par O.

4. On voit par les hexagones

$$\left\{ \begin{matrix} a\ Q b b_1 c_1 a_1, \\ a_1 R b_1 b\ c\ a, \end{matrix} \right.$$

dont les côtés opposés se coupent aux points A_2, B_2, C_2 en ligne droite, que la conique $abca_1b_1c_1$ passe par les points Q et R.

Il est évident que si les points r et r_1 sont, l'un l'orthocentre de ABC et l'autre le centre de gravité, cette conique devient le cercle des *neuf points*, qui passe de plus par les points Q et R.

Question 1560.

Trouver le rayon d'un cercle passant par les points dont les coordonnées trilinéaires sont

$$(-a, b, c)(a, -b, c)(a, b, -c).$$

(B. Hanumanta Rau, B. A.)

SOLUTION.

Par M. Barisien.

Soit ABC le triangle de référence dont les côtés ont pour longueurs α, β, γ, et dont la surface est S.

Nous avons les trois relations

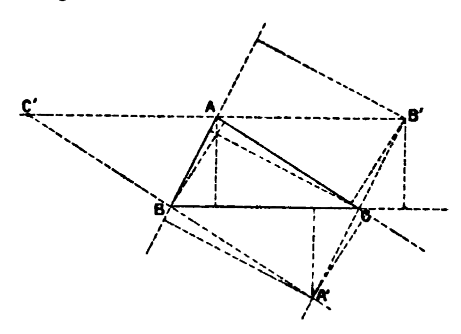
$$\begin{aligned} -a\alpha + b\beta + c\gamma &= 2S, \\ a\alpha - b\beta + c\gamma &= 2S, \\ a\alpha + b\beta - c\gamma &= 2S, \end{aligned}$$



qui se réduisent à

$$a\alpha = b\beta = c\gamma = 2S,$$

ce qui indique que les longueurs *a*, *b*, *c* sont égales aux hauteurs du triangle de référence.



Si donc nous menons par les sommets A, B, C des parallèles aux côtés opposés, il est évident que les sommets A'B'C' du triangle ainsi formé ont respectivement pour coordonnées

$$\begin{aligned} &A', \quad (-a, b, c),\\ &B', \quad (-b, a, c),\\ &C', \quad (-c, a, b). \end{aligned}$$

Si R et R' sont les rayons des cercles circonscrits aux triangles ABC et A'B'C', on aura

$$R = \frac{\alpha\beta\gamma}{4S},$$

et comme, dans le triangle A'B'C', les côtés sont le double de ceux du triangle ABC, et la surface le quadruple, on aura aussi

$$R' = \frac{(2\alpha)(2\beta)(2\gamma)}{4(4S)} = \frac{\alpha\beta\gamma}{2S}.$$

Donc

$$R' = 2R,$$

ce qui indique que *le rayon du cercle passant par les points définis par l'énoncé est égal à deux fois le rayon du cercle circonscrit au triangle de référence.*

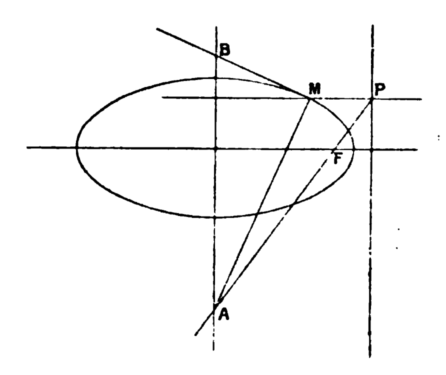
N. B. — M. Victor de Strélakof nous a envoyé une solution analogue.

Question 1612 (*voir* l'énoncé p. 35*).

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE

Par M. Duporcq.

Soient A et B les points où l'axe non focal coupe respectivement la normale et la tangente au point M.



L'angle AFB étant, comme on sait, droit, la droite AF est conjuguée de la droite BF : elle passe donc par son pôle qui est évidemment la projection P de M sur la directrice correspondant au foyer F.

Question 1615.

A, B, C *étant trois points d'une conique, les parallèles menées par* C *aux tangentes en* A *et* B *coupent respectivement les rayons* OB *et* OA *issus du centre* O *aux points* D *et* E; *démontrer que* DE *est parallèle à la tangente en* C.

(W.-J. Greenstreat, M. A.).

SOLUTION

Par M. Duporcq.

La conique homothétique de la conique donnée par rapport au point C, qui passe par le centre O, passe évidemment aussi par les points d'intersection α et β des droites OE et CD, OD

et CE. Il suffit d'appliquer le théorème de Pascal à l'hexagone inscrit $O\alpha CC\beta O$ pour vérifier que la droite DE est parallèle aux tangentes aux points O et C.

N. B. — MM. Brocard, Barisien et Lez nous ont envoyé une solution analytique de la même question.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1616. La tangente en un point de la développée d'une conique coupe cette développée en quatre points, outre le point de contact. Démontrer que les tangentes en ces points sont concourantes et se coupent sur le cercle décrit sur la distance focale pour diamètre. (Ernest Duporcq.)

1617. Si les normales à une parabole aux points A, B, C concourent en un même point P, et que les normales PA, PB, PC rencontrent la parabole en A′, B′, C′, les cercles décrits sur PA′, PB′ et PC′ comme diamètres sont tangents respectivement à BC, CA, AB. En outre, si α, β, γ sont les points de contact correspondants, les droites $A'\alpha$, $B'\beta$, $C'\gamma$ sont tangentes à la parabole en A′, B′, C′. (D'Ocagne.)

1618. On donne trois points dans un plan divisant respectivement les trois côtés d'un triangle dans des rapports donnés $\frac{m}{n}$; $\frac{m'}{n'}$, $\frac{m''}{n''}$, construire le triangle. (F. Farjon.)

1619. Si deux surfaces S et Σ se correspondent point par point, suivant une loi déterminée, et si o, a, b, c sont quatre points infiniment voisins de la première S et ω, α, β, γ les quatre points correspondants de la seconde Σ, on a les analogies

$$\frac{oa}{\sin boc} : \frac{\omega\alpha}{\sin\beta\omega\gamma} = \frac{ob}{\sin coa} : \frac{\omega\beta}{\sin\gamma\omega\alpha} = \frac{oc}{\sin aob} : \frac{\omega\gamma}{\sin\alpha\omega\beta}.$$

(E. Rouché.)

1620. En un point quelconque M d'une ellipse, on mène les

rayons vecteurs focaux MF et MF′ qui ont leurs seconds points de rencontre avec l'ellipse en P et P′. Montrer que :

1° Les cercles ayant pour diamètre FM, F′M, FP, F′P′ sont tangents au cercle décrit sur le grand axe de l'ellipse comme diamètre.

2° Le lieu du point de rencontre des tangentes communes extérieures aux cercles de diamètres FM et FP est une ligne droite.

3° Le lieu du point de rencontre des tangentes communes extérieures aux cercles de diamètre FM et F′M est une quartique. Montrer que la portion d'aire comprise entre la courbe et ses asymptotes est égale aux trois quarts de l'aire de l'ellipse. (BARISIEN.)

QUESTIONS RÉSOLUES (¹).

Question 1593.

Si l'on appelle O *et* R *le centre et le rayon du cercle circonscrit à un triangle* ABC, I *et* r *le centre et le rayon du cercle inscrit,* H *l'orthocentre,* a, b, c *les côtés,* 2p *le périmètre et* S *la surface du triangle* OIH $(a > b > c)$:

1° *On a*

$$S = 2R^2 \sin\frac{B-C}{2} \sin\frac{A-C}{2} \sin\frac{A-B}{2},$$

$$S = \frac{(b-c)(a-c)(a-b)}{8r},$$

$$16S^2 = -p^4 + 2(2R^2 + 10Rr - r^2)p^2 - r(4R+r)^3.$$

2° *Si* I′ *et* r′ *sont le centre et le rayon du cercle ex-inscrit dans l'angle intérieur* A *et* S′ *la surface du triangle* OI′H,

---

(¹) M. Barisien a adressé une solution de la question 1613. C'est par erreur que son nom a été omis à la suite de la solution donnée dans le précédent numéro, p. 37*.



on a aussi

$$S' = 2R^2 \sin\frac{B-C}{2}\cos\frac{A-C}{2}\cos\frac{A-B}{2},$$

$$S' = \frac{(b-c)(a+c)(a+b)}{8r'},$$

$$S + S' = R^2 \sin(B-C).$$

3° *La condition*

$$p^4 - 2(R^2 + 10Rr - r^2)p^2 + r(4R+r)^3 \leqq 0$$

exprime que le triangle ABC *est possible avec les éléments* p, R, r. (R. SONDAT.)

SOLUTION,

Par M. E. LEMOINE.

Les coordonnées normales absolues de O, I, H sont respectivement

$$R\cos A,\quad R\cos B,\quad R\cos C;$$

$$r,\quad r,\quad r;$$

$$2R\cos B\cos C,\quad 2R\cos C\cos A,\quad 2R\cos A\cos C.$$

On aura donc, en appelant T l'aire CBA,

$$\text{aire OIH} = S = -\frac{R}{2T}\begin{vmatrix} R\cos A & R\cos B & R\cos C \\ r & r & r \\ 2R\cos B\cos C & 2R\cos C\cos A & 2R\cos A\cos B \end{vmatrix},$$

d'où

$$S = \frac{Rr}{4T}[a\cos A(c-b) + b\cos B(a-c) + c\cos C(b=a)],$$

d'où

$$S = \frac{r}{32T^2}[a^2(b^2+c^2-a^2)(c-b) + b^2(c^2+a^2-b^2)(a-c) + c^2(a^2+b^2-c^2)(b-a)];$$

il est facile de mettre, dans le polynôme entre crochets, $b-c$, $a-c$, $a-b$ en facteurs, et l'on aura alors

$$S = \frac{r}{32T^2}4p^2(b-c)(a-c)(a-b) = \frac{(b-c)(a-c)(a-b)}{8r}.$$

Au moyen des valeurs de $\sin\frac{B}{2}$, $\cos\frac{B}{2}$, ... en fonction des côtés, on a facilement

$$\sin\frac{B-C}{2} = \frac{1}{a}\,\frac{\sqrt{p(p-a)}}{bc}\,(b-c),$$

d'où l'on déduit immédiatement

$$2R^2\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{A-C}{2}\sin\frac{A-B}{2} = \frac{(b-c)(a-c)(a-b)}{8r}.$$

L'équation

$$X^3-(a+b+c)X^2+(bc+ca+ab)X-abc=0,$$

qui peut s'écrire

$$(1)\qquad X^3-2pX^2+[p^2+r(4R+r)]X-4pRr=0,$$

a évidemment a, b, c pour racines.

Le dernier terme de l'équation aux carrés des différences de cette équation est

$$-4[p^2r^2(4R^2+20Rr-2r^2-p^2)-r^3(4R+r)^3],$$

il est aussi

$$-(b-c)^2(a-c)^2(a-b)^2;$$

on en déduit

$$16S^2=-p^4+2(rR^2+10Rr-r^2)p^2-r(4R+r)^3.$$

En suivant exactement la même marche, on obtiendrait

$$S'=\frac{(b-c)(a+c)(a+b)}{8r'}$$

et

$$S'=2R^2\sin\frac{B-C}{2}\cos\frac{A-C}{2}\cos\frac{A-B}{2}.$$

Enfin on a

$$S+S'=2R^2\sin\frac{B-C}{2}\left(\sin\frac{A-C}{2}\sin\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A-C}{2}\cos\frac{A-B}{2}\right)$$

ou

$$S+S'=2R^2\sin\frac{B-C}{2}\cos\frac{B-C}{2}=R^2\sin(B-C).$$

Ajoutons à l'énoncé qu'on obtiendrait aussi l'équation

(2) $$16S'^2 = -(p-a)^4 + 2(2R^2 - 10Rr' - r'^2)(p-a)^2 + r'(4R - r')^3,$$

en suivant la même marche que pour obtenir $16S^2$, mais en employant, au lieu de l'équation (1), l'équation

$$X^3 + 2(p-a)X^2 \\ + [(p-a)^2 - r'(4R - r')]X - 4(p-a)Rr' = 0,$$

qui a pour racines a, $-b$, $-c$.

Considérons l'équation

$$X^3 - pX^2 + r(4R + r)X - pr^2 = 0;$$

elle a pour racines $p-a$, $p-b$, $p-c$.

Or, comme p, r, R sont positifs, cette équation ne peut avoir de racines négatives; donc, si toutes ses racines sont réelles, c'est-à-dire si l'on a, d'après la condition de réalité des racines de l'équation du troisième degré,

$$p^4 - 2(2R^2 + 10Rr - r^2)p^2 + r(4R + r)^3 \leqq 0.$$

On pourra former un triangle avec les racines p, R, r, puisque, $p-a$, $p-b$, $p-c$ étant positifs, un côté quelconque sera plus petit que la somme des deux autres.

De même, la condition pour qu'il y ait effectivement un triangle avec les données R, r', $(p-a)$ est

$$(p-a)^4 - 2(2R^2 - 10Rr' - r'^2)(p-a)^2 - r'(4R - r')^3 \leqq 0.$$

Remarque. — Si S'' et S''' sont les aires des triangles $OI''H$, $OI'''H$, I'' et I''' étant les centres des cercles existants dans les angles intérieurs B et C, on aura

$$S + S' + S'' + S''' = 0.$$

La condition

$$p^4 - 2(2R^2 + 10Rr - r^2)p^2 + r(4R + r)^3 < 0$$

exprime que l'équation

$$X^3 - 2pX^2 + [p^2 + r(4R + r)]X - 4Rpr = 0$$

a ses trois racines réelles; on voit facilement qu'elles sont toutes trois positives.

Appelons-les a, b, c, et soit a la plus grande et c la plus petite.

Pour qu'il y ait effectivement un triangle qui puisse être formé avec a, b, c, il suffira que l'on ait $a < b + c$ ou que

$$(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$$

soit positif.

Mais ce produit peut s'écrire

$$4(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)-(a^2+b^2+c^2)^2,$$

ou, en remarquant que ces fonctions symétriques sont égales respectivement à

$$4[p^2-r(4R+r)]^2+16p^2r^2,$$

et à

$$4[p^2-r(4R+r)]^2,$$

ce produit est

$$16p^2r^2$$

toujours positif. C. Q. F. D.

Si

$$p^4-2(2R^2+10Rr-r^2)p^2+r(4R+r)^3=0,$$

le triangle est isoscèle.

N. B. — M. Alexander Andersen, professeur au Collège Royal de Galway (Irlande), nous a envoyé une solution analogue.

Question 1611.

On donne deux faisceaux de coniques, et l'on demande le lieu des points où une conique de l'un des faisceaux touche les diverses coniques de l'autre faisceau.

(Darboux.)

SOLUTION,

Par M. Barisien.

Les équations d'une conique de chaque faisceau peuvent s'écrire

$$(1) \qquad C = S + \lambda T = 0,$$

$$(2) \qquad C_1 = S_1 + \lambda_1 T_1 = 0,$$

dans lesquelles λ et λ_1 sont des paramètres variables, et où

$$\begin{aligned} S &= Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F, \\ T &= ax^2 + \ldots + f, \\ S_1 &= A_1x^2 + \ldots + F_1, \\ T_1 &= a_1x^2 + \ldots + f_1. \end{aligned}$$

Pour avoir lè lieu des points de contact de deux coniques (1), (2), il faut éliminer λ_1 et λ_2 entre les équations (1) et (2) et la suivante

$$\frac{C'_x}{C'_y} = \frac{C'_{1x}}{C'_{1y}}, \tag{3}$$

C'_x et C'_y désignant les dérivées de C par rapport à x et à y. En effet, désignons par

$$D = 0 \tag{4}$$

l'équation de la tangente, laquelle contiendrait les paramètres λ et λ_1. Une conique quelconque, tangente à la droite D au même point que la conique C, a pour équation $C + \mu D = 0$. Exprimons que cette conique est un système de deux droites dont le point de concours, c'est-à-dire le centre, est à la fois sur C et sur D. Les équations du centre sont

$$C'_x + \mu D'_x = 0, \qquad C'_y + \mu D'_y = 0,$$

d'où

$$\frac{C'_x}{C'_y} = \frac{D'_x}{D'_y}. \tag{5}$$

Il faudrait donc éliminer λ et λ_1 entre les équations (1), (4) et (5). En appliquant le même raisonnement à la conique C_1 on aura aussi la relation

$$\frac{C'_{1x}}{C'_{1y}} = \frac{D'_x}{D'_y}, \tag{6}$$

et la comparaison de (5) et (6) donne bien la relation (3).

Cela posé, écrivons l'équation (3) sous la forme

$$\frac{S'_x + \lambda T'_x}{S'_y + \lambda T'_y} = \frac{S'_{1x} + \lambda_1 T'_{1x}}{S'_{1y} + \lambda_1 T'_{1y}}.$$

En y remplaçant λ et λ_1 par les valeurs

$$\lambda = -\frac{S}{T}, \qquad \lambda_1 = -\frac{S_1}{T_1},$$

tirées de (1) et (2), on a, pour l'équation du lieu demandé,

$$(7) \qquad \frac{TS'_x - ST'_x}{TS'_y - ST'_y} = \frac{T_1 S'_{1x} - S_1 T'_{1x}}{T_1 S'_{1y} - S_1 T'_{1y}}.$$

C'est une courbe du sixième ordre, qui passe par :

Les 4 points d'intersection des coniques

$$S = 0, \qquad T = 0;$$

les 4 points d'intersection des coniques

$$S_1 = 0, \qquad T_1 = 0;$$

les 9 points d'intersection des cubiques

$$TS'_x - ST'_x = 0, \qquad TS'_y - ST'_y = 0;$$

les 9 points d'intersection des cubiques

$$TS'_x - ST'_x = 0, \qquad T_1 S'_{1x} - S_1 T'_{1x} = 0;$$

les 9 points d'intersection des cubiques

$$T_1 S'_{1y} - S_1 T'_{1y} = 0, \qquad TS'_y - ST'_y = 0;$$

les 9 points d'intersection des cubiques

$$T_1 S'_{1y} - S_1 T'_{1y} = 0, \qquad T_1 S'_{1x} - S_1 T'_{1x} = 0;$$

en tout, 44 points.

Une cubique telle que $TS'_x - ST'_x = 0$ passe par :

les 2 points d'intersection de la droite $S'_x = 0$ et de la conique $S = 0$;
les 2 points d'intersection de la droite $T'_x = 0$ et de la conique $T = 0$;
le point de rencontre des deux droites $S'_x = 0$ et $T'_x = 0$;
les 4 points de rencontre des coniques $S = 0$ et $T = 0$;

en tout 9 points.

Remarque. — La quatrième partie de la question proposée au Concours d'agrégation, en 1891, résulte immédiatement de la formule (7).

Question 1610.

Trouver le lieu du pied des normales abaissées d'un point donné sur les coniques d'un faisceau. (DARBOUX.)

SOLUTION GÉOMÉTRIQUE

Par M. le capitaine E. MALO.

Pour avoir l'ordre du lieu, il suffit de compter exactement le nombre des points du lieu qui se trouvent sur une des coniques de l'énoncé.

Or, sur une telle conique, il y a évidemment quatre points du lieu qui résultent du choix particulier auquel on s'est arrêté; s'il en existe d'autres, ils sont les pieds des normales abaissées du point fixe O sur d'autres coniques du faisceau; par conséquent, ils ne peuvent se trouver qu'aux points A, B, C, D, communs à toutes les coniques, et il est clair que chacun des points A, B, C, D doit être compté une fois, et une seule, car, si l'on joint OA, par exemple, la perpendiculaire AT est déterminée, ainsi que la conique du faisceau admettant AT comme tangente; il est non moins clair que la tangente au lieu en A est AT.

Puisque huit points du lieu se trouvent sur une conique quelconque du faisceau, l'ordre est 4; en d'autres termes, le lieu est une *quartique*.

On a déjà reconnu quatre points de passage obligés pour cette quartique : il est facile d'en reconnaître quatre autres à distance finie, ainsi que les quatre qui sont à l'infini.

Parmi les premiers se trouvent d'abord le point O lui-même et la direction de la tangente en ce point est évidente : c'est la normale en O à la conique du faisceau qui passe par O. Ensuite il est clair que les sommets P, Q, R du triangle autopolaire commun à toutes les coniques du faisceau, c'est-à-dire les points doubles des coniques évanouissantes du faisceau, font partie du lieu. En effet, en ces points, la direction de la tangente est indéterminée, et, par suite, OP, par exemple, peut être considérée comme normale.

Les directions des tangentes à la quartique aux points P, Q, R sont aisées à reconnaître. Il suffit pour cela, considérant, par exemple, le point P et les points infiniment voisins, d'exami-

ner cette région pour ainsi dire au microscope avec un grossissement indéfiniment croissant. Les coniques de l'énoncé comprises dans la région envisagée se présentent alors comme des coniques concentriques et homothétiques, et le lieu demandé comme celui du pied des normales *parallèles* à une direction fixe, c'est-à-dire comme le lieu des points de contact des tangentes parallèles à la direction perpendiculaire : c'est le diamètre conjugué à celle-ci. Donc, revenant à la figure primitive, on tirera OP et la perpendiculaire PS, puis on prendra la droite conjuguée de PS par rapport à l'angle APB.

Des points à l'infini deux sont réels, deux imaginaires. Les deux réels appartiennent aux deux paraboles comprises dans le faisceau ; les deux imaginaires sont les points cycliques ω, ω'. En effet, la droite isotrope $O\omega$, pouvant être considérée comme perpendiculaire à toute droite isotrope de la même série, peut en particulier être regardée comme normale en ω à la conique $(ABCD\omega)$.

Un problème voisin par son énoncé du présent problème, et auquel on a même déjà fait allusion chemin faisant, est celui de « trouver le lieu des points de contact des tangentes menées d'un point donné O aux coniques du faisceau ABCD ». On sait que ce lieu est une cubique passant par les points A, B, C, D, O et y admettant comme tangentes les droites OA, OB, OC, OD et la tangente à la conique du faisceau qui passe par O. La cubique en question et la quartique précédente sont donc rectangulaires en ces cinq points qui leur sont communs. Les trois points P, Q, R appartiennent également aux deux courbes ; mais elles ne s'y coupent point à angle droit, car la tangente à la cubique en P est, comme on l'a remarqué, la conjuguée par rapport à l'angle APB de la droite OP, conjuguée qui n'est généralement pas perpendiculaire à la conjuguée, par rapport au même angle APB, de la droite PS perpendiculaire à OP.

Les quatre derniers points communs à la cubique et à la quartique sont sur les droites isotropes $O\omega$, $O\omega'$: ils sont, par conséquent, toujours imaginaires.

Sauf relation de position spéciale entre les points A, B, C, D, O, ni la cubique ni la quartique n'admettent évidemment de singularités ponctuelles.

TABLE DES MATIÈRES DES EXERCICES.

Questions proposées.

Questions résolues.

16881 Paris — Impr. GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

OUVRAGES

DE

M. G. SALMON,

PROFESSEUR AU COLLÈGE DE LA TRINITÉ, A DUBLIN.

Traité de Géométrie analytique à deux dimensions (Sections coniques). Traduit de l'anglais par M. *H. Resal* et par M. *Vaucheret*. 2e édition française, publiée d'après la 6e édition anglaise, par M. *Vaucheret*, ancien Élève de l'École Polytechnique, Lieutenant-Colonel d'Artillerie, Professeur à l'École supérieure de Guerre. In-8; 1884 .... 12 fr.

AVERTISSEMENT DE L'ÉDITEUR.

Nous publions aujourd'hui la deuxième édition française du *Traité des sections coniques* de M. G. Salmon. Cet ouvrage forme avec le *Traité des courbes planes* et la *Géométrie à trois dimensions* du même auteur un traité complet de Géométrie analytique. On y trouve non seulement le résumé des principales recherches auxquelles a donné lieu la *théorie des courbes du deuxième degré*, mais encore l'exposé à peu près complet des *principes fondamentaux* de la Géométrie analytique, et toutes les données essentielles de l'*emploi des coordonnées cartésiennes, trilinéaires* et *tangentielles*.

L'examen de la table des matières suffit amplement pour donner une idée de la richesse des matériaux qu'il renferme, et de l'ordre méthodique suivant lequel ils sont distribués. Nous nous contenterons de citer ici : la *théorie des notations abrégées* et ses nombreuses applications; la *théorie des systèmes de cercles;* l'étude analytique et géométrique du *principe de dualité;* la *théorie des polaires réciproques;* l'exposé des *propriétés harmonique et anharmonique des coniques;* les principales applications de la *méthode des projections* et de la *méthode des infiniment petits;* et enfin la *théorie des invariants et covariants des systèmes de coniques* qui transporte, dans le domaine géométrique, toutes les ressources fécondes de la théorie des formes algébriques.

Mais ce que ne dit point la Table des matières et ce que nous tenons à noter, ce sont les qualités qui font, du *Traité des sections coniques* du savant professeur de Dublin, un livre éminemment *classique*, la sage progression avec laquelle sont exposées les théories, le choix gradué de nombreux Exercices, l'emploi systématique de problèmes numériques pour préciser les applications, et surtout la netteté des démonstrations et la hauteur vraiment philosophique des aperçus généraux.

La dernière édition française du *Traité des Sections coniques* ne diffère de la première que par les développements, peu étendus du reste, donnés à la théorie des coniques confocales, à la théorie des systèmes de coniques, et à l'exposé des recherches concernant l'hexagone de Pascal. Elle a été faite d'après la sixième édition anglaise, dont elle est la reproduction aussi exacte que possible, le traducteur ayant cherché avant tout à rendre fidèlement toute la pensée de l'auteur, et rien que la pensée de l'auteur.

Aussi espérons-nous que le public voudra bien continuer à cette deuxième édition le bienveillant accueil qu'il a fait à la première.

Traité de Géométrie analytique (**Courbes planes**), destiné à faire suite au *Traité des Sections coniques*. Traduit de l'anglais, sur la 3e édition, par *O. Chemin*, Ingénieur des Ponts et Chaussées, Professeur à l'École des Ponts et Chaussées, et augmenté d'une *Étude sur les points singuliers des courbes algébriques planes*, par *G. Halphen*. In-8; 1884.... 12 fr.

AVERTISSEMENT DE L'ÉDITEUR.

Fidèle au programme que nous nous étions tracé, nous publions aujourd'hui la traduction du *Traité de Géométrie analytique* (*Courbes planes*) de M. Salmon. Cet Ouvrage forme la suite naturelle du *Traité des Sections coniques*, et sa lecture est nécessaire pour la complète intelligence du *Traité de Géométrie analytique à trois dimensions* du même auteur. On y trouvera au même degré les remarquables qualités d'élégance et de clarté et la hauteur de vues qui caractérisent l'œuvre entière de M. Salmon. La traduction en a été faite avec le même soin jaloux de se rapprocher de la correction de l'original.

M. G. Halphen, dont tous les géomètres connaissent les beaux et nombreux travaux sur les différentes branches de l'Analyse, a bien voulu rédiger pour nous une étude sur les points singuliers. Cette Note constitue un Mémoire absolument original dans lequel il résume, en les complétant, ses propres travaux et ceux des géomètres qui se sont occupés de cette difficile et délicate question. Nos lecteurs le remercieront avec nous d'avoir abandonné un instant ses recherches personnelles pour combler une lacune regrettable qui existe jusqu'à présent dans les Ouvrages de Géométrie analytique.

Traité de Géométrie analytique à trois dimensions. Traduit de l'anglais, sur la 4e édition, par O. Chemin, Ingénieur des Ponts et Chaussées.

Ire Partie : *Lignes et surfaces du 1er et du 2e ordre.* In-8, avec figures dans le texte; 1882.. 7 fr.

IIe Partie : *Théorie des surfaces. Courbes gauches et surfaces développables. Famille de surfaces.* In-8, avec fig. dans le texte; 1891. 6 fr.

IIIe Partie : *Surfaces particulières. Théorie générale des surfaces.* (*Sous presse.*)

AVERTISSEMENT DE L'ÉDITEUR.

L'accueil favorable qu'ont rencontré en France les traductions du *Traité des sections coniques* et des *Leçons d'Algèbre supérieure* de M. G. Salmon a justifié les espérances que l'on avait pu concevoir sur leur succès.

Fidèle au programme que nous nous étions tracé dès le principe, nous publions aujourd'hui la première Partie du *Traité de Géométrie analytique à trois dimensions*, du même auteur. Les matières contenues dans ce Volume en font pour notre enseignement classique la suite directe et nécessaire du *Traité des Sections coniques*. On y trouvera la théorie générale du *point*, de la *ligne droite* et du *plan*, celle des *surfaces du second ordre* et des *coniques sphériques*; en un mot, toutes les questions développées dans les cours de Mathématiques spéciales. Il est à peine besoin de dire que ces sujets sont traités avec cette clarté d'exposition, cette hauteur de vues et ce mélange heureux et habile de Géométrie et d'Analyse qui caractérisent si bien tous les écrits de l'éminent professeur de Dublin.

Ajoutons que des Exercices nombreux et choisis accompagnent les théo-

ries les plus importantes, pour en bien faire comprendre l'esprit et les ressources.

Ce Volume est publié d'après la quatrième édition anglaise, qui contient de nombreuses et importantes additions.

Les coordonnées de droites, imaginées par Plücker, y tiennent une large place, bien en rapport avec leur importance. En traitant par leur moyen un assez grand nombre de questions, l'Auteur a mis nettement en évidence le rôle pour ainsi dire nécessaire qu'elles jouent dans l'étude des surfaces. La théorie des invariants et des covariants des quadriques a été aussi notablement améliorée et augmentée.

Le traducteur, en interprète respectueux, n'a eu qu'un objet en vue : rendre avec la plus grande exactitude une œuvre dont la concision et la correction peuvent être citées comme un modèle. Il s'estimera heureux si ce nouveau Volume reçoit le même accueil et rend les mêmes services que ses aînés.

AVERTISSEMENT DES ÉDITEURS.

La deuxième Partie de la Géométrie analytique à trois dimensions comprend trois Chapitres importants, qui portent les numéros XI, XII et XIII. Le Chapitre XI est relatif à la théorie générale des surfaces. On y traite toutes les notions générales applicables aux surfaces d'ordre quelconque et en particulier ce qui se rapporte à leur courbure.

Le Chapitre XII, courbes et surfaces développables, embrasse une série de sujets qu'on ne rencontre généralement pas dans les Ouvrages de Calcul infinitésimal, où l'on étudie ordinairement ces questions. Les deux premières Sections : propriétés, projections et classification des courbes, offriront certainement un intérêt particulier aux lecteurs; dans la quatrième, courbes tracées sur les surfaces, on trouve l'exposé de la méthode de Gauss, les propriétés des courbes géodésiques, les coordonnées elliptiques et géodésiques polaires.

Dans le Chapitre XIII, la première Section est consacrée à la formation des équations différentielles des surfaces; la seconde traite des complexes, des congruences et des surfaces réglées; elle constitue une introduction toute naturelle pour l'étude ultérieure et plus spéciale des beaux travaux de Plücker, Klein, etc., sur ce sujet.

D'une manière générale la plupart des résultats que contient la présente publication sont connus des Géomètres; ils en retrouveront néanmoins avec plaisir l'ensemble présenté d'une manière méthodique et avec cette simplicité de moyens et cette clarté d'exposition qui caractérise l'œuvre entière de M. Salmon.

Traité d'Algèbre supérieure. 2e édition française, publiée d'après la 4e édition anglaise, par *O. Chemin*. In-8; 1890.................... 10 fr.

PRÉFACE.

La nouvelle édition française de l'*Algèbre supérieure* de M. Salmon que nous publions aujourd'hui est la traduction complète de la quatrième édition anglaise.

Dans celle qui l'a précédée, on avait cru devoir faire différentes suppressions pour en diminuer l'étendue et la restreindre aux proportions d'un Ouvrage élémentaire. Ces considérations n'ont plus leur raison d'être aujourd'hui.

La publication successive des autres Ouvrages de M. Salmon a démontré la nécessité de conserver le texte de chacun d'eux dans son intégrité, afin



d'assurer la concordance des renvois d'un Traité à l'autre. Ajoutons aussi que beaucoup de notions, nouvelles en 1868, se sont vulgarisées depuis qu'elles ont pénétré dans l'enseignement de nos lycées; aussi la lecture du présent Volume ne présentera-t-elle plus aucune difficulté pour les lecteurs familiers avec les matières traitées dans les Cours de Mathématiques spéciales.

Dans la précédente édition française, M. Bazin avait introduit deux très intéressantes leçons sur les formes ternaires et quaternaires, dont la rédaction lui était propre et dont la substance lui avait été en partie fournie par les Mémoires originaux de M. Salmon. Nous avons cru devoir les reproduire ici sous forme de Notes à la fin du Volume. Nous avons également réimprimé à leur suite les deux Notes dont M. Hermite avait bien voulu enrichir la première publication de ces Leçons.

En traitant de matières aussi nouvelles, on a dû nécessairement introduire quelques néologismes. On s'est astreint néanmoins à en réduire le nombre autant que possible, tout en cherchant à se rapprocher, avec la plus respectueuse fidélité, de la correction du texte original.

Titres des Leçons. — Déterminants. — Définitions et exemples préliminaires. — Réduction et calcul des déterminants. — Multiplication des déterminants. — Déterminants réciproques et mineurs. — Déterminants symétriques et gauches symétriques. — Déterminants symétriques discriminants. — Fonctions symétriques. — Ordre et poids des éliminants. — Expression des résultants sous forme de déterminants. — Détermination des racines communes à plusieurs équations. — Discriminants. — Transformations linéaires. — Formation des invariants et covariants. — Représentation symbolique des concomitants. — Formes canoniques. — Des systèmes de fonctions. — Application aux formes binaires. — Formes binaires de degré supérieur. — Sur l'ordre des systèmes d'équations soumis à des restrictions. — Application des méthodes symboliques.

Notes. — Histoire des déterminants. — Sur les commutants. — Sur les déterminants fonctionnels rationnels. — Hessiens. — Fonctions symétriques. — Élimination. — Discriminants. — Bezoutiants. — Transformations linéaires. — Formes canoniques. — Combinants. — Application aux formes binaires. — Table de transvectants. — Table de M. Roberts pour les sommes des puissances des racines. — Table de résultants. — Tables de Hirsch et de M. Cayley pour les fonctions symétriques.

Notes de M. Bazin. — Application aux formes ternaires. — Application aux formes quaternaires.

Notes de M. Hermite. — Sur les invariants des formes du cinquième degré. — Sur l'invariant gauche des formes du sixième degré.

RÉMOND (A.), Ancien Élève de l'École Polytechnique, Licencié ès Sciences, Professeur de Mathématiques spéciales à l'École préparatoire de Sainte-Barbe. — **Exercices élémentaires de Géométrie analytique à deux et à trois dimensions**, avec un EXPOSÉ DES MÉTHODES DE RÉSOLUTION, suivis des *Énoncés des problèmes donnés pour les compositions d'admission aux Écoles Polytechnique, Normale, Centrale, au Concours général, à l'Agrégation.* 2 vol. in-8, avec figures dans le texte, se vendant séparément :

Ire PARTIE : *Géométrie à deux dimensions*. 2ᵉ édition; 1891... 7 fr.

IIᵉ PARTIE : *Géométrie à trois dimensions. Problèmes généraux. Exercices*; 1891 .... 7 fr.

17754 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

NOUVELLES ANNALES

DE

MATHÉMATIQUES

JOURNAL DES CANDIDATS

AUX ÉCOLES SPÉCIALES, A LA LICENCE ET A L'AGRÉGATION,

RÉDIGÉ PAR

M. CH. BRISSE,

PROFESSEUR A L'ÉCOLE CENTRALE ET AU LYCÉE CONDORCET,
RÉPÉTITEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

ET

M. E. ROUCHÉ,

EXAMINATEUR DE SORTIE A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
PROFESSEUR AU CONSERVATOIRE DES ARTS ET MÉTIERS.

Publication fondée en 1842 par MM. Gerono et Terquem, et continuée par MM. Gerono, Prouhet, Bourget et Brisse.

TROISIÈME SÉRIE. — TOME X.

DÉCEMBRE 1891.

S'adresser, pour la rédaction, à Paris,

à M. BRISSE, rue Vauquelin, 18,

ou à M. ROUCHÉ, boulevard Saint-Germain, 213.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1891

Ce Recueil paraît chaque mois.

Messieurs les Souscripteurs qui désirent ne point éprouver de retard dans la réception du numéro de Janvier 1892 sont priés de *renouveler immédiatement* leur abonnement.



